

душная прослойка с избыточным давлением (около 1 гПа), которая образуется между каплями при сближении за счет их испарения. Воздушная прослойка имеет чечевицеобразную форму, причем толщина ее в самой узкой части составляет несколько десятых долей микрометра.

Как избыточное давление, так и эффективность соударения капель очень сильно зависит от относительной влажности воздуха, в котором происходит столкновение капель. Экспериментально изучено слияние падающих капель с неподвижными при относительной влажности воздуха от 20 до 100 %. При влажности 100 % и скорости соударения меньше 3 см/с и больше 20 см/с все столкновения капель радиусом 1 мм были в опытах эффективными. При промежуточных скоростях, так же как и при большом дефиците влажности, область эффективных столкновений резко уменьшается и слияние происходит практически лишь при центральном ударе.

Так как в облаках и туманах относительная влажность близка к 100 %, то на основании приведенных выше экспериментальных данных можно считать, что эффективность столкновений капель в них близка к единице, а коэффициент слияния практически можно отождествить с коэффициентом соударения \mathcal{E} . Такое предположение и было сделано И. Лэнгмюром, Н. С. Шишкиным и др. при построении теории роста облачных элементов под влиянием гравитационной коагуляции.

5 Теория испарения и роста капель под давлением конденсации

В п. 2 указывалось, что капли облаков растут под влиянием двух основных процессов — конденсации водяного пара и коагуляции. Остановимся на теории этих процессов, т. е. дадим количественную оценку различным факторам, которые приводят к увеличению размеров облачных элементов и образованию осадков.

Так как размеры капель облаков малы по сравнению с размерами турбулентных молей, турбулентный обмен практически не влияет на перенос водяного пара с поверхности капель. Этот процесс осуществляется посредством молекулярного обмена. Молекулярный поток Q водяного пара по нормали к поверхности капли записывается в виде

$$Q = -\rho D \frac{ds}{dr}, \quad (5.1)$$

где D — коэффициент молекулярной диффузии водяного пара в воздухе: при температуре 0°C он составляет $0,22 \text{ см}^2/\text{с}$, при других значениях температуры $D = 0,22 + 0,0015T$ (T — температура в градусах Цельсия, D — в $\text{см}^2/\text{с}$); s — массовая доля пара; r — расстояние от центра капли; ρ — плотность воздуха.

Со всей поверхности капли радиусом r_k за 1 с испаряется (при $s < s_k$, s_k — массовая доля пара на поверхности капли) или конденсируется на ней (при $s > s_k$) масса водяного пара

$$I_k = 4\pi r_k^2 Q = -4\pi r_k^2 \rho D \left(\frac{ds}{dr} \right)_{r=r_k}. \quad (5.2)$$

Если расстояние между каплями значительно больше их радиуса и процесс испарения одной капли не влияет на соседние капли, то массу водяного пара

$$I = 4\pi r^2 Q = -4\pi r^2 \rho D \frac{ds}{dr}, \quad (5.3)$$

которая протекает за 1 с через сферу радиусом r , можно считать равной массе пара, испарившейся с поверхности капли, т. е.

$$I = I_k \quad \text{или} \quad -4\pi r^2 \rho D \frac{ds}{dr} = I_k. \quad (5.4)$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$s(r) = \frac{I_k}{4\pi \rho D r} + C. \quad (5.5)$$

Если при $r \rightarrow \infty$ массовая доля пара $s \rightarrow s_\infty$, то постоянная интегрирования $C = s_\infty$, а (5.5) принимает вид

$$s(r) = \frac{I_k}{4\pi \rho D r} + s_\infty. \quad (5.6)$$

При $r = r_k$ из этого соотношения получаем

$$I_k = 4\pi \rho D r_k (s_k - s_\infty). \quad (5.7)$$

Согласно этой формуле, полученной Максвеллом и Б. И. Срезневским, скорость испарения с поверхности капли пропорциональна не поверхности капли, как было бы при испарении в вакууме, а радиусу капли. Если подставить I_k , определенное выражением (5.7), в (5.6), то получим

$$s(r) = s_\infty + (s_k - s_\infty) \frac{r_k}{r}. \quad (5.8)$$

На основе соотношения (5.7) нетрудно получить формулу для изменения радиуса r_k и поверхности F_k капли во времени. В самом деле, скорость испарения с поверхности капли, очевидно, равна скорости изменения массы капли m :

$$I_k = \frac{dm}{dt} \quad \text{или} \quad 4\pi \rho D r_k (s_k - s_\infty) = -\frac{4}{3} \pi \rho_k \frac{dr_k^3}{dt}, \quad (5.9)$$

