Раздел II. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

§ 7. Соотношения неопределенности координата-импульс квантовой частицы

Вернемся к определениям вероятностей § 2. Распределения $P(\boldsymbol{r})$ и $\Pi(\boldsymbol{p})$, будучи определены на основе одной и той же волновой функции $\Psi(\boldsymbol{r})$, не являются независимыми друг от друга, хотя функция $\Psi(\boldsymbol{r})$ может *a priori* быть любой функцией с интегрируемым квадратом. Одно из этих распределений всегда может быть выбрано произвольно с помощью соответствующего выбора функции Ψ: если, например, мы задаемся некоторым распределением $P(\boldsymbol{r})$, то достаточно выбрать волновую функцию с абсолютным значением, равным $\sqrt{P}$, а именно $\Psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{P(\boldsymbol{r})}\, e^{i\alpha(\boldsymbol{r})}$, при этом фаза $\alpha(\boldsymbol{r})$ остается, конечно, полностью неопределенной. Но с помощью соответствующего выбора $\alpha(\boldsymbol{r})$ мы уже не можем получить любое наперед заданное распределение $\Pi(\boldsymbol{p})$, хотя $\Pi(\boldsymbol{p})$, рассматриваемое как функционал $\alpha(\boldsymbol{r})$, может изменяться в достаточно широких пределах. Тот факт, что всегда существует некоторая корреляция между распределениями $P(\boldsymbol{r})$ и $\Pi(\boldsymbol{p})$ является характерным для квантовой теории[4]). Эта корреляция количественно выражается *соотношениями неопределенности Гейзенберга.*

Рассмотрим для начала частицу в одном измерении. Пусть x есть ее координата, а p — импульс и пусть $\psi(x)$ и

$$\varphi(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, e^{-ipx/\hbar}\, dx$$

суть волновые функции, представляющие ее динамическое состояние в пространстве x и пространстве p соответственно.

---

[4]) В этом пункте имеется существенное отличие между статистическими распределениями $P(\boldsymbol{r})$ и $\Pi(\boldsymbol{p})$ и соответствующими распределениями $P_{\text{кл}}(\boldsymbol{r})$ и $\Pi_{\text{кл}}(\boldsymbol{p})$ в классической статистической механике, сходства с которыми можно было бы искать. Эти последние получаются с помощью плотности в фазовом пространстве $\rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$:

$$P_{\text{кл}}(\boldsymbol{r}) = \int \rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p}, \qquad \Pi_{\text{кл}}(\boldsymbol{p}) = \int \rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{r}.$$

Здесь $\rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ есть положительная функция, подчиняющаяся условию $\iint \rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{p} = 1$. В классической статистической механике можно одновременно произвольно выбирать распределения $P_{\text{кл}}(\boldsymbol{r})$ и $\Pi_{\text{кл}}(\boldsymbol{p})$; действительно, существует по крайней мере одна плотность в фазовом пространстве $\rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = P_{\text{кл}}(\boldsymbol{r})\Pi_{\text{кл}}(\boldsymbol{p})$, позволяющая это сделать.

Результат Гейзенберга опирается на тот математический факт, что протяженность волны ψ и ее образа Фурье φ в соответствующих пространствах не могут одновременно быть сделаны произвольно малыми. *Если волна ψ занимает область порядка Δx в пространстве x, а волна φ — область порядка Δp в пространстве p, то произведение $\Delta x\, \Delta p$ остается все время больше некоторой величины порядка $\hbar$*

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar. \tag{25}$$

Этот результат мы уже встречали при построении волновых пакетов в теории волн вещества. Он проявился также, хотя и не столь явным образом, при обсуждении эволюции волновых пакетов, построенных с помощью состояний непрерывного спектра, в гл. III.

