

на изменение скорости, т. е.

$$\Delta y \gtrsim \frac{|p - p'|}{m \Delta v'} = \frac{h}{mc} \frac{v + v'}{\Delta v'},$$

что дает $\Delta y \cdot \Delta p$ и $\Delta y \cdot \Delta p' \gtrsim h$.

В этой измерительной операции, как и в предшествующей, измеряемая величина p_y сама меняется в процессе измерения. *Это изменение не следует смешивать с непредсказуемым и неконтролируемым возмущением, испытываемым системой при измерении.* Действительно, указанное изменение известно точно, во всяком случае значения p и p' величины p_y до и после столкновения известны с одинаковой точностью, которая может быть сделана сколь угодно большой. Напротив, ввиду невозможности предсказать и контролировать возмущение, испытываемое частицей при осуществлении измерения (неопределенность в определении момента передачи импульса и энергии), величина y после столкновения известна только с неопределенностью Δy , причем эта неопределенность тем больше, чем точнее измерение p .

Подчеркнем еще раз универсальность характера соотношений неопределенности. Действительно, что бы произошло, если величина кванта действия для фотонов была бы равна некоторой величине \hbar' , значительно меньшей \hbar ? Все наши рассуждения относительно измерения типа б) можно было бы повторить, заменяя всюду \hbar на \hbar' ; это привело бы нас к соотношению $\Delta y \cdot \Delta p' \approx \hbar' \ll \hbar$. Соотношения неопределенности оказались бы нарушенными и вся развиваемая нами статистическая интерпретация теории пришла бы в противоречие с опытом.

Оба метода измерения импульса, обсуждавшиеся выше, требуют некоторого временного интервала. Этот интервал может быть вообще говоря уменьшен (при увеличении поля \mathcal{H} в первом случае, при увеличении частоты ν во втором; см. задачу 7) без изменения точности измерения p_y . Но как бы то ни было, вероятности, определенные в §§ 2, 5, вычисляются с помощью волновой функции, заданной в момент времени t . Поскольку само измерение не мгновенно, следует точно определить этот момент времени: *t есть момент начала измерения*, так что распределение вероятностей, данное в § 2 (уравнение (6)) относится к импульсу p_y , т. е. к импульсу до измерения.

Раздел IV. ОПИСАНИЕ ЯВЛЕНИЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ. ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТЬ И ПРИЧИННОСТЬ

§ 15. Проблемы статистической интерпретации

Несомненно, что представление состояния квантовой системы волновой функцией имеет абстрактный характер, а статистическая интерпретация теории с трудом поддается интуитивному

восприятию. Однако попытки описания микроскопических явлений на основе более конкретных и интуитивно ясных моделей неизбежно сталкиваются с рядом противоречий.

Рассмотрим, например, атом гелия. Чтобы не усложнять картины, допустим, что ядро атома неподвижно и масса его бесконечно велика. Это значит, что мы трактуем атом как систему, состоящую из двух электронов с волновой функцией $\Psi(r_1, r_2; t)$. Проще всего представить себе две корпускулы (два электрона), движущиеся более или менее сложным образом вокруг массивного ядра. Однако при этом подразумевается, что каждый электрон следует вполне определенной траектории, в то время как волновая функция Ψ позволяет нам найти только статистическое распределение координат при измерении положения и статистическое распределение составляющих импульса при измерении импульса. Поскольку мы допустили, что динамическое состояние атома полностью определяется волновой функцией Ψ , неизбежен вывод, что корпускулярная модель атома частично неверна. Можно, наоборот, мыслить себе два электрона как непрерывное распределение электричества в пространстве, окружающем ядро, или, лучше, как непрерывную волну, «заряженную» электричеством. Но эта картина также не свободна от трудностей. Во-первых, волна Ψ определена в конфигурационном, а не в обычном трехмерном пространстве, поэтому она не может быть отождествлена с той конкретной волной, о которой мы говорим. Точное определение этой последней есть задача, до сих пор не получившая своего решения. Во-вторых, образ непрерывной волны не может быть согласован с некоторыми явлениями, такими как ионизация атома, где проявляется существование отдельных и в какой-то мере локализованных корпускул.

