ГЛАВА III

КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ В ОДНОМ ИЗМЕРЕНИИ

§ 1. Введение

Чтобы познакомиться ближе с уравнением Шредингера до рассмотрения проблем истолкования и интерпретации квантовой теории, мы изучим волновую механику физических систем в одном измерении. Одномерные задачи интересны не только как простые модели, позволяющие обнаружить некоторые особенности, которые встретятся нам в более сложных случаях, но также и потому, что многие задачи после соответствующих преобразований могут быть сведены к проблеме решения уравнений, аналогичных одномерному уравнению Шредингера.

Рассмотрим частицу массы m, способную перемещаться по оси x под действием некоторого потенциала $V(x)$. Уравнение Шредингера записывается в виде

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right) \Psi(x, t). \tag{1}$$

Мы займемся исследованием стационарных состояний. Если E есть энергия стационарного состояния, то

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\, e^{-iEt/\hbar}, \tag{2}$$

причем функция $\psi(x)$ является решением стационарного уравнения Шредингера,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) \psi = E\psi. \tag{3}$$

В этой главе мы используем обозначения

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} U(x), \quad E = \frac{\hbar^2}{2m} \varepsilon, \tag{4}$$

что позволяет переписать предшествующее уравнение в форме

$$\psi'' + (\varepsilon - U(x))\psi = 0. \tag{5}$$

Это дифференциальное уравнение Штурма — Лиувилля; мы интересуемся ограниченными, непрерывными и дифференцируемыми его решениями во всем интервале $(-\infty, +\infty)$.

Если такое решение существует, то всякое другое решение, получаемое умножением на постоянный коэффициент, будет обладать аналогичными свойствами, поэтому мы не будем различать решения, отличающиеся на постоянный множитель. Если допустимы два линейно независимых решения, то всякая их линейная комбинация также будет допустимым решением. В этом случае говорят, что собственное значение имеет *вырождение кратности или порядка* 2; по определению кратность или порядок вырождения есть число линейно независимых собственных функций, принадлежащих данному собственному значению.

Уравнение (5) вещественно ($V(x)$ есть вещественная функция x). Если ψ есть собственная функция, то ее действительная и мнимая части также являются собственными функциями (в случае отсутствия вырождения они отличаются только на постоянный множитель). Поэтому для нахождения всех собственных функций, соответствующих данному собственному значению, достаточно знать все действительные собственные функции. Это замечание существенно упрощает вычисления.

В первом разделе мы рассмотрим точно решаемую задачу на собственные значения в случае некоторых прямоугольных потенциалов. Особенное внимание будет обращено на различия между квантовыми и классическими движениями, а именно на квантование уровней энергии связанных состояний и явления отражения волн, резонанса и прохождения потенциальных барьеров несвязанными «частицами». Во втором разделе мы подвергнем систематическому изучению уравнение (5) для произвольного потенциала $U(x)$. Это позволит нам распространить на общий случай некоторые результаты, полученные в первом разделе.

Раздел I. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

§ 2. Общие свойства

Для проявления типично квантовых эффектов необходимо, чтобы потенциал $U(x)$ заметно изменялся на расстояниях порядка длины волны. Наиболее простым типом потенциала, отвечающего этому требованию, является прямоугольный потенциал: это потенциал, обладающий разрывами непрерывности первого рода (т. е. резкими скачками конечной величины) в некоторых точках, а между этими точками постоянный. Ось x таким образом подразделяется на некоторое число интервалов, в каждом из которых потенциал имеет вполне определенное постоянное значение.

Наличие разрывов первого рода у потенциала $U(x)$ не изменяет условия регулярности, которым должна удовлетворять