В справедливости соотношения (25) можно убедиться путем следующих полуколичественных рассуждений, которые только перефразируют аргументы, приведенные на стр. 60. Любая волна $\psi(x)$ может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн e^{ikx} с длиной волны $2\pi/k$. Пусть Δk характеризует размер области изменения параметра k в этой суперпозиции. Чтобы волна $\psi(x)$ оказалась локализованной в пространственной области Δx, необходимо, чтобы «конструктивное» согласие между фазами различных волн в суперпозиции осуществлялось именно в этой области, а вне ее интерференция между волнами должна иметь «деструктивный» характер. Число длин волн $2\pi/k$, содержащихся в Δx, равно $k\Delta x/2\pi$. Чтобы различные плоские волны, формирующие $\psi(x)$, могли взаимно погашать друг друга на границах интервала Δx, необходимо, чтобы это число волн изменялось по крайней мере на единицу, когда k пробегает область своего изменения, т. е. должно выполняться условие $\Delta x\ \Delta k \geqslant 2\pi$. Поскольку дело идет только о порядке величин, опустим множитель 2π и напишем просто

$$\Delta x \cdot \Delta k \gtrsim 1.$$

Отсюда, используя соотношение между импульсом и волновым вектором ($p = \hbar k$), получаем неравенство (25).

Обычно величины Δx и Δp называются неопределенностями координаты и импульса соответственно, и результат Гейзенберга выражается следующим образом: *произведение неопределенностей координаты и импульса частицы всегда остается больше некоторой величины порядка $\hbar$.*

Проиллюстрируем этот результат несколькими примерами. Гауссовый пакет волн (не нормированный на единицу)

$$\psi(x) = \exp\left[\frac{i}{\hbar} p_0 x - \frac{(x - x_0)^2}{2\xi^2}\right]$$

занимает область порядка ξ около точки x_0. Волна

$$\varphi(p) = \frac{\xi}{\sqrt{\hbar}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} x_0 (p_0 - p) - \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{\hbar^2}(p - p_0)^2\right]$$

в пространстве импульсов, которая ему соответствует, занимает в пространстве импульсов область порядка $\hbar/\xi$ около точки p_0. Уменьшая ξ, мы уменьшаем Δx, но при этом увеличиваем Δp, так что их произведение остается порядка $\hbar$.

В качестве другого примера рассмотрим «прямоугольный сигнал»

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ip_0x/\hbar}, & \text{если} \quad |x| < a, \\ 0 & \text{если} \quad |x| > a, \end{cases}$$

который отличен от нуля в области шириной $2a$, окружающей точку $x = 0$. В этом случае имеем

$$\varphi(p) = \frac{\sqrt{2\hbar/\pi}}{p - p_0} \sin\frac{(p - p_0)a}{\hbar}.$$

Функция $|\varphi(p)|^2$ обнаруживает наличие резкого максимума в точке p_0, окруженного с двух сторон последовательностями нулевых минимумов (при $p = p_0 + n\pi\hbar/a$), разделенных максимумами, величина которых убывает как $[1/(p - p_0)]^2$. Можно сказать, что волна $\varphi(p)$ сконцентрирована между первыми нулями $|\varphi(p)|^2$ по обе стороны центрального максимума, т. е. в области $\Delta p \approx 2\pi\hbar/a$. Величина Δp тем больше, чем меньше протяженность сигнала $\Delta x \approx 2a$, т. е.

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx 4\pi\hbar.$$

На рис. 17 представлены графики $|\psi(x)|^2$ как функции x и $|\varphi(p)|^2$ как функции p для двух волновых пакетов, которые мы рассмотрели.

Все рассуждения, касающиеся протяженности волны ψ в сравнении с протяженностью ее образа Фурье в соответствующем пространстве, без труда переносятся на трехмерный случай. Обозначим с помощью Δx, Δy, Δz неопределенности трех пространственных координат, а с помощью Δp_x, Δp_y, Δp_z — неопределенности составляющих импульса. Корреляции между статистическими распределениями $P(\boldsymbol{r}) = |\Psi(\boldsymbol{r})|^2$ и $\Pi(\boldsymbol{p}) = |\Phi(\boldsymbol{p})|^2$ проявляются в существовании соотношений неопределенности:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta p_x &\gtrsim \hbar, \\ \Delta y \cdot \Delta p_y &\gtrsim \hbar, \\ \Delta z \cdot \Delta p_z &\gtrsim \hbar. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

До настоящего времени мы представляли соотношения неопределенности как соотношения по порядку величины. Это неизбежно, пока не установлено точное определение величин Δx, Δp_x и т. д., измеряющих различные неопределенности. Установив подходящее определение этих величин, мы придем к более строгим заключениям. Но хотя они и имеют определенные преимущества, необходимо особенно подчеркнуть, что главный смысл и значение соотношений неопределенности уже проявляются в формулах, верных только по порядку величины. Ни при каких обстоятельствах мы не можем приписать квантовой частице одновременно строго определенной координаты и строго определенного импульса. Представлять частицу как объект,