Разумеется ничто не доказывает, что согласованное и вполне предметное представление микроскопических явлений не может быть сформулировано. Тем не менее, до сих пор никому не удалось этого сделать. Впрочем, следует отдавать себе отчет в том, что с точки зрения логики более или менее абстрактные концепции физической теории вовсе не обязаны выражаться на конкретном языке. Вся наша интуиция, все наше чувство конкретного основываются на каждодневном опыте, и понятия и образы, используемые для конкретного описания явления, каким бы оно ни было, также взяты из этого опыта. Нет никаких оснований думать, что язык таких понятий может быть без противоречий использован для описания явлений микроскопической физики, столь удаленных от повседневного опыта. Эти явления дают только один пример подобных трудностей. Аналогичным образом некоторые результаты теории относительности также

противоречат нашей интуиции⁸⁾, таковы, например, явления сокращения длин и растяжения времени, когда относительная скорость двух систем отсчета близка к скорости света c . Не удивительно поэтому, что конкретные образы микроскопических явлений при их последовательном развитии приводят к противоречиям и парадоксам.

Полезно в этой связи отметить аналогию между ролью постоянной Планка h в квантовой теории и ролью постоянной c в теории относительности. Тот факт, что скорость света c конечна, приводит к пересмотру понятия одновременности и ограничивает поэтому область применимости механики Ньютона. Аналогично тот факт, что постоянная h конечна (а не равна нулю), приводит к пересмотру понятия одновременных измерений и ограничивает область применимости классической теории. Конкретные образы из нашего повседневного опыта относятся к миру, где c кажется бесконечной, а h кажется равной нулю, поэтому они не могут быть перенесены как таковые в область, где то или иное из этих приближений теряет силу.

Таким образом, отсутствие в квантовой теории наглядного представления явлений ни в коей мере не может рассматриваться как недостаток теории. Однако квантовая теория может быть подвергнута критике с других позиций.

Вопрос в том, отвечает ли описание явлений в квантовой теории тем требованиям, которые мы вправе предъявить ко вполне удовлетворительной теории? Первое требование к теории, конечно, состоит в том, чтобы ее предсказания согласовывались с экспериментальными наблюдениями; совершенно очевидно, что квантовая теория удовлетворяет этому требованию, во всяком случае в области атомной и молекулярной физики. Но физическая теория не может претендовать на *полноту*, если она ограничивается только предсказаниями результатов того или иного эксперимента. В начале всякой научной теории лежит фундаментальный постулат, что природа обладает объективной реальностью, не зависящей от наших чувственных восприятий или методов исследования; целью всякой физической теории является адекватное отражение этой объективной реальности.

Однако все выводы квантовой теории всегда выражаются в форме: «выполняя то или иное наблюдение, мы получим тот или иной результат». Законно поставить вопрос, дает ли квантовая теория полное описание объективной реальности?

⁸⁾ Примеры противоречий между человеческой интуицией и открытиями физики гораздо старше теории относительности (вспомним галилеевское «а все-таки она вертится» и т. д.).

Вопрос этот тем более обоснован, что предсказания теории имеют статистическую природу. В классической теории к статистическим методам прибегают в тех случаях, когда информация, которой мы обладаем относительно изучаемых систем, является неполной. Концепции классической статистической теории не позволяют дать полное описание объективной реальности, они позволяют только получить некоторые средние величины и некоторые результаты, касающиеся исследуемых физических систем, несмотря на недостаток сведений относительно этих систем. Эти результаты, строго говоря, неприменимы к отдельной системе, они относятся к ансамблю из очень большого числа \mathcal{N} одинаковых и независимых систем. Аналогичным образом квантовая теория в общем случае не дает с достоверностью результат того или иного измерения в отдельной системе, она дает статистическое распределение результатов, получаемых при повторении того же самого измерения на совокупности очень большого числа \mathcal{N} систем, представляемых одной волновой функцией.

Напрашивается вывод, что квантовая теория дает корректное описание статистических ансамблей систем из микроскопических объектов, но не может претендовать на полное описание каждой системы, взятой в отдельности. Согласно этой точки зрения, знания волновой функции недостаточно для полного описания динамического состояния отдельной физической системы. Для этого потребовалось бы некоторое число дополнительных данных, которые мы не можем получить ввиду несовершенства наших средств наблюдения. Другими словами, динамическое состояние физической системы должно определяться в каждый момент времени некоторым числом *скрытых параметров*, эволюция которых во времени определяется строгими законами. Невозможность предсказать с достоверностью результаты данного измерения обусловлена невозможностью узнать точные значения этих скрытых параметров. Волновая функция, следовательно, не представляет объективное состояние изучаемой системы, это скорее математический объект, содержащий всю ту неполную информацию, которую мы имеем относительно системы.

