

по порядку величины равна своему первоначальному значению $\lambda_0 = \hbar/mv_0$. Отношение двух величин имеет порядок

$$\gamma = \frac{|a|}{\lambda_0} = \frac{|Ze^2|}{\hbar v_0}. \quad (30)$$

Можно ожидать, что классическое приближение справедливо, когда

$$\gamma \gg 1. \quad (31)$$

Вясним, в какой мере выполняется условие (26). Имеем

$$|\text{grad } \lambda| = \left| \frac{d\lambda}{dr} \right| = \frac{1}{\gamma} \frac{a^2}{\sqrt{r(r-2a)^3}} \ll 1;$$

$|\text{grad } \lambda|$ тем больше, чем меньше r . Поскольку классическая траектория тем ближе подходит к рассеивающему центру, чем больше угол отклонения, мы делаем вывод, что классическое приближение оправдано для малых углов отклонения (т. е. для больших прицельных параметров), но отказывается служить при больших углах отклонения. Чтобы получить количественную оценку, рассмотрим выражение для максимума $|\text{grad } \lambda|$ (т. е. его значения на вершине гиперболической траектории) как функции θ ; вычисление дает

$$|\text{grad } \lambda|_{\text{max}} = \frac{F(\theta)}{\gamma}, \quad F(\theta) = \text{tg } \frac{\theta}{2} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{1 - (\text{sign } a) \sin \frac{\theta}{2}}$$

(здесь $\text{sign } a \equiv |a|/a$). Когда θ увеличивается от 0 до π , функция $F(\theta)$ увеличивается от 0 до $+\infty$. Пусть угол θ_c определяется равенством

$$F(\theta_c) = \gamma.$$

Классическое приближение справедливо при $\theta < \theta_c$ и неприменимо при $\theta > \theta_c$. Заметим, что θ_c тем ближе к π , чем больше γ , в согласии с грубой оценкой, сделанной выше.

Раздел II. МЕТОД ВКБ⁹⁾

§ 6. Основная идея метода

Как и всякий квазиклассический метод, метод ВКБ основан на разложении всех величин по степеням постоянной \hbar и пренебрежении членами более высокого порядка. Таким образом,

⁹⁾ Более подробное изложение метода см. в работах *R. E. Langer*, Phys. Rev. **51**, 669 (1937); *W. H. Furry*, Phys. Rev. **71**, 360 (1947). См. также *Ф. М. Морс* и *Г. Фешбах*, Методы теоретической физики, ИЛ, 1960, т. II, стр. 90 и далее.

уравнение Шредингера заменяется (по крайней мере, в некоторых областях пространства) своим классическим пределом. Однако область применимости метода ВКБ шире, чем область применимости классического приближения как такового, ибо указанное разложение может проводиться и в тех областях пространства, где классическое приближение не имеет смысла (области $E < V$, куда доступ классическим частицам запрещен). Для того чтобы включить в рассмотрение и эти области, следует несколько изменить определения функций A и S из § 4, полагая

$$\Psi(\mathbf{r}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} W(\mathbf{r})\right), \quad (32)$$

$$W(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}) + \frac{\hbar}{i} T(\mathbf{r}), \quad (33)$$

$$A(\mathbf{r}) = \exp T(\mathbf{r}). \quad (34)$$

Потребуем, чтобы S и T были четными функциями \hbar , что однозначно определяет A и S . Уравнения (17) — (18) и (22) — (23) остаются в силе, но величины A и S более не являются обязательно вещественными. Приближение ВКБ состоит в разложении $W(\mathbf{r})$ по степеням \hbar и пренебрежении в уравнении Шредингера членами порядка \hbar^2 и выше.

§ 7. Решения ВКБ в одном измерении

Наиболее интересные применения метода ВКБ дают *одномерные задачи*. Поэтому мы ограничимся рассмотрением одномерных задач и будем искать стационарные решения уравнения Шредингера, не зависящего от времени (уравнения (22) — (23)). Метод, развитый здесь, может, вообще говоря, служить и для решения уравнения Шредингера в трех измерениях, ибо в большинстве случаев оно сводится к решению волновых уравнений в одном измерении путем разделения угловых и радиальных переменных (см. гл. IX).