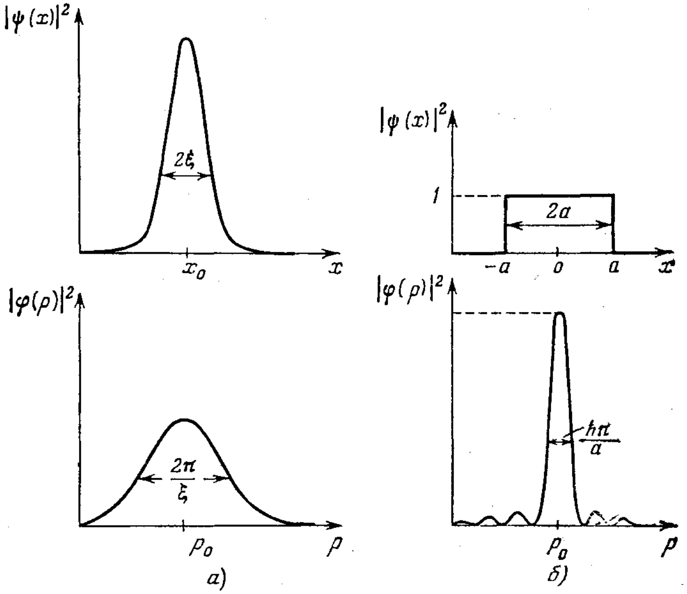

Рис. 17. Квадраты модулей волновых пакетов $\psi(x)$ и $\varphi(p)$ в случаях: *а*) гауссова волнового пакета; *б*) прямоугольного сигнала.

обладающий точно определенными положением и импульсом, можно только в случае, когда величина кванта действия $\hbar$ может считаться пренебрежимо малой, т. е. в области справедливости классической теории.

§ 8. Точное выражение соотношений неопределенности координата-импульс

Чтобы сократить изложение, мы рассмотрим детально только случай частицы в одном измерении. Примем следующее определение[5]: Δx и Δp являются средними квадратичными откло-

[5]) Это несомненно, наиболее удобное определение. В большинстве случаев определенные так величины Δx и Δp дают хорошее представление о неопределенностях в x и p. Однако иногда случается, что это математическое определение существенно отличается от оценок по порядку величины. Примером может служить разобранный выше случай «прямоугольного сигнала»: величина Δp по формуле (27) оказывается бесконечной, но мы видели, что грубая оценка дает $2\pi\hbar/a$.

нениями распределений $|\psi(x)|^2$ и $|\varphi(p)|^2$. Применяя обозначения § 5, имеем

$$\Delta x \equiv \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}, \quad \Delta p \equiv \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}. \tag{27}$$

Величина Δx, таким образом, непосредственно связана с измерением положения частицы: это статистическая флуктуация результата измерения около среднего значения $\langle x\rangle$; то же замечание относится к Δp, если иметь в виду измерение импульса. Мы покажем, что при самых общих предположениях

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \hbar/2. \tag{28}$$

Рассмотрим положительно определенное выражение

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x\psi + \lambda\hbar \frac{\partial\psi}{\partial x} \right|^2 dx \qquad (I(\lambda) \geqslant 0 \text{ при любом } \lambda).$$

Раскрывая это выражение и интегрируя по частям, последовательно получаем

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x\psi|^2\, dx + \lambda\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x} x\psi + x\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) dx +$$

$$+ \lambda^2\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial\psi}{\partial x} \right|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x^2 \psi\, dx - \lambda\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\psi\, dx - \lambda^2\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\, dx,$$

что дает, предполагая ψ нормированной на единицу и используя результаты § 5,

$$I(\lambda) = \langle x^2\rangle - \lambda\hbar + \lambda^2 \langle p^2\rangle. \tag{29}$$