Хотя это мнение вполне можно защищать, в настоящее время наибольшее распространение имеет точка зрения, согласно которой квантовая теория дает полное описание явлений природы (см. сноску на стр. 57). При этом основываются на анализе, которым мы обязаны Бору (1927), особых условий выполнения наблюдений в микромире, а также на общем принципе, вытекающем из этого анализа, — принципе дополнительности.

§ 16. Описание микроскопических явлений и дополнительность

Всякое описание природных явлений — при полном признании их объективной реальности — неизбежно на некотором этапе включает рассмотрение результатов наблюдений этих явлений. Между тем, и в этом состоит первое замечание Бора, как бы ни было далеко от классической механики изучаемое явление, для его описания мы вынуждены использовать классическую терминологию. Действительно, дать отчет о некотором опыте, значит описать недвусмысленно условия эксперимента и результаты наблюдений, указав, например, что «данная стрелка в такой-то момент времени остановилась у такого-то деления шкалы». Особенно важно отметить необходимость использования точного языка без каких-либо элементов неуверенности со стороны наблюдателя. Это совершенно необходимо, так как опыт должен быть воспроизводим, а его течение и результаты должны оставаться независимыми от наблюдателя.

Однако на микроскопическом уровне мы не можем провести строгого различия между природным явлением и инструментом, служащим для его наблюдения, различия, которое подразумевает обычное представление о наблюдении. Описывать объект и прибор как различные сущности можно только в том предельном случае, когда величину кванта действия h можно считать бесконечно малой. Это ограничивает возможности описания и анализа изучаемого явления на классическом языке. Любая попытка распространить анализ за эти границы требует модификации измерительной техники и самих условий эксперимента, а это вводит новые возможности взаимодействий между объектами и прибором.

Вследствие этого, *результаты наблюдений, полученные в различных условиях опыта, не могут быть совмещены в единой картине явления.* Они должны рассматриваться как дополняющие друг друга в том смысле, что только вся совокупность различных экспериментов исчерпывает возможность получения информации относительно свойств объектов микроскопической физики.

§ 17. Дополнительные переменные. Совместные переменные

Описание явлений микроскопической физики осуществляется на основе дополнительных элементов, т. е. элементов, дополняющих друг друга при составлении классической картины явления, но определяемых с помощью взаимоисключающих экспериментальных устройств.

Координата x и импульс p образуют пару дополнительных элементов в указанном выше смысле. Точные измерения x и p требуют использования несовместимых измерительных устройств, так что одновременное измерение этих двух величин не может быть осуществлено с точностью превышающей $\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$. Это следует из изложенного в §§ 13 и 14 материала. Взаимоисключающий характер экспериментальных устройств, служащих для измерения x и p , особенно хорошо проявляется в случае измерений с диафрагмой (§ 13, а). Диафрагма, применявшаяся для измерения положения электрона, может быть использована и для измерения импульса: для этого достаточно определить импульс, передаваемый экрану при столкновении с электроном. Но поскольку ансамбль электрон + экран образует неделимую квантовую систему и нет возможности провести строгое различие между составляющими частями, нельзя использовать классический язык и говорить о независимой эволюции электрона (измеряемая система) и экрана (измерительный инструмент), не допуская, что их взаимодействие имеет неконтролируемый характер. Если мы хотим знать x с точностью Δx , то мы не в состоянии контролировать передачу импульса экрану с точностью, превышающей $\hbar/\Delta x$. Если же мы желаем измерить p с точностью δp и снабжаем экран всеми необходимыми приспособлениями для точного измерения передаваемого импульса, то оказывается невозможным контролировать положение экрана с точностью, превышающей $\hbar/\delta p$, что ограничивает наши сведения об x (см. задачу 10).