так как $m = 4\pi\rho_K(r_K^3/3)$; ρ_K — плотность капли. Из последнего соотношения получаем:

$$-\frac{dr_K^2}{dt} = \frac{2\rho D}{\rho_K} (s_K - s_\infty),$$

$$r_K^2 - r_0^2 = \frac{2\rho D}{\rho_K} (s_\infty - s_K) t, \quad (5.10)$$

где r_0 — начальный радиус капли.

После умножения левой и правой частей (5.10) на 4π находим

$$F_K - F_0 = \frac{8\pi\rho D}{\rho_K} (s_\infty - s_K) t, \quad (5.11)$$

т. е. поверхность растущей капли — линейная функция времени.

Формулы (5.7) и (5.10) получены в предположении квазистационарности процесса испарения. В действительности этот процесс, строго говоря, нельзя считать стационарным. Однако анализ решения уравнения диффузии водяного пара $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{D}{r} \frac{\partial^2(rs)}{\partial r^2}$ показывает, что для тех жидкостей, для которых $\rho s_K \ll \rho_K$ (для воды это условие выполняется), квазистационарное распределение влажности, описываемое формулами (5.6) и (5.8), практически не отличается от нестационарного.

Проведя такие же рассуждения для потока тепла, приходим к следующим формулам для распределения температуры T вблизи капли и для скорости притока тепла Q'_K к поверхности капли:

$$T(r) = T_\infty + (T_K - T_\infty) \frac{r_K}{r}. \quad (5.12)$$

$$Q'_K = 4\pi\lambda r_K (T_K - T_\infty). \quad (5.13)$$

Здесь T_∞ — температура воздуха на достаточно большом расстоянии от капли (теоретически при $r \rightarrow \infty$); T_K — температура поверхности капли; λ — коэффициент молекулярной теплопроводности воздуха.

При квазистационарном режиме испарения количество притекающего к капле тепла равно количеству тепла, израсходованного на испарение:

$$-Q'_K = LI_K.$$

С учетом (5.7) и (5.13) это соотношение дает

$$s_\infty - s_K = \frac{\lambda}{\rho DL} (T_K - T_\infty). \quad (5.14)$$

Если в это уравнение вместо массовой доли пара ввести давление водяного пара ($s_\infty = 0,622 (e_\infty/p)$, $s_K = 0,622 (E_K/p)$ — водяной пар на поверхности капли насыщенный), то соотношение (5.14) примет вид

$$e_\infty = E_K - Ap (T_\infty - T_K), \quad (5.15)$$

где $E_K = E(T_K)$ — давление насыщенного водяного пара при температуре поверхности капли T_K , e_∞ — давление водяного пара в воздухе, $A = 1,608\lambda/(\rho DL)$ — психрометрическая постоянная.

Формула (5.15) лежит в основе психрометрического метода измерения влажности. Ее называют *психрометрической формулой*. Эта формула позволяет по измеренным температурам воздуха (T_∞) и смоченного термометра (T_K) рассчитать давление водяного пара e_∞ в воздухе.

Если λ записать в виде $\lambda = c_p \rho k$ (k — коэффициент молекулярной теплопроводности воздуха) и считать $k = D$, то из формулы (5.14), переписанной в виде

$$T_K - T_\infty = \frac{L}{c_p} (s_\infty - s_K),$$

будет следовать, что при адиабатическом подъеме ненасыщенной частицы воздуха вертикальный градиент температуры смоченного термометра ($-dT_K/dz$) равен влажноадиабатическому градиенту (γ'_a):

$$-\frac{dT_K}{dz} = -\frac{dT_\infty}{dz} + \frac{L}{c_p} \frac{ds_K}{dz} = \gamma_a + \frac{L}{c_p} \frac{ds_K}{dz} = \gamma'_a, \quad (5.16)$$

поскольку при таком подъеме $ds_\infty/dz = 0$, а $-dT_\infty/dz = \gamma_a$.