Пусть $y(x)$ есть волновая функция, удовлетворяющая уравнению Шредингера,

$$y'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) y = 0.$$

Полагая

$$y = e^{i\frac{\omega}{\hbar}}, \quad \omega = S + \frac{\hbar}{i} \ln A$$

(S и $\ln A$ — четные функции \hbar), получаем эквивалентную систему уравнений

$$S'^2 - 2m(E - V) = \hbar^2 \frac{A''}{A}, \quad (35)$$

$$2A'S' + AS'' = 0. \quad (36)$$

Уравнение непрерывности (36) интегрируется и дает

$$A = \frac{\text{const}}{\sqrt{S'}}. \quad (37)$$

Подставляя это выражение для A в уравнение (35), получаем уравнение

$$S'^2 = 2m(E - V) + \hbar^2 \left[\frac{3}{4} \left(\frac{S''}{S'} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{S'''}{S'} \right]. \quad (38)$$

Это дифференциальное уравнение третьего порядка *строго эквивалентно* уравнению Шредингера, из которого мы исходили.

Приближение ВКБ состоит в разложении S в ряд по степеням \hbar^2

$$S = S_0 + \hbar^2 S_1 + \dots, \quad (39)$$

подстановки этого разложения в уравнение (38) и сохранении только членов нулевого порядка

$$S'^2 \simeq S_0'^2 = 2m(E - V(x)). \quad (40)$$

Это приближенное уравнение интегрируется без затруднений.

Следует различать два случая:

1. *Случай* $E > V(x)$.

Определим длину волны

$$\lambda(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E - V(x))}}. \quad (41)$$

Уравнение (40) удовлетворяется, если $S' \simeq \pm \hbar/\lambda$. Решение ВКБ представляет собой линейную комбинацию осциллирующих функций

$$y(x) = \alpha \sqrt{\lambda} \cos \left(\int^x \frac{dx}{\lambda} + \varphi \right) \quad (42)$$

(α и φ — произвольные постоянные).

2. *Случай* $E < V(x)$ (область, запрещенная для классических частиц).

Пусть

$$l(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V(x) - E)}}. \quad (43)$$

Уравнение (40) удовлетворяется, если $S' \simeq \pm i\hbar/l$. Решение ВКБ представляет собой линейную комбинацию действительных экспонент

$$y(x) = \sqrt{l} \left[\gamma e^{+\int^x \frac{dx}{l}} + \delta e^{-\int^x \frac{dx}{l}} \right]. \quad (44)$$

§ 8. Условия применимости приближения ВКБ

Теория приближения ВКБ довольно сложна. Ограничимся (без доказательства) указанием того, что разложение (39) по степеням \hbar^2 в общем случае не сходится, а представляет собой так называемый асимптотический ряд, конечное число членов которого дает хорошее приближение для S , если \hbar достаточно мало.

Чтобы найти критерий справедливости приближения ВКБ, можно вычислить второй член $\hbar^2 S_1$ разложения (39). Поправка порядка \hbar^2 выражается в умножении решения ВКБ на множитель $e^{i\hbar S_1}$. Поправка пренебрежимо мала, если $\hbar S_1 \ll 1$.

Если подставить разложение (39) в уравнение (38) и приравнять друг другу члены порядка \hbar^2 , то для S_1 получим дифференциальное уравнение

$$2S_0' S_1' = \frac{[(S_0')^{-1/2}]''}{(S_0')^{-1/2}} \equiv \frac{3}{4} \left(\frac{S_0''}{S_0'} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{S_0'''}{S_0'}.$$

Когда $E > V$, $S_0' = \pm \hbar/\kappa$. Это после соответствующих вычислений приводит к

$$\hbar S_1' = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\kappa} (\sqrt{\kappa})'' = \pm \left(\frac{1}{4} \kappa'' - \frac{1}{8} \frac{\kappa'^2}{\kappa} \right),$$

откуда получаем

$$\hbar S_1 = \pm \left(\frac{\kappa'}{4} - \frac{1}{8} \int \frac{\kappa'^2}{\kappa} dx \right). \quad (45)$$

Когда же $E < V$, получаем то же выражение с заменой $\kappa(x)$ на $l(x)$. Условие $\hbar S_1 \ll 1$ выполняется, если

$$\begin{aligned} \kappa'(x) &\ll 1 \quad \text{при } E > V(x), \\ l'(x) &\ll 1 \quad \text{при } E < V(x). \end{aligned} \quad (46)$$

Можно связать критерий (46) и условие (26) справедливости классического приближения в общем случае.

Этот критерий выражается также с помощью неравенства, включающего потенциал $V(x)$ и его первую производную

$$\frac{|m\hbar V'|}{|2m(E-V)|^{1/2}} \ll 1. \quad (47)$$

§ 9. Граничные точки и формулы согласования

Обычно при использовании приближения ВКБ условие (47) выполняется повсюду кроме малых окрестностей точек $E = V(x)$. Это так называемые *граничные точки* классического движения, где скорость движения частицы обращается в нуль и меняет знак (точки поворота).