Ввиду того, что полином второго порядка $I(\lambda)$ является положительно определенным (или равным нулю), его дискриминант $\hbar^2 - 4\langle p^2\rangle\langle x^2\rangle$ отрицателен (или равен нулю), следовательно

$$\langle x^2\rangle \langle p^2\rangle \geqslant \hbar^2/4. \tag{30}$$

Условие (30) менее ограничительно, чем объявленное выше условие (28). Но можно провести аналогичное вычисление, исходя из слегка отличного выражения для $I(\lambda)$, а именно, заменяя в формуле для $I(\lambda)$ величину x на $x - \langle x\rangle$ и $\hbar(\partial/\partial x)$ на $\hbar(\partial/\partial x) - i\langle p\rangle$ или, что то же самое, заменяя $\psi(x)$ на $e^{-i\langle p\rangle \frac{x}{\hbar}}\psi(x + \langle x\rangle)$. Результат аналогичен уравнению (29):

$$I(\lambda) = (\Delta x)^2 - \lambda\hbar + \lambda^2 (\Delta p)^2 \geqslant 0.$$

Условие (28) выражает тот факт, что дискриминант этого многочлена второго порядка по λ не может быть положительным.

Предшествующее доказательство применимо также и к случаю частицы в трехмерном пространстве. Волновая функция $\Psi(\boldsymbol{r})$ есть функция трех координат частицы в этом пространстве и интегралы, встречающиеся по ходу доказательства, суть интегралы по трехмерному пространству конфигураций; читатель легко проверит, что все манипуляции с этими интегралами остаются в силе. Само определение (27) средних квадратичных отклонений обобщается без труда. Таким образом, получаются *соотношения неопределенности Гейзенберга*

$$\left.\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta p_x &\geqslant \hbar/2, \\ \Delta y \cdot \Delta p_y &\geqslant \hbar/2, \\ \Delta z \cdot \Delta p_z &\geqslant \hbar/2. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

§ 9. Обобщение: соотношения неопределенности для сопряженных переменных

В общем случае квантовых систем в R-мерных пространствах имеют место аналогичные соотношения неопределенности. Используя обозначения § 6 и ~~по~~ аналогии с определением (27), будем характеризовать неопределенности q_i и p_i квадратичными отклонениями, соответствующими их статистическим распределениям:

$$\Delta q_i = \sqrt{\langle q_i^2 \rangle - \langle q_i \rangle^2}, \qquad \Delta p_i = \sqrt{\langle p_i^2 \rangle - \langle p_i \rangle^2}.$$

Рассуждения предшествующего параграфа могут быть повторены без изменений, и в результате мы получим соотношения неопределенности между сопряженными (декартовыми) переменными:

$$\Delta q_i \cdot \Delta p_i \geqslant \hbar/2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, R). \tag{32}$$

§ 10. Соотношение неопределенности время-энергия

Существование соотношений неопределенности координата-импульс связано с тем, что импульс с точностью до постоянного множителя определяется как характеристическое волновое число плоской волны, а плоская волна, строго говоря, заполняет все пространство; попытка локализовать импульс частицы в некоторой определенной точке пространства столь же безуспешна, как попытка локализовать плоскую волну.

Но подобно тому, как импульс, будучи пропорционален волновому числу, не может быть локализован в пространстве, так и энергия, пропорциональная частоте, не может быть локализована во времени. Поэтому в соответствии с требованиями принципа относительности существует соотношение неопределенности время-энергия, аналогичное соотношениям неопределенности координата-импульс, а именно

$$\Delta t \cdot \Delta E \gtrsim \hbar. \qquad (33)$$

Однако физическая интерпретация этого соотношения иная. В соотношениях неопределенности координата-импульс переменные положения и импульса входят симметричным образом: как те, так и другие могут быть подвергнуты измерению в данный момент времени t. Статистические распределения результатов измерения, а следовательно, и неопределенности Δq_i, Δp_i определяются значением волновой функции системы в данный момент времени. В противоположность этому энергия и время в соотношении (33) играют совершенно разные роли: энергия E есть динамическая переменная системы, а время t есть параметр. Соотношение (33) *связывает неопределенность ΔE значения, принимаемого этой динамической переменной с интервалом времени Δt, характеристическим для временной эволюции системы.*

