Освещая экран, снабженный диафрагмой, способной открываться на время Δt, можно получить проходящий световой сигнал, который в предельном случае будет содержать только один квант света. Этот фотон может быть представлен волновым пакетом, ширина которого в направлениях трех осей координат $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ будет зависеть от размеров диафрагмы и промежутка времени Δt. Такой волновой пакет является некоторой суперпозицией монохроматических волн и имеет все свойства пакетов, рассмотренных выше. Составляющие импульса и энергия пакета отличны от нуля в некоторых конечных областях с размерами Δp_x, Δp_y, Δp_z и ΔE. Все эти величины удовлетворяют соотношениям:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim \hbar, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \gtrsim \hbar, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \gtrsim \hbar, \quad \Delta t \cdot \Delta E \gtrsim \hbar.$$

Эти неравенства позволяют сделать некоторые выводы относительно механизма взаимодействия фотона с веществом. Например, в процессе поглощения фотона атомом (фотоэлектрический эффект) произведение неопределенности ΔE величины энергии, передаваемой атому, и неопределенности Δt момента передачи этой энергии по порядку величины в лучшем случае равно $\hbar$. Если же атом, находящийся в возбужденном состоянии, испускает фотон, то момент перехода характеризуется неопределенностью, равной примерно среднему времени жизни этого возбужденного состояния. Фотон представляется волновым пакетом пространственной протяженности $c\tau$ и, следовательно, дисперсия энергии ΔE должна быть такова, что $\tau \cdot \Delta E \approx \hbar$. Этот результат хорошо подтверждается на опыте. Его можно было бы получить, исходя из соотношения неопределенности среднее время жизни-ширина, обсуждавшегося выше, и заметив, что, согласно закону сохранения энергии дисперсия энергии испущенного фотона (конечное состояние) должна быть равна дисперсии энергии возбужденного атома (начальное состояние).

Раздел III. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И МЕХАНИЗМ ИЗМЕРЕНИЯ

§ 12. Неконтролируемое возмущение в процессе измерения

Ниже мы сосредоточим внимание на соотношениях неопределенности типа координата-импульс. Отклонения Δx, Δp, входящие в эти соотношения, относятся к измерениям, осуществленным при выполнении условий, которые были указаны выше при определении квантовых вероятностей. Их не следует смешивать с обычными ошибками измерений, источником которых является несовершенство самого измерительного устройства, не позволяющее фиксировать измеряемые величины с идеальной точностью. Во всех предшествующих рассуждениях мы пренебрегали ошибками этого рода.

Рассмотрим тщательней, что представляет собой сама операция измерения, если принять сформулированную выше статистическую интерпретацию. Пусть мы имеем дело, например, с измерением координат, определяющих положение частицы квантовой системы, динамическое состояние которой представляется волновой функцией Ψ (в дальнейшем для краткости мы будем говорить, что система находится в состоянии Ψ). Допустим, что мы обладаем *идеально точным* измерительным прибором. Невозможность точно предсказать показания этого прибора не связана с его несовершенством. Дело в том, что состояние Ψ в общем случае не соответствует какому-либо точному значению x; это суперпозиция динамических состояний, каждое из которых соответствует своему значению x. Непосредственно после того как измерение выполнено, мы можем утверждать, что система находится в динамическом состоянии, в котором координата x, имеет точное значение x', указанное прибором. Но такое состояние, очевидно, уже не может быть представлено волновой функцией Ψ, следовательно, *вмешательство измерительного прибора изменило динамическое состояние измеряемой системы. Более того, возмущение системы в процессе измерения оказывается в известной мере неконтролируемым.* Это надо понимать в том смысле, что мы не можем точно предсказать, каким же будет состояние системы после измерения — мы знаем только вероятности того, что система находится в некоторых динамических состояниях, соответствующих тем или иным значениям x' координаты x.

В том, что измеряемая система в процессе измерения испытывает некоторое возмущение, нет ничего удивительного. Ведь сам процесс измерения предполагает взаимодействие системы с измерительным прибором, при котором последний претерпевает некоторое изменение своего состояния. Это изменение состояния прибора играет решающую роль, так как именно оно выражает реакцию прибора, позволяющую зафиксировать определенное значение измеряемой величины. Естественно, что и измеряемая система в процессе измерения изменит свое состояние.