Говорят, что x и p образуют пару *дополнительных переменных*. Сам принцип дополнительности часто выражают в следующей, более строгой форме:

описание физических свойств микроскопических объектов на классическом языке требует использования пар дополнительных переменных, причем каждый член пары определяется тем точнее, чем менее точно определяется другой.

Эта формулировка подчеркивает главное отличие между квантовой и классической механикой, а именно, тот факт, что все динамические переменные квантовой системы не могут быть одновременно определены с идеальной точностью.

Мы скажем, что две динамические переменные являются *совместными*, если они могут быть одновременно точно определены. В гл. V мы увидим, что в самом общем случае две совместные переменные представляются коммутирующими линейными операторами. Так, координаты частицы x и y являются совместными переменными. Особенно важную роль играют *полные наборы совместных переменных* $a, b, c \dots$; они составлены из попарно совместных переменных и обладают тем свойством, что любая другая переменная, совместная с каждой

переменной набора, является функцией этих переменных $f(a, b, c, \dots)$. Рассмотрим в качестве примера квантовую систему, состоящую из одной частицы. Три переменных положения x, y, z образуют полный набор совместных переменных. Действительно, все три эти переменные могут быть одновременно измерены. Далее, всякая динамическая переменная является некоторой функцией x, y, z и p_x, p_y, p_z , но совместными с x, y, z будут только те переменные, которые не зависят от p_x, p_y, p_z , так как каждая из этих последних величин несовместна с x, y, z соответственно. Таким образом, общий вид динамической переменной, совместной с x, y, z , есть $F(x, y, z)$. Переменные x, y, z образуют полный набор, то же самое можно сказать относительно переменных p_x, p_y, p_z (задание этих трех переменных полностью определяло динамическое состояние системы до измерения в примерах § 14). Точное измерение полного набора совместных переменных системы дает тот *максимум информации* о системе, который вообще можно получить. Это измерение полностью определяет динамическое состояние системы; ему соответствует определенная волновая функция. Мы вернемся к этому вопросу в гл. V (§ 15 и 16).

§ 18. Корпускулярно-волновой дуализм и дополнительность

Если исходить из принципа дополненности, то корпускулярно-волновая двойственность квантовых объектов перестает быть парадоксальной: волновой и корпускулярный аспекты оказываются дополнительными и проявляются во взаимноисключающих экспериментальных условиях. Всякая попытка выявить один из аспектов поведения требует соответствующего экспериментального устройства, которое лишает нас возможности наблюдать другой аспект поведения объекта.

Рассмотрим, например, дифракционный опыт Юнга. Монохроматическое излучение от источника S проходит через экран Y с двумя отверстиями, расстояние между которыми есть d , а затем образует на экране E , отстоящем от Y на расстоянии D , интерференционную картину (рис. 22). Расстояние между полосами равно $\lambda D/d$, где λ — длина волны излучения. В этом опыте

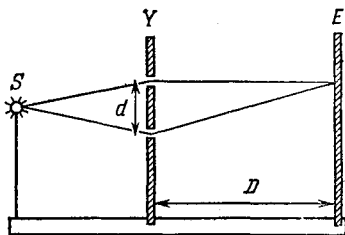


Рис. 22. Дополненность корпускулярного и волнового аспектов явления в опыте Юнга. S — источник, Y — экран Юнга, E — экран детектора. На рисунке S, Y и E твердо фиксированы на общей подставке. Экспериментальное устройство позволяет выявить интерференционную картину, но не позволяет получить какой-либо информации относительно траектории каждого фотона.

источник S и экраны Y и E жестко укреплены на общем основании. Сами полосы можно наблюдать только, если положение (вдоль Ox) экрана Y по отношению к S и E фиксировано с точностью δx , причем $\delta x < \lambda D/d$ (ради простоты предполагаем, что источник S находится на бесконечности). Корпускулярный аспект излучения можно выявить в том случае, если известно, через какое отверстие экрана Y прошла частица. Для этого проще всего измерить импульс, переданный экрану Y при прохождении частицы; он будет отличаться на $\approx pd/D$ в зависимости от того, через какое отверстие прошла частица ($p = h/\lambda$ обозначает импульс частицы). Измерение должно быть выполнено с такой точностью, чтобы $\delta p < hd/\lambda D$. Но чтобы проявились одновременно оба аспекта поведения квантового объекта необходимо, чтобы оба неравенства удовлетворялись одновременно, т. е. $\delta x \cdot \delta p < h$, что невозможно, так как измерительное устройство само является квантовым объектом и удовлетворяет соотношениям неопределенности. Любая попытка выявить корпускулярный аспект поведения излучения приведет к смазыванию интерференционной картины (см. задачу 11).