С математической точки зрения приближение ВКБ сводится к замене уравнения Шредингера

$$y'' + \frac{y}{\lambda^2} = 0$$

уравнением

$$y'' + \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{(\sqrt{\lambda'})''}{\sqrt{\lambda}} \right) y = 0 \quad (48)$$

(как в области $E > V$, так и в области $E < V$, где $\lambda = i\ell$). Действительно, нетрудно проверить, что выражения (42) и (44) представляют собой общие решения именно уравнения (48). Оно имеет особенность типа $(x-a)^{-2}$ в тех точках, где длина волны становится бесконечно большой, т. е. в каждой из граничных точек. В окрестностях таких точек замена уравнения Шредингера на уравнение (48) очевидно неоправдана. Чтобы получить полное решение, вообще говоря, следует решить уравнение Шредингера в малых областях вблизи граничных точек и сшить эти решения с решениями (42) и (44), которые представляют волновую функцию в областях, где справедливо приближение ВКБ.

На практике, однако, нет большой необходимости знать истинную форму решения в окрестности граничной точки, если мы умеем сшивать решения ВКБ по обе стороны окрестности. Проблема сшивания решений математически довольно трудна, подробно она рассматривается в указанной статье Лангера⁹⁾; метод, предложенный Лангером, основан на замене уравнения Шредингера на уравнением (48), а другим уравнением (не имеющим особенностей в граничных точках), которое асимптотически переходит в уравнение (48) по обе стороны точки поворота. Ограничимся тем, что укажем *формулы согласования* между решениями ВКБ экспоненциального и осцилляторного типов.

Предположим ради определенности, что $E > V$ при $x > a$ и $E < V$ при $x < a$ (барьер слева). Общее решение является линейной комбинацией двух решений y_1 и y_2 , асимптотические

формы которых даются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &\sim \sqrt{l} \exp\left(+\int_x^a \frac{dx}{l}\right), \\ y_2 &\sim \frac{\sqrt{l}}{2} \exp\left(-\int_x^a \frac{dx}{l}\right) \end{aligned} \right\} \text{при } x \ll a, \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &\sim -\sqrt{\kappa} \sin\left(\int_a^x \frac{dx}{\kappa} - \frac{\pi}{4}\right), \\ y_2 &\sim \sqrt{\kappa} \cos\left(\int_a^x \frac{dx}{\kappa} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \right\} \text{при } x \gg a. \quad (50)$$

Условимся определять «число длин волн», содержащихся в заданном интервале (x_1, x_2) , интегралом $(1/2\pi) \int_{x_1}^{x_2} dx/\kappa$ или

$(1/2\pi) \int_{x_1}^{x_2} dx/l$ соответственно справа и слева от граничной точки.

Условия справедливости формул согласования таковы:

1) В граничной точке кинетическая энергия $E - V$ стремится к нулю как $x - a$ и остается в хорошем приближении пропорциональной $x - a$ в области, простирающейся на одну, а еще лучше — на несколько «длин волн» по обе стороны точки поворота.

2) Каждая из «граничных областей» сшивается с «асимптотическими областями», простирающимися на много «длин волн», в которых выполняется приближение ВКБ.

При использовании формул (49) и (50) требуется известная осторожность. Дело в том, что решение $Ay_1 + By_2$ как таковое в области $x \ll a$ имеет асимптотическую форму Ay_1 , так как «экспоненциально растущий» член всегда превосходит «экспоненциально убывающий», каким бы малым по сравнению с B ни был коэффициент A , если только он не равен тождественно нулю. Поэтому задание асимптотической формы будет иметь смысл, только если она действительно «экспоненциально убывающая» (тип y_2); если коэффициенты A и B известны только приближенно и $|A| \ll |B|$, то никакое даже приближенное определение асимптотической формы решения становится невозможным.

Предположим, что мы знаем решение ВКБ в асимптотической области ($x \ll a$) и желаем найти то осцилляторное реше-

ние, с которым оно сшивается. Это можно сделать только если указанное асимптотическое решение экспоненциально затухает при $x \ll a$, т. е. имеет форму

$$\frac{1}{2} Bl^{1/2} \exp\left(-\int_x^a \frac{dx}{l}\right);$$

тогда в окрестности граничной точки решение, очевидно, будет иметь вид Bu_2 , а его поведение в области $x \gg a$ будет выражаться формулой (50). Результат можно записать в форме

$$\frac{1}{2} \sqrt{l} \exp\left(-\int_x^a \frac{dx}{l}\right) \rightarrow \sqrt{\kappa} \cos\left(\int_a^x \frac{dx}{\kappa} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (51)$$

причём стрелка указывает направление согласования.