В случае макроскопических явлений всегда можно добиться, чтобы возмущающее действие измерительного прибора на систему было пренебрежимо мало или могло быть учтено с достаточной степенью точности. Поясним это на примере. Можно установить положение макроскопического объекта, фиксируя его образ на фотографической пластинке с помощью какой-либо оптической системы; динамическое состояние объекта в процессе такого измерения неизбежно изменяется, так как он подвергается воздействию света (давление излучения). В классическом приближении, когда падающий свет можно рассматривать как непрерывную волну (большое число присутствующих фотонов), изменение состояния объекта может быть в принципе точно вычислено. При условии, что мы располагаем достаточно чувствительной пластинкой, можно уменьшить освещенность объекта настолько, что возмущающее действие световой волны станет пренебрежимо малым.

Эти рассуждения, очевидно, справедливы только в рамках классического приближения. На самом деле действие измерительного инструмента на объект не может быть сделано сколь угодно малым, так как их взаимодействие осуществляется дискретными квантами. Угол отклонения кванта света объектом точно не определен, другими словами, передача импульса в процессе столкновения кванта с объектом должна рассматриваться как неконтролируемая величина. Таким образом, измерение положения в пространстве сопровождается неконтролируемым изменением импульса объекта (полуколичественный анализ этого эффекта будет дан в следующем параграфе). Поскольку в макроскопических масштабах все изменения величин такого рода пренебрежимо малы, классическая теория без обсуждения принимает, что все динамические переменные физической системы могут быть одновременно измерены с произвольно малой ошибкой, и определяет динамическое состояние системы в любой момент точным заданием всех этих переменных в этот момент времени. На микроскопическом уровне этот постулат не имеет более экспериментального обоснования и должен быть отброшен. *Квантовая теория принимает, что непредсказуемое и неконтролируемое возмущение, испытываемое физической системой в процессе измерения, всегда конечно и таково, что выполняются соотношения неопределенности Гейзенберга.* Например, при измерении координаты x, как мы видели выше, система переходит из состояния Ψ в состояние Ψ'. Уже было сказано, что состояние Ψ в общем случае не соответствует ни точному значению x, ни точному значению p, а дает лишь распределение вероятности $P(x)$ найти то или иное значение x, если мы осуществим точное измерение этой величины, и распределение вероятности $\Pi(p)$ найти то или иное значение p, если мы осуществим точное измерение p. Новое состояние Ψ' соответствует новым распределениям $P'(x)$ и $\Pi'(p)$, при этом отклонения $\Delta' x$, $\Delta' p$ в этих распределениях обязательно удовлетворяют соотношению $\Delta' x \cdot \Delta' p \geqslant \hbar/2$. Если, в частности, измерение x идеально точно ($\Delta' x = 0$), то величина $\Delta' p$ должна быть бесконечно большой. Этот результат часто выражают словами, что нельзя уменьшить неопределенность в переменной положения

x, не увеличивая соответствующим образом неопределенность в переменной импульса p, и наоборот.

Рассмотрим несколько примеров возможных измерений и покажем, что возмущение, испытываемое измеряемой системой, всегда именно таково, что выполняются соотношения неопределенности Гейзенберга [7]).

§ 13. Измерения положения в пространстве

а) *Использование диафрагмы.* Рассмотрим параллельный пучок моноэнергетических электронов. Ставится задача определить положение электронов вдоль оси Ox, перпендикулярной направлению Oz пучка электронов. С этой целью на пути пучка ставится экран с отверстием (рис. 18). Если d есть ширина отверстия, то положение электрона, проходящего диафрагму, определяется с точностью $\Delta x = d$. Однако этот электрон представляется волной де Бройля с длиной $\lambda = \hbar/p$; прохождение диафрагмы сопровождается явлением дифракции, так что пучок «раскрывается» на угол α порядка

$$\sin\alpha \approx \lambda/d = \hbar/p \cdot \Delta x.$$

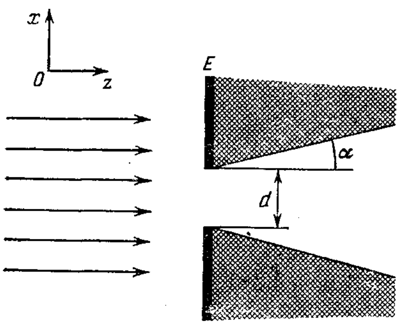

Рис. 18. Измерение положения с помощью диафрагмы.

Отсюда следует, что возникает составляющая $\Delta p_x = p\sin\alpha$ вдоль оси x и выполняется соотношение $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar$.

Импульс электрона p_x вдоль оси x, по предположению точно известный до операции измерения ($p_x = 0$), неконтролируемо изменяется на величину порядка $\hbar/\Delta x$ в процессе измерения (т. е. при прохождении диафрагмы).