Исключая разность $s_\infty - s_K$ из формул (5.7) и (5.14), получаем

$$I_K = \frac{4\pi\lambda r_K}{L} (T_\infty - T_K). \quad (5.17)$$

Так как разность $T_\infty - T_K$ в реальных условиях невелика, то можно воспользоваться уравнением Клаузиуса—Клапейрона, согласно которому

$$\frac{E_K}{E_\infty} = \exp\left(-\frac{L}{R_n} \frac{T_\infty - T_K}{T_\infty^2}\right) \approx 1 - \frac{L}{R_n} \frac{T_\infty - T_K}{T_\infty^2}, \quad (5.18)$$

где $E_\infty = E(T_\infty)$ — давление насыщенного водяного пара при температуре воздуха, окружающего каплю.

Если из формулы (5.7) найти

$$\frac{E_K}{E_\infty} = \frac{e_\infty}{E_\infty} + 1,608 \frac{RT_\infty}{4\pi DE_\infty r_K} I_K, \quad (5.19)$$

то после вычитания левых и правых частей (5.18) и (5.19) и замены разности $T_\infty - T_K$ по (5.17) получим

$$\frac{I_K}{4\pi r_K} \left(1,608 \frac{RT_\infty}{DE_\infty} + \frac{L^2}{R_n \lambda T_\infty^2} \right) = 1 - \frac{e_\infty}{E_\infty}. \quad (5.20)$$

Эта формула позволяет рассчитать скорость испарения с поверхности капли радиусом r_K по измеренным (или заданным) температуре T_∞ и давлению водяного пара e_∞ воздуха, окружающего каплю, с учетом понижения температуры капли под влиянием испарения. Температура капли при известном I_K рассчитывается по соотношению (5.17). Из сравнения (5.17) и (5.20) следует, что понижение температуры капли не зависит от ее радиуса.

Значительно сложнее решается вопрос о распределении влажности и температуры вблизи движущихся капель. В этом случае наряду с уравнениями переноса тепла и водяного пара необходимо привлечь уравнение движения воздуха, обтекающего каплю. Найденные здесь соотношения носят пока полуэмпирический характер. Наибольшим признанием пользуется следующая формула, полученная на основе теории подобия и размерности:

$$\text{Sh} = 2 \left(1 + \beta \text{Re}^{1/2} \text{Sc}^{1/3} \right), \quad (5.21)$$

где $\text{Re} = 2\rho u_0 r_K / \eta$ — число Рейнольдса (u_0 — скорость потока на большом расстоянии от капли); $\text{Sh} = \frac{2r_K I_K}{\rho D F_K (s_K - s_\infty)}$ — число Шервуда (F_K — поверхность капли); $\text{Sc} = \eta / \rho D$ — число Шмидта (для воздуха $\text{Sc} \approx 0,7$). С учетом того, что $F_K = 4\pi r_K^2$, формулу (5.21) можно переписать в виде

$$I_K = 4\pi \rho D r_K (s_K - s_\infty) \left(1 + \beta \text{Re}^{1/2} \text{Sc}^{1/3} \right). \quad (5.22)$$

Так как $I_K = -\frac{dm}{dt} = -4\pi \rho_K r_K^2 \left(\frac{dr_K}{dt} \right)$, то после введения обозначений

$$\rho D \frac{s_K - s_\infty}{\rho_K} = \vartheta \quad \text{и} \quad \beta \text{Sc}^{1/3} \left(\frac{2\rho u_0}{\eta} \right)^{1/2} = \varepsilon$$

формула (5.22) примет вид

$$-\frac{r_K dr_K}{1 + \varepsilon r_K^{1/2}} = \vartheta dt. \quad (5.23)$$

Интегрируя, находим выражение для времени t уменьшения радиуса капли от r_0 до r_K :

$$\vartheta t = \left(\frac{2}{3} \frac{r^{3/2}}{\varepsilon} - \frac{r}{\varepsilon^2} + \frac{2r^{1/2}}{\varepsilon^3} - \frac{2 \ln(1 + \varepsilon r^{1/2})}{\varepsilon^4} \right) \Big|_{r_0}^{r_K}. \quad (5.24)$$

Если положить $r_k=0$, то эта формула даст время t_0 полного испарения капли радиусом r_0 .