§ 19. Дополнительность и причинность

Особые условия описания явлений в квантовой теории ограничивают область справедливости принципа причинности и объясняют, почему предсказания теории имеют статистический характер⁹⁾.

Принцип причинности в строгом смысле может применяться только по отношению к изолированным системам. Динамическое состояние такой системы в данный момент представляется ее волновой функцией в этот момент. Существует причинная (или каузальная) связь между волновой функцией $\psi(t_0)$ в данный момент t_0 и волновой функцией $\psi(t)$ в любой последующий момент, и связь эта выражается уравнением Шредингера. Однако если мы стремимся осуществить наблюдение над системой, то не можем пренебречь действием на систему инструмента наблюдения. Это действие, как мы знаем, в определенной мере непредсказуемо и неконтролируемо, ибо мы не можем строго разделить систему и инструмент. Они образуют единую квантовую систему, представляемую волновой функцией $\Psi(t)$, зависящей

⁹⁾ Принцип причинности здесь, конечно, понимается не в философско-методологическом смысле как принцип объективной закономерной взаимосвязи и взаимообусловленности явлений материального мира. Имеется в виду принцип классической однозначной детерминированности явлений (так называемый лапласовский детерминизм). Специфический характер законов движения микрообъектов ведет к расширению и углублению понятия причинности и проявлению статистических или вероятностных закономерностей. См. по этому поводу цитированную на стр. 57 книгу В. А. Фока. (*Прим. перев.*)

от координат как наблюдаемой системы, так и инструмента. Всякое описание системы как таковой с помощью одной только волновой функции $\psi(t)$ оказывается невозможным. Таким образом, вмешательство измерительного аппарата разрушает каузальную связь между состоянием системы до измерения и состоянием системы после измерения. Это объясняет, почему в общем случае мы не можем предсказать достоверно, в каком состоянии окажется система после измерения¹⁰⁾.

Для того чтобы показать, каким образом понятия, используемые при описании явления, оказываются связанными с методом наблюдения, и как это влияет на применение принципа причинности, рассмотрим пример возбужденного атома, который испускает фотон при переходе в основное состояние. Этот пример в то же время явится новой иллюстрацией дополнительности волнового и корпускулярного аспектов поведения квантового объекта.

Предположим, что атом находится в возбужденном состоянии в момент времени $t = 0$; пусть τ — его среднее время жизни, а $h\nu$ — энергия испускаемого фотона. Попытаемся точно определить момент испускания фотона. Для этого полностью окружим атом соответствующими счетчиками; один из этих счетчиков сработает при прохождении фотона. Зная момент прохождения фотоном счетчика, расстояние, отделяющее атом от счетчика, и скорость света c , можно без труда вычислить момент испускания фотона. Однако квантовая теория делает по этому поводу выводы только статистического характера. Состояние системы атом + фотон легко описать, если иметь в виду ситуацию, возникающую по истечении времени $t \gg \tau$: атом почти наверняка находится в основном состоянии, а фотон (в хорошем приближении) — примем это без доказательства — представляется волновым пакетом $\psi(r, t)$, причем зависимость от t и r — расстояния от фотона до атома — с точностью до постоянной выражается в виде

$$\psi(r, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } r > ct, \\ \frac{1}{r} \exp\left[-\left(i\omega + \frac{1}{2\tau}\right)\left(t - \frac{r}{c}\right)\right], & \text{если } r < ct. \end{cases} \quad (34)$$

¹⁰⁾ Статистические предсказания, касающиеся результатов измерения, естественно получаются при исследовании механизма самой измерительной операции, исследовании, в котором измерительный инструмент рассматривается как квантовый объект, а совокупность система + измерительный инструмент изменяется, следуя принципу причинности согласно уравнению Шредингера. Четкое и простое изложение вопроса о механизме измерения дано в книге *F. London et E. Bauer, La Théorie de l'observation en Mécanique Quantique*, Ed. Hermann (Paris, 1939). Более подробный разбор этой проблемы можно найти в книгах: *И. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, «Наука», 1964 г.; Д. Бом, Квантовая теория, «Наука», 1965.*

Вероятность детектировать фотон на расстояние R от атома равна нулю пока $t < R/c$ и равна $\exp[-(t - R/c)/\tau]$ с точностью до постоянной во все последующие моменты времени, откуда и следует хорошо известный экспоненциальный закон распада.