Важно убедиться здесь, что импульс, передаваемый электроном диафрагме в процессе измерения, не может быть определен

[7]) Именно это имеет место во всех экспериментальных устройствах, позволяющих обнаружить «траекторию» частицы, например, в фотографических пластинках или камерах Вильсона для наблюдения заряженных частиц. Так, в камере Вильсона частица ионизирует на своем пути некоторое число атомов, и возникающие ионы служат центрами конденсации, вокруг которых образуются видимые капельки. Положение частицы определяется с неопределенностью Δq, по крайней мере равной радиусу ионизованного атома (практически она значительно больше). Но в процессе взаимодействия с измерительным устройством, т. е. в процессе ионизации атома, частица испытывает непредсказуемую и неконтролируемую передачу импульса Δp порядка $\hbar/\Delta q$. Поэтому «траектория» частицы может наблюдаться только с точностью $\Delta q \cdot \Delta p \approx \hbar$.

с точностью, превышающей $\hbar/\Delta x$, иначе наши рассуждения не будут справедливы. Чтобы осуществить операцию измерения положения, диафрагма должна оставаться неподвижной, и ее положение (вдоль Ox) должно быть известно с точностью до δx, причем δx должно быть значительно меньше ширины отверстия: $\delta x \ll \Delta x$. Однако диафрагма, подобно электрону, также является квантовым объектом, ее импульс не может быть определен с точностью, превышающей δp, так что мы имеем

$$\delta p \approx \hbar/\delta x \gg \hbar/\Delta x.$$

Диафрагма может практически оставаться неподвижной в процессе измерения, если она достаточно тяжела; это ограничение не мешает самой операции измерения. Однако невозможно определить изменение импульса диафрагмы с точностью, превосходящей δp и, следовательно, $\hbar/\Delta x$.

Это рассуждение проясняет еще одно важное обстоятельство. Необходимо принять, что *измерительный прибор сам является квантовым объектом и тоже удовлетворяет соотношениям неопределенности*. Это предполагает, что *соотношения неопределенности имеют универсальный характер*. В противном случае физическая интерпретация квантовой теории должна была бы быть подвергнута глубокой ревизии.

б) *Использование микроскопа*. Применение диафрагмы является, конечно, наиболее простым способом измерения положения объекта. Другой, менее прямой, но столь же успешный метод состоит в освещении объекта и наблюдении его изображения в микроскоп. Рассмотрим поэтому определение положения x электрона при наблюдении в микроскоп (рис. 19). Точность измерения ограничивается тем, что изображение каждой точки есть на самом деле дифракционное пятно конечных размеров. Если при оценке точности измерения Δx исходить из размеров этого пятна, то $\Delta x \approx \lambda/\sin\theta$, где λ есть длина волны используемого света, а θ — половина угла раствора пучка, рассеянного электроном и сфокусированного в микроскопе. Однако рассеяние света происходит отдельными квантами и сопровождается частично неконтролируемой передачей импульса (эффект Комптона). Этот эффект минимален, когда рассеиваемый свет содержит только один фотон; импульс последнего имеет точно определенную величину $p = h/\lambda$, но направление

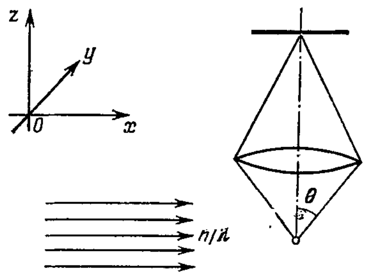

Рис. 19. Измерение положения с помощью микроскопа.

распространения определяется только с точностью до угла θ. Импульс, передаваемый электрону, характеризуется поэтому неопределенностью $\Delta p \approx h \sin\theta/\lambda$. Чем точнее измерение положения, тем больше этот эффект, и мы по-прежнему имеем $\Delta x \cdot \Delta p \approx h$.

Можно возразить, что точность измерения x определяется не размерами дифракционного пятна, а точностью измерения центра этого пятна. Эта точность тем более велика, чем больше число N фотонов, принимающих участие в образовании пятна. По законам математической статистики ошибка при вычислении x должна быть в $\sqrt{N}$ раз меньше, чем приведенная выше

$$\Delta x \approx \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\lambda}{\sin\theta}.$$

Однако если передача импульса каждым фотоном характеризуется неопределенностью $(h \sin\theta/\lambda)$, то неопределенность в импульсе, передаваемом N фотонами, будет в $\sqrt{N}$ раз больше (сложение квадратичных ошибок), т. е.

$$\Delta p \approx \sqrt{N} \frac{h}{\lambda} \sin\theta.$$

Следовательно,

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx h.$$

§ 14. Измерения импульса

Аналогичным образом импульс частицы может *a priori* быть измерен с любой наперед заданной точностью, но операция измерения всегда сопровождается возмущением, которое увеличивает неопределенность в знании координаты, измеряющей положение, так что соотношения неопределенности всегда выполнены. Покажем это на двух примерах.