Постоянная β в формуле (5.22) близка к нулю при малых значениях Re ($Re < 1$), а затем возрастает до 0,2—0,3 (чаще всего принимают $\beta=0,23$).

Формулу, аналогичную (5.21), можно записать и для теплоотдачи капли:

$$Nu = 2(1 + \beta Re^{1/2} Pr^{1/3}), \quad (5.25)$$

где $Nu = \frac{2r_k Q'_k}{\lambda F_k (T_\infty - T_k)}$ — число Нуссельта; $Pr = \eta/\rho k$ — число

Прандтля ($k = \lambda/c_p \rho$ — коэффициент молекулярной теплопроводности, для воздуха $Pr \approx 0,8$). При малых Re эта формула переходит в (5.13).

Опыты, проведенные в лабораторных условиях, подтвердили справедливость формул (5.21) и (5.25). Однако необходимы дальнейшие исследования, в частности, по определению β (особенно в интервале $1 < Re < 10$).

В общем случае расчет времени испарения или роста движущейся капли может быть выполнен по формуле (5.24). Наиболее просто решается вопрос о скорости испарения неподвижных или медленно движущихся капель (т. е. при малых Re). В этом случае из формулы (5.10) получаем ($r_k=0, t=t_0$):

$$t_0 = \frac{\rho_k r_0^2}{2\rho D (s_k - s_\infty)}. \quad (5.26)$$

Формула (5.26) показывает, что время существования капли прямо пропорционально r_0^2 . Это значит, что с укрупнением капель быстро возрастает вероятность выпадения осадков из облака.

Приведем значения времени существования капли при температуре воздуха $T_\infty=5^\circ\text{C}$, относительной влажности $f_\infty=90\%$, давлении воздуха $p=900$ гПа:

Капли облака				
r_0 см	10^{-4}	$3 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	$3 \cdot 10^{-3}$
t_0 с	0,06	0,55	6,10	54,9
Капли дождя				
r_0 см	10^{-2}	$3 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$2,5 \cdot 10^{-1}$
t_0 с	10,17 мин	91,54 мин	16,95 ч	105,94 ч

Эти данные показывают, что если облако состоит из капель радиусом меньше 30—50 мкм, то из такого облака осадки выпасть не могут, так как время падения капли от облака до земной поверхности обычно превышает 1 мин. Из этих же данных следует, что осадки могут выпасть из облаков, состоящих из

капель радиусом больше 10^{-2} см. При этом капли такого радиуса могут свободно проходить значительные расстояния, существенно не изменяя своего размера.

Оценим то расстояние (по вертикали), которое может пройти капля с начальным радиусом r_0 . Считая скорость падения стоксовой ($v_s = c_2 r_K^2$), формулу (5.10) перепишем в виде

$$dz/dt = c_2 (r_0^2 - c_1 t), \quad (5.27)$$

где $c_1 = 2D(\rho/\rho_K)(s_K - s_\infty)$; $dz/dt = v_s$.

Интегрируя это уравнение в предположении, что в начальный момент $t=0$ высота $z=0$, получаем

$$z = c_2 r_0^2 t - \frac{c_1 c_2}{2} t^2. \quad (5.28)$$

Подставив сюда время $t=t_0$ (время существования капли) по формуле (5.26), найдем соотношение для расстояния z_0 , которое проходит капля с начальным радиусом r_0 :

$$z_0 = \frac{c_2}{2c_1} r_0^4. \quad (5.29)$$

Это соотношение показывает, что расстояние, проходимое каплей в ненасыщенном влажном воздухе, пропорционально *четвертой степени начального радиуса капли*.