Начнем обсуждение этого вопроса с исследования поведения свободной частицы. Плоская монохроматическая волна $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}$ представляет частицу со строго заданным импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и энергией $\hbar\omega$. С помощью суперпозиции волн можно получить волновой пакет типа, представленного в уравнении (II.11). Для упрощения рассуждений рассмотрим волновой пакет в одном измерении и вообразим себе некоторый цуг волн, подобный прямоугольному сигналу, изображенному на рис. 17. Пусть Δx обозначает его длину, а v — групповую скорость. Пакет перемещается со скоростью v вдоль оси x, однако момент прохождения таким пакетом заданной точки на оси x не может быть указан точно: неопределенность в определении этого момента оказывается порядка $\Delta t \approx \Delta x/v$. Кроме того, мы видели, что указанный волновой пакет характеризуется также размазанностью в пространстве импульсов, отчего возникает неопределенность ΔE в значении энергии частицы

$$\Delta E \approx \frac{\partial E}{\partial p} \Delta p = v \cdot \Delta p.$$

Из этих двух приближенных равенств находим, что

$$\Delta t \cdot \Delta E \approx \Delta x \cdot \Delta p$$

и, применяя соотношение неопределенности координата-импульс, получаем неравенство (33), которое ограничивает снизу величину произведения ширины энергетического спектра частицы ΔE и неточности Δt измерения момента прохождения частицей некоторой точки на оси.

Подобный подход легко распространяется на случай волнового пакета в медленно меняющемся поле, но оказывается несостоятельным в более общих случаях. Чтобы получить соотношение типа (33), надо, вообще говоря, учитывать временну́ю зависимость волновой функции.

Наиболее простым является случай системы, обладающей вполне определенным значением энергии. Мы знаем (см. гл. II, § 16), что волновая функция квантовой системы с заданной энергией $E = \hbar\omega$ имеет характерную зависимость от времени $e^{-i\omega t}$. Рассмотрим в качестве примера частицу, помещенную в некоторое силовое поле. Если квантовое состояние характеризуется определенным значением энергии $E = \hbar\omega$, то волновая функция запишется в виде $\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r}) e^{-i\omega t}$. Отсюда следует, что распределение положений этой частицы $P(\boldsymbol{r}) = |\psi(\boldsymbol{r})|^2$ не зависит от времени. Легко видеть, что распределение по импульсам также обладает этим свойством. Следовательно, результат измерения положения или импульса не зависит от момента времени, когда производится измерение. Коротко это выражают, говоря, что физические свойства системы не зависят от времени или, что система находится в *стационарном состоянии.*

Предположим теперь, что квантовое состояние частицы есть суперпозиция двух стационарных состояний с энергиями E_1 и E_2. Волновая функция имеет вид

$$\psi_1(\boldsymbol{r}) e^{-iE_1 t/\hbar} + \psi_2(\boldsymbol{r}) e^{-iE_2 t/\hbar},$$

а распределение

$$P(\boldsymbol{r}, t) = |\psi_1(\boldsymbol{r})|^2 + |\psi_2(\boldsymbol{r})|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\psi_1^*\psi_2 e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar}$$

осциллирует между двумя крайними значениями $(|\psi_1| - |\psi_2|)^2$ и $(|\psi_1| + |\psi_2|)^2$ с периодом $\tau = \dfrac{h}{|E_1 - E_2|}$. Распределение по импульсам имеет то же свойство.

Таким образом, время τ является характеристическим для эволюции физических свойств системы. Результаты измерений, точнее статистическое распределение результатов измерений, проведенных в два различных момента времени t_1 и t_2, будут практически одинаковыми, если разность $\Delta t = |t_1 - t_2|$ мала по сравнению с τ. Иными словами, чтобы свойства системы заметно изменились за интервал времени Δt, необходимо, чтобы произведение Δt и неопределенности в значении энергии $\Delta E = |E_1 - E_2|$ было по крайней мере равно величине порядка $\hbar$: $\Delta t \cdot \Delta E \gtrsim \hbar$. Выраженный в такой форме этот результат остается справедливым, когда состояние системы есть произвольная суперпозиция произвольного числа стационарных состояний.

Следовательно, он имеет общее значение. Строгое доказательство будет дано позднее (§ VIII. 13).