а) *Отклонение в магнитном поле.* Импульс заряженной частицы обычно измеряется по отклонению в постоянном магнитном поле. Количество движения p связано с радиусом кривизны R траектории частицы хорошо известным соотношением

$$p = \frac{e}{c} \mathscr{H} R,$$

где $\mathscr{H}$ — величина магнитного поля, а e — заряд частицы.

Исследуем процесс измерения импульса электрона этим методом. На рис. 20 представлена схема эксперимента. Электрон попадает в поле магнита через диафрагму A и покидает его через диафрагму B после отклонения на 180° (этот угол отклонения выбран для удобства рассуждений). В момент, *непосредственно предшествующий* началу измерения (т. е. непосредственно перед прохождением диафрагмы), направление движения (ось Oy) и координата электрона в этом направлении ($\Delta y = 0$) по предположению точно известны. Эти начальные условия $p_x = p_z = 0$, $y = y_A$ в принципе всегда могут быть реализованы с помощью коллиматора, снабженного обтюратором с достаточно коротким «временем пропускания». Радиус кривизны равен половине расстояния между двумя диафрагмами: если $2d$ и $2d'$ — соответствующие ширины этих диафрагм, то R измеряется с точностью до $d + d'$. Таким образом, импульс электрона известен с точностью до

$$\Delta p = \frac{e}{c} \mathscr{H} (d + d') = \frac{p}{R} (d + d').$$

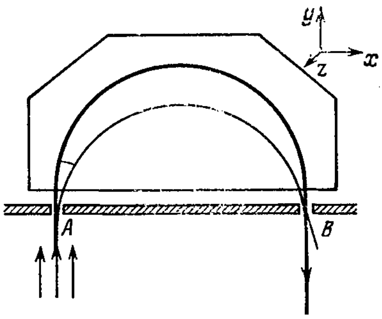

Рис. 20. Измерение импульса методом отклонения в магнитном поле.

Измеряемой в опыте величиной является составляющая импульса в направлении оси Oy. Покажем, что в результате измерения координата электрона y будет характеризоваться неопределенностью Δy, причем $\Delta y \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$. Квантовым эффектом, существенным в этом опыте, является дифракция электронной волны при прохождении диафрагмы A (читатель без труда убедится в том, что дифракция на диафрагме B роли не играет). Если бы указанного эффекта не было, то импульс электрона на входе в область действия поля был бы строго направлен по Oy, далее электрон описывал бы полукруг, и время движения от A к B, равное $\pi mc/e\mathscr{H}$, не зависело бы от величины p. Квантовый эффект дифракции приводит к тому, что угол между направлением импульса на входе и осью Oy характеризуется неопределенностью $\alpha \approx \lambda/d = h/pd$; траектория электрона (в приближении геометрической оптики) есть дуга окружности, определяемая с точностью до 2α; момент прихода в B характеризуется неопределенностью $\Delta t = 2\alpha mc/e\mathscr{H}$, а неопределенность Δy в p/m раз больше, следовательно

$$\Delta y \approx 2\alpha \frac{pc}{e\mathscr{H}} \approx 2h \frac{c}{e\mathscr{H}d}.$$

Отсюда получаем

$$\Delta y \cdot \Delta p \approx 2h \left(1 + \frac{d'}{d}\right).$$

б) *Столкновение с фотоном.* Следующий метод измерения импульса основан на изучении процесса столкновения рассматризаемой частицы с другой частицей, например, с фотоном, начальный импульс которого известен точно; измеряется импульс, передаваемый при столкновении второй частице. Рассмотрим электрон из предшествующей задачи с начальными данными $p_x = p_z = 0$, $y = y_A$. Для определения импульса электрона p_y будем облучать его идеально монохроматическим светом частоты ν, распространяющимся параллельно оси y. Один из световых фотонов испытывает комптоновское столкновение и измеряется его конечный импульс. Чтобы упростить рассуждения, предположим, что конечный импульс фотона также параллелен оси y, но направлен в противоположную сторону (рис. 21). Пусть ν' — частота фотона после столкновения; теория комптоновского рассеяния позволяет выразить начальный p и конечный p' импульсы электрона через частоты ν и ν'. Предположим, что реализуются условия нерелятивистского приближения ($p,\ p' \ll mc$ и $\nu,\ \nu' \ll mc^2/h$). В результате вычислений находим