Формула (5.29) дает объяснение известному из наблюдений за облаками факту: нижняя граница облаков, состоящих из мелких капель, резко очерчена, в то же время граница облаков, состоящих из крупных капель (радиусом больше 100 мкм), обычно расплывчатая — наблюдаются полосы падения.

После рассмотрения условий роста одной капли сравнительно нетрудно решить задачу изменения общей массы капель в некотором объеме воздуха. Очевидно, что изменение парциальной влажности $\delta^*(r)$ за 1 с равно

$$\frac{d\delta^*(r)}{dt} = n f(r) dr \frac{dm}{dt},$$

а скорость изменения влажности облака равна

$$\frac{d\delta^*}{dt} = n \int_0^\infty f(r) \frac{dm}{dt} dr. \quad (5.30)$$

Здесь n — число капель в единице объема, dm/dt — скорость изменения массы капли радиусом r , $f(r)$ — плотность распределения капель по размерам.

С учетом соотношений (5.7) и (5.9) выражение (5.30) принимает вид

$$\frac{d\delta^*}{dt} = 4\pi\rho Dn \int_0^{\infty} r f(r) (s_{\infty} - s_k) dr. \quad (5.31)$$

Запишем разность $s_{\infty} - s_k$ в виде

$$s_{\infty} - s_k = s_{\infty} - s_m(T_{\infty}) + s_m(T_{\infty}) - s_k.$$

Тогда (5.31) примет вид

$$\frac{d\delta^*}{dt} = 4\pi\rho Dn \left\{ [s_{\infty} - s_m(T_{\infty})] \int_0^{\infty} r f(r) dr + \int_0^{\infty} r f(r) [s_m(T_{\infty}) - s_k] dr \right\}. \quad (5.32)$$

Если температура капли T_k равна температуре воздуха T_{∞} и если отсутствует эффект понижения давления за счет гигроскопичности раствора, то по формуле Томпсона

$$\frac{s_k - s_m(T_{\infty})}{s_m(T_{\infty})} = \frac{2\sigma}{\rho_k R_{\pi} T_{\infty} r}.$$

Если еще учесть, что $\int_0^{\infty} r f(r) dz = \tilde{r}_1$ и $\int_0^{\infty} f(r) dr = 1$, то формулу

(5.32) можем переписать в виде

$$\frac{d\delta^*}{dt} = 4\pi\rho Dn \left\{ [s_{\infty} - s_m(T_{\infty})] \tilde{r}_1 - \frac{2\sigma s_m(T_{\infty})}{\rho_k R_{\pi} T_{\infty}} \right\}. \quad (5.33)$$

Считая, что подъем воздуха происходит адиабатически и без вовлечения (смешения), можем записать $d\delta^*/dt = -\rho ds_m/dt$, а $ds_m/dt = w(ds_m/dz)$. При известной вертикальной скорости w по формуле (5.33) находим пересыщение $(s_{\infty} - s_m)$ водяного пара в поднимающемся воздухе. Согласно оценкам, относительное пересыщение, т. е. $(s_{\infty} - s_m)/s_m$, не превышает 0,4 %, при этом пересыщение наблюдается лишь в тонком слое (толщиной 30—40 м) вблизи нижней границы облака. Во всей остальной части облака пересыщение практически отсутствует.

В заключение параграфа назовем некоторые другие эффекты, оказывающие влияние на скорость испарения и роста капель, такие, как несферичность, скачок массовой доли пара у поверхности капли, загрязнение ее и др.

Первый эффект, согласно оценкам, приводит к поправкам, не превышающим 2—4 %.

Скачок массовой доли пара вблизи поверхности испаряющейся капли в случае малых размеров капель (до нескольких микромет-

ров) существенно влияет на скорость испарения. Как теоретические расчеты, так и опытные данные указывают на то, что при приближении к поверхности капли (равно как и любого другого тела) градиенты температуры и влажности резко возрастают. Можно, таким образом, ввести понятие слоя толщиной Δ , в пределах которого температура и доля водяного пара, а также тангенциальная составляющая скорости обтекания изменяются скачком.