Именно этот закон мы наблюдаем экспериментально на очень большом числе распадов. Однако квантовая теория не способна предсказать время распада каждого из атомов отдельно. Можно сделать вывод, что квантовая теория хорошо описывает распад статистических ансамблей возбужденных атомов, но не описывает полностью отдельное явление распада.

Ответ на это замечание следующий. Понятие времени распада неотделимо от экспериментального устройства, которое его измеряет, и не может рассматриваться как свойство, характеризующее эволюцию атома вне зависимости от этого устройства. Действительно, существуют и другие экспериментальные устройства, «дополнительные» к рассмотренному, позволяющие выявить иные аспекты явления и несовместимые с самим понятием о моменте испускания фотона. Это все те устройства, в которых мы наблюдаем интерференционные эффекты света. Здесь волна (34) оказывается разделенной на два волновых пакета, которые вновь интерферируют после прохождения различных оптических путей. Наблюдение интерференционной картины возможно, если разность оптических путей меньше протяженности волны (34) в пространстве¹¹⁾. Следовательно, пространственная протяженность волны существенна для самой постановки опыта, а поэтому понятие момента испускания фотона теряет всякий смысл.

Принцип причинности в его обычном понимании применим к системе атом + фотон до тех пор, пока она еще не провзаимодействовала с измерительным прибором. В течение этого периода времени возможно описание динамического состояния системы с помощью волновой функции, подчиняющейся уравнению Шредингера. При этом фотон представляется пакетом расходящихся волн (34), фронт которого, $r = ct$ удаляется от атома со скоростью c . Однако это причинное описание перестает быть справедливым как только система атом + фотон вступает во взаимодействие с инструментом наблюдения. Здесь уже нельзя говорить об изолированной системе, так как ансамбль система + инструмент наблюдения составляет единую сущность; свойства, приписываемые системе, в действительности являются

¹¹⁾ Среднее время жизни возбужденного состояния атома при испускании видимого света порядка 10^{-8} сек. Поэтому длина ct испускаемого цуга волн порядка 3 м. Интерференционную картину удавалось наблюдать при разности оптических путей порядка метра. Это подтверждает наши выводы относительно пространственной протяженности цуга волн и неопределенности понятия момента испускания.

свойствами ансамбля. Поэтому не может существовать строгой причинной связи между состояниями системы до и после измерения.

Это положение дел резко отличается от классической ситуации, где все динамические переменные системы строго определены в любой момент, а их эволюция во времени строго детерминирована. Динамические переменные квантовой системы определяются только с учетом соотношений неопределенности между парами дополнительных переменных, так что их временная эволюция детерминирована только частично. Сколь бы шокирующим не выглядело это ограничение принципа причинности, оно не входит в противоречие ни с одним опытным фактом, ибо временная эволюция совокупности динамических переменных системы может экспериментально наблюдаться только в рамках приближения, соответствующего соотношениям неопределенности.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что гамильтониан частицы в электромагнитном поле (уравнение (II.25)) является эрмитовым оператором и что вследствие этого норма некоторого решения Ψ уравнения Шредингера сохраняется во времени. Показать, что в этом случае можно написать уравнение непрерывности типа (11), если при определении потока выбрать выражение, вытекающее из принципа соответствия с классической механикой, а именно

$$J = \text{Re} \left[\Psi^* \left(\frac{\hbar}{im} \nabla - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \right) \Psi \right],$$

где \mathbf{A} — векторный потенциал электромагнитного поля.