Важным приложением соотношения (33) является соотношение *среднее время жизни — ширина* для радиоактивных и возбужденных систем (радиоактивные ядра, возбужденные состояния атомов, нестабильные элементарные частицы и т. д.). Такие системы не являются стационарными и не обладают определенным значением энергии; они характеризуются спектром энергий с некоторой шириной ΔE. Среднее время жизни играет здесь роль характеристического интервала времени, рассмотренного выше. Чтобы заметить существенные изменения физических свойств системы, необходимо ждать указанный промежуток времени. Поэтому

$$\tau \cdot \Delta E \approx \hbar.$$

Другое следствие неравенства (33) относится к измерению энергии как таковому. Точность ΔE измерения энергии связана со временем Δt, необходимым для измерения, соотношением (33). Так, можно измерять, например, энергию возбуждения первого возбужденного уровня атома водорода, бомбардируя атомы водорода пучком моноэнергетических электронов и измеряя энергию, теряемую электронами при соответствующих неупругих столкновениях. Время измерения здесь по крайней мере равно времени столкновения, т. е. времени Δt прохождения пакета волн, представляющего электрон, через область нахождения атома водорода; ошибка измерения по крайней мере равна неопределенности ΔE в энергии электронов падающего пучка; легко видеть, что $\Delta t \cdot \Delta E \gtrsim \hbar$.

§ 11. Соотношения неопределенности для фотонов

Соотношения неопределенности для систем материальных частиц следуют из двойственности физических проявлений этих частиц как волн и как корпускул. По той же причине соотношения неопределенности должны иметь место для фотонов. Однако при выводе этих последних соотношений следует учитывать, что число фотонов, содержащихся в физической системе, обычно не является хорошо определенной величиной и, строго говоря, эволюцию фотона во времени можно рассматривать только, если он свободен от всяких взаимодействий.

При этих ограничениях можно представлять свободный фотон как волновой пакет, составленный из плоских монохроматических волн, распространяющихся со скоростью света[6]).

---

[6]) Чтобы упростить изложение, мы пренебрегаем явлением поляризации света. Для учета его следует приписать фотону внутреннюю степень свободы.

Освещая экран, снабженный диафрагмой, способной открываться на время Δt, можно получить проходящий световой сигнал, который в предельном случае будет содержать только один квант света. Этот фотон может быть представлен волновым пакетом, ширина которого в направлениях трех осей координат $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ будет зависеть от размеров диафрагмы и промежутка времени Δt. Такой волновой пакет является некоторой суперпозицией монохроматических волн и имеет все свойства пакетов, рассмотренных выше. Составляющие импульса и энергия пакета отличны от нуля в некоторых конечных областях с размерами Δp_x, Δp_y, Δp_z и ΔE. Все эти величины удовлетворяют соотношениям:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim \hbar, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \gtrsim \hbar, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \gtrsim \hbar, \quad \Delta t \cdot \Delta E \gtrsim \hbar.$$

Эти неравенства позволяют сделать некоторые выводы относительно механизма взаимодействия фотона с веществом. Например, в процессе поглощения фотона атомом (фотоэлектрический эффект) произведение неопределенности ΔE величины энергии, передаваемой атому, и неопределенности Δt момента передачи этой энергии по порядку величины в лучшем случае равно $\hbar$. Если же атом, находящийся в возбужденном состоянии, испускает фотон, то момент перехода характеризуется неопределенностью, равной примерно среднему времени жизни этого возбужденного состояния. Фотон представляется волновым пакетом пространственной протяженности $c\tau$ и, следовательно, дисперсия энергии ΔE должна быть такова, что $\tau \cdot \Delta E \approx \hbar$. Этот результат хорошо подтверждается на опыте. Его можно было бы получить, исходя из соотношения неопределенности среднее время жизни-ширина, обсуждавшегося выше, и заметив, что, согласно закону сохранения энергии дисперсия энергии испущенного фотона (конечное состояние) должна быть равна дисперсии энергии возбужденного атома (начальное состояние).

Раздел III. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И МЕХАНИЗМ ИЗМЕРЕНИЯ

§ 12. Неконтролируемое возмущение в процессе измерения

Ниже мы сосредоточим внимание на соотношениях неопределенности типа координата-импульс. Отклонения Δx, Δp, входящие в эти соотношения, относятся к измерениям, осуществленным при выполнении условий, которые были указаны выше при определении квантовых вероятностей. Их не следует смешивать с обычными ошибками измерений, источником которых является несовершенство самого измерительного устройства, не позволяющее фиксировать измеряемые величины с идеальной