Предположим, напротив, что мы задаемся решением ВКБ в «осцилляторной области» ($x \gg a$). Оно должно иметь форму (42), что можно записать в виде

$$C \sqrt{\kappa} \cos\left(\int_a^x \frac{dx}{\kappa} - \frac{\pi}{4} + \varphi\right)$$

(C и φ — комплексные постоянные). Согласно формулам (49)—(50) это есть асимптотическая форма решения с коэффициентами

$$A \simeq C \sin \varphi, \quad B \simeq C \cos \varphi.$$

Следует учитывать, что постоянные A и B указанной асимптотической формой определяются только приближенно. По этой причине, если $|\operatorname{tg} \varphi| \ll 1$, любое определение асимптотической формы данного решения в области $x \ll a$ становится невозможным; в противном случае она дается формулой (49). Результат запишем в виде

$$\sqrt{\kappa} \cos\left(\int_a^x \frac{dx}{\kappa} - \frac{\pi}{4} + \varphi\right) \rightarrow \sin \varphi \sqrt{l} \exp\left(\int_x^a \frac{dx}{l}\right); \quad (52)$$

стрелка здесь также указывает направление согласования.

В случае барьера справа, т. е. если $E > V$ при $a > x$ и $E < V$ при $a < x$, формулы согласования (51) и (52) остаются в силе, если в интегралах и неравенствах переставить x и a ; направление стрелок сохраняется.

§ 10. Прохождение потенциального барьера

В качестве иллюстрации применим метод ВКБ к вычислению коэффициента прохождения частицей потенциального барьера, изображенного на рис. 25. В области $x < a$ (область I) $V(x) = V_0 = \text{const}$, при $x > a$ потенциал $V(x)$ представляет собой положительную функцию, убывающую монотонно от значения $V_a = V(a)$ до $V(\infty) = 0$.

Пусть E — энергия частицы, $b (> a)$ — точка на оси x , где $E = V(b)$. Точка разрыва a и граничная точка b делят ось x на три области I, II и III. Предполагаем, что метод ВКБ применим в областях II и III.

Чтобы найти коэффициент прохождения, следует построить решение уравнения Шредингера, асимптотическая форма которого в области III выражается только прошедшей волной (распространяющейся в направлении возрастающих x). В этой области решение ВКБ имеет форму (42). Условие, налагаемое на форму асимптотического решения, фиксирует его (с точностью до постоянного множителя) в виде

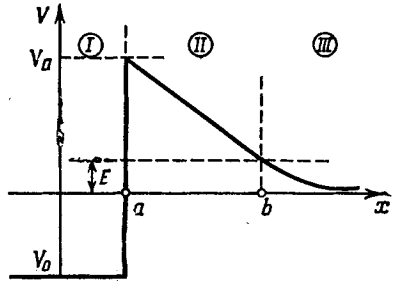


Рис. 25. Потенциальный барьер $V(x)$.

$$y_{III} = \sqrt{\kappa} \exp\left(i \int_b^x \frac{dx}{\kappa} - i \frac{\pi}{4}\right) \quad (x \gg b)$$

(фаза $\pi/4$ добавлена для удобства последующих вычислений) или

$$y_{III} = \sqrt{\kappa'} \left[\cos\left(\int_b^x \frac{dx}{\kappa} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\int_b^x \frac{dx}{\kappa} - \frac{\pi}{4}\right) \right].$$

Согласно формулам согласования (49) — (50) это решение продолжается в область II решением

$$y_{II} = -i \sqrt{l} \exp\left(\int_x^b \frac{dx}{l}\right) = -i \sqrt{l} e^{\tau} \exp\left(-\int_a^x \frac{dx}{l}\right) \quad (a < x \ll b)$$

в этом выражении

$$\tau = \int_a^b \frac{dx}{l} = \int_a^b \frac{\sqrt{2m[V(x) - E]}}{\hbar} dx.$$

Положим

$$l_a = l(a) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_a - E)}}, \quad k = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}.$$

В области I точное решение уравнения Шредингера имеет вид

$$y_I = A \sin[k(x - a) + \delta].$$

Постоянные A и δ определяются условиями непрерывности волновой функции и ее логарифмической производной в точке a , т. е.