2. Частица с массой m перемещается в поле действия потенциала $V(x)$, который при $x \rightarrow \pm\infty$ асимптотически (быстрее $1/|x|$) стремится к V_+ и V_- . Введем волновые числа $k_{\pm} = \sqrt{2m(E - V_{\pm})}/\hbar$ и рассмотрим решения $u_E(x)$, асимптотическое поведение которых выражается формулами:

$$u_E \sim e^{ik_-x} + R e^{-ik_-x} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty,$$

$$u_E \sim S e^{ik_+x} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Сложив решения этого типа, образуем волновой пакет (нормированный на единицу), описывающий частицу, движущуюся в направлении возрастания x . Показать, что по прошествии достаточного интервала времени этот пакет окажется разделенным на пакет проходящих волн и пакет отраженных, причем вероятности найти частицу в первом и втором пакетах равны соответственно $(k_+/k_-) |S|^2$ и $|R|^2$.

3. Волна, сопоставляемая частице, движущейся вдоль оси x , выражается формулой

$$\psi(x) = (2\pi\xi^2)^{-1/4} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_0 x - \frac{x^2}{4\xi^2}\right).$$

Вычислить волновую функцию $\varphi(p)$ в импульсном пространстве. Проверить, что как $\psi(x)$, так и $\varphi(p)$ нормированы на единицу. Вычислить средние значения x и x^2 , используя последовательно выражения (13) и (21), и сравнить результаты. Вычислить средние p , p^2 и $\exp(ipX/\hbar)$ (X — заданная вещественная постоянная), применяя последовательно выражения (14) и (20) и сравнить результаты.

4. Показать, что волновой пакет, для которого $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2$ (минимизирующий волновой пакет) имеет вид

$$(2\pi\xi^2)^{-1/4} \exp\left[\frac{i}{\hbar} p_0 x - \frac{(x - x_0)^2}{4\xi^2}\right],$$

причем $\langle x \rangle = x_0$, $\langle p \rangle = p_0$, $\Delta x = \xi$, $\Delta p = \hbar/2\xi$.

5. Пусть $\langle x \rangle$ и $\langle p \rangle$ средние значения x и канонически сопряженного импульса p для системы в динамическом состоянии $\psi(x)$. Показать, что в динамическом состоянии $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\langle p \rangle x\right) \psi(x + \langle x \rangle)$ оба средние значения равны нулю.

6. Показать, что при измерении положения частицы в § 13, б главную роль играет квантовая природа измерительного прибора (пучок света + микроскоп) и что соотношения неопределенности оказались бы нарушенными, если бы свет не был квантован. Показать на этом примере, что постоянная \hbar , входящая в соотношения неопределенности для электрона, не превышает постоянной, входящей в определение кванта света.

7. При измерении импульса методом отклонения в магнитном поле (§ 14, а) показать, что можно до некоторой степени уменьшить продолжительность измерения $\tau = \frac{mc}{e\mathcal{H}}$, не меняя его точности, но точность определения самого времени измерения Δt остается неизменной. Обсудить на этом примере соотношение неопределенности время-энергия. Выяснить те же вопросы для длительности $1/\Delta\nu'$ измерения импульса в процессе столкновения с фотоном (§ 14, б).

8. Измерение импульса в § 14, б может быть осуществлено при замене фотона любой другой частицей. Это измерение основано на определении импульса, передаваемого этой частице электроном при столкновении. Обсудить соотношения неопределенности координата-импульс в этом случае в нерелятивистском приближении. Показать, что неопределенность, возникающая при измерении координаты электрона, зависит от постоянной \hbar , фигурирующей в соотношениях неопределенности для используемой частицы.

9. Квантовая частица проходит через диафрагму с отверстием d , снабженную обтюратором с рабочим временем τ . Показать, что между частицей и прибором (диафрагма + обтюратор) происходит обмен импульсом порядка \hbar/d и энергией порядка \hbar/τ .

10. При измерении положения электрона с помощью микроскопа (§ 13, 6) мы стремимся определить и его импульс путем точного измерения импульса, передаваемого микроскопу в процессе измерения. Показать, что точность измерения импульса может быть повышена только за счет соответствующего уменьшения точности измерения положения частицы, согласно соотношениям неопределенности.

11. В эксперименте Юнга используется пучок моноэнергетических частиц, исследуется интерференционная картина на экране, а в качестве детектора применяется камера Вильсона. Это возможно только, если камера Вильсона находится достаточно далеко от экрана Юнга. Показать, что наблюдение «траектории» каждой частицы в камере Вильсона не позволяет определить отверстие, через которое прошла частица (см. сноску 7)).