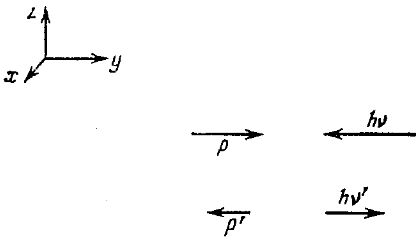

Рис. 21. Измерение импульса электрона при комптоновском столкновении с фотоном. Схема столкновения

$$p = mc\,\frac{\nu' - \nu}{\nu' + \nu} + \frac{h}{2c}(\nu' + \nu), \quad p' = mc\,\frac{\nu' - \nu}{\nu' + \nu} - \frac{h}{2c}(\nu' + \nu),$$

причем точность определения этих величин связана с точностью определения ν' соотношением

$$\Delta p \approx \Delta p' \approx mc\,\frac{\Delta \nu'}{\nu' + \nu}.$$

Положение y электрона после измерения может быть вычислено, исходя из того, что в начальный момент $y = y_A$, скорость электрона до столкновения равна p/m, а после столкновения p'/m. Если положение и импульс рассеянного фотона можно было бы измерить одновременно с большой точностью, то был бы строго определен и момент столкновения, а тогда неопределенности в значениях p и y могли бы быть сделаны одновременно сколь угодно малыми. Читатель проверит это без труда. Однако измерение ν' есть измерение частоты; чем точнее это измерение, тем больше неопределенность в определении момента прохождения фотоном какой-либо точки, в частности в определении момента столкновения: $\Delta\nu' \cdot \Delta t \gtrsim 1$. В то же время неопределенность Δy в положении электрона после столкновения равна по меньшей мере произведению Δt

на изменение скорости, т. е.

$$\Delta y \gtrsim \frac{|p - p'|}{m\,\Delta\nu'} = \frac{h}{mc}\,\frac{\nu + \nu'}{\Delta\nu'},$$

что дает $\Delta y \cdot \Delta p$ и $\Delta y \cdot \Delta p' \gtrsim \hbar$.

В этой измерительной операции, как и в предшествующей, измеряемая величина p_y сама меняется в процессе измерения. *Это изменение не следует смешивать с непредсказуемым и неконтролируемым возмущением, испытываемым системой при измерении.* Действительно, указанное изменение известно точно, во всяком случае значения p и p' величины p_y до и после столкновения известны с одинаковой точностью, которая может быть сделана сколь угодно большой. Напротив, ввиду невозможности предсказать и контролировать возмущение, испытываемое частицей при осуществлении измерения (неопределенность в определении момента передачи импульса и энергии), величина y после столкновения известна только с неопределенностью Δy, причем эта неопределенность тем больше, чем точнее измерение p.

Подчеркнем еще раз универсальность характера соотношений неопределенности. Действительно, что бы произошло, если величина кванта действия для фотонов была бы равна некоторой величине $\hbar'$, значительно меньшей $\hbar$? Все наши рассуждения относительно измерения типа б) можно было бы повторить, заменяя всюду $\hbar$ на $\hbar'$; это привело бы нас к соотношению $\Delta y \cdot \Delta p' \approx \hbar' \ll \hbar$. Соотношения неопределенности оказались бы нарушенными и вся развиваемая нами статистическая интерпретация теории пришла бы в противоречие с опытом.

Оба метода измерения импульса, обсуждавшиеся выше, требуют некоторого временно́го интервала. Этот интервал может быть вообще говоря уменьшен (при увеличении поля $\mathscr{H}$ в первом случае, при увеличении частоты ν во втором; см. задачу 7) без изменения точности измерения p_y. Но как бы то ни было, вероятности, определенные в §§ 2, 5, вычисляются с помощью волновой функции, заданной в момент времени t. Поскольку само измерение не мгновенно, следует точно определить этот момент времени: *t есть момент начала измерения*, так что распределение вероятностей, данное в § 2 (уравнение (6)) относится к импульсу p_y, т. е. к импульсу до измерения.

Раздел IV. ОПИСАНИЕ ЯВЛЕНИЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ. ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТЬ И ПРИЧИННОСТЬ

§ 15. Проблемы статистической интерпретации

Несомненно, что представление состояния квантовой системы волновой функцией имеет абстрактный характер, а статистическая интерпретация теории с трудом поддается интуитивному