В связи с учетом скачка метеовеличин встает вопрос об учете межмолекулярных процессов на поверхности раздела пар—жидкость, которые детально рассматриваются в кинетической теории жидкостей и газов. В этой теории важную роль играет понятие *коэффициента конденсации* (α), представляющего собой отношение числа сконденсировавшихся (перешедших в жидкость) молекул пара к общему числу молекул, столкнувшихся с поверхностью жидкости.

В случаях крупных капель (радиусом в десятки и более микрометров) чистой воды поправки к скорости испарения на скачок метеовеличин пренебрежимо малы: на поверхности таких капель водяной пар находится в состоянии насыщения и скорость испарения (или конденсации) определяется на основе развитой выше диффузионной теории.

Однако в тех случаях, когда капля или поверхность естественного водоема покрыта пленкой нерастворимых поверхностно-активных веществ (например, цетилового спирта), коэффициент конденсации (а вместе с этим и скорость испарения) уменьшается. Этот эффект влияет на время существования туманов в городах, время испарения капель на поверхности самолетов, автомашин и др., поскольку в таких случаях капли покрыты пленками жидких и твердых веществ.

С учетом того, что испарение с водоемов определяется турбулентной диффузией водяного пара и, следовательно, коэффициент диффузии $D \sim u_1$, М. П. Тимофеев получил для скорости испарения (Q') с водной поверхности формулу:

$$Q' = \frac{bc_1(E_n - e_1)}{1 + bc_1/\alpha}, \quad (5.34)$$

где E_n — давление насыщенного пара при температуре поверхности водоема; e_1 — давление пара на некоторой высоте z_1 ; c_1 — скорость ветра на той же высоте; b — коэффициент, зависящий от параметра шероховатости z_0 , размеров водоема и термической устойчивости приводного слоя.

Для поверхности, не покрытой пленками нерастворимых веществ (т. е. при $\alpha = 0,03 \div 1,0$) слагаемое bc_1/α имеет порядок 10^{-3} , а поправка на скачок пренебрежимо мала (водяной пар при $z=0$ насыщен). Однако, если водоем покрыт пленкой нерастворимого поверхностно-активного вещества, слагаемое bc_1/α (под влиянием уменьшения α) оказывается сравнимым с единицей.

В табл. 18.3 приведены значения отношения Q'/Q . Видно, что скорость испарения (Q') с поверхности, покрытой пленкой цетилового спирта, уменьшается на несколько десятков процентов по сравнению со скоростью испарения (Q) с поверхности чистой воды.

Таблица 18.3. Значения отношения Q'/Q

Стратификация	c_1 м/с		
	2	5	10
Иверсионная	0,90	0,76	0,62
Безразличная	0,80	0,62	0,45
Неустойчивая	0,62	0,40	0,25

6 Распределение капель облаков и осадков по размерам

К числу важнейших макрофизических характеристик облаков и осадков относятся число капель в единице объема и их размер. Уже первые измерения облачных капель показали, что облако, так же как и туман, состоит из капель различных размеров.

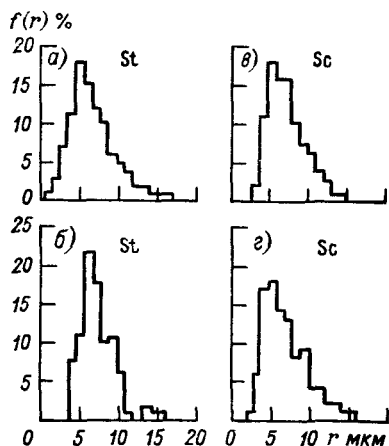


Рис. 18.10. Экспериментальные кривые плотности распределения капель облаков различных форм по размерам.

а) общее число измеренных капель $N=17\ 269$, $\bar{r}_1=6,8$ мкм; б) $N=1029$, $\bar{r}_1=7,6$ мкм; в) $N=2469$, $\bar{r}_1=7,1$ мкм; г) $N=722$, $\bar{r}_1=6,7$ мкм.

Приведенные на рис. 18.10 кривые и данные других измерений показывают, что в распределении капель по размерам можно наметить ряд общих для всех спектров закономерностей. Для каждого распределения на кривой обнаруживается максимум. В сторону меньших и больших размеров капель повторяемость умень-