$$k \operatorname{ctg} \delta = -\frac{1}{l_a}, \quad A \sin \delta = -i \sqrt{l_a} e^\tau, \quad (53)$$

при этом y_I есть сумма падающей и отраженной волн. Поскольку δ вещественна, падающая волна $-\frac{i}{a} A \exp\{i[k(x - a) + \delta]\}$ дает поток $\frac{1}{4} |A|^2 \frac{\hbar k}{m}$. Согласно уравнениям (53),

$$\frac{k |A|^2}{4} = \frac{k l_a}{4} \frac{e^{2\tau}}{\sin^2 \delta} = \frac{k l_a}{4} e^{2\tau} (1 + \operatorname{ctg}^2 \delta) = e^{2\tau} \frac{1 + k^2 l_a^2}{4 k l_a}.$$

Так как поток в прошедшей волне y_{III} равен \hbar/m , коэффициент прохождения есть

$$T = \frac{4 k l_a}{1 + k^2 l_a^2} e^{-2\tau} = 4 \frac{\sqrt{(V_a - E)(E - V_0)}}{V_a - V_0} e^{-2\tau}.$$

Чтобы указанный метод вычисления был допустим, требуется, чтобы потенциал $V(x)$ достаточно медленно изменялся в областях II и III , где использовалось приближение ВКБ (условие (47)), и чтобы в окрестности граничной точки с размерами в несколько «длин волн» потенциал $V(x)$ мог быть представлен линейной функцией x . Тем самым требуется, чтобы барьер имел «ширину» по меньшей мере в несколько «длин волн», т. е. чтобы $\tau \gg 2\pi$, а следовательно, чтобы коэффициент T был очень малым ($\leq 10^{-5}$).

§ 11. Уровни энергии в потенциальной яме

В качестве второго примера рассмотрим потенциальную яму, представленную на рис. 26, и поставим задачу нахождения уровней энергии дискретного спектра.

Каждой энергии E соответствуют две граничные точки a и b классического движения. Они делят ось x на три области: I , II и III . Будем искать решение ВКБ, экспоненциально затухающее

в областях I и III, т. е.

$$y_I = \frac{c}{2} \sqrt{l} \exp\left(-\int_x^a \frac{dx}{l}\right) \quad (x \ll a),$$

$$y_{III} = \frac{c'}{2} \sqrt{l} \exp\left(-\int_b^x \frac{dx}{l}\right) \quad (x \gg b)$$

(c и c' — постоянные). Согласно формуле согласования (50) и аналогичной формуле, соответствующей барьеру справа, эти функции имеют следующие продолжения в область II:

$$y_a(x) = c \sqrt{\kappa} \cos\left(\int_a^x \frac{dx}{\kappa} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (a \ll x \ll b).$$

$$y_b(x) = c' \sqrt{\kappa} \cos\left(\int_x^b \frac{dx}{\kappa} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Эти функции равны $y_a(x) = y_b(x) = y_{II}$, если

$$l \equiv \int_a^b \frac{dx}{\kappa} \equiv \int_a^b \frac{\sqrt{2m[E - V(x)]}}{\hbar} dx = \left(N + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad (54)$$

где N — целое число (≥ 0). Требование (54) фиксирует дискретные уровни энергии спектра. В этом случае имеем $c' = (-1)^N c$. Таким образом, получаем (с точностью до произвольного постоянного множителя) выражения y_I , y_{II} и y_{III} для соответствующей собственной функции в каждой из трех областей за исключением двух окрестностей точек a и b .

Условия применимости метода требуют, чтобы граничные области около точек a и b , где потенциал $V(x)$ должен представляться в хорошем приближении линейной функцией x , имели размеры порядка нескольких длин волн; поэтому метод применим только для очень больших квантовых чисел $N \gg 1$.

В некоторых особых случаях, например, в случае гармонического осциллятора, метод дает точные значения всех уровней

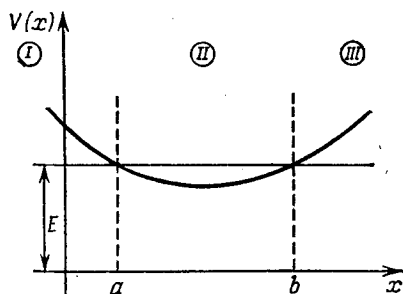


Рис. 26. Потенциальная яма $V(x)$.

энергии, включая и основное состояние (см. задачу 6). Это следует считать случайным обстоятельством.

Правило квантования (54) можно рассматривать как условие стационарности волны: интервал (a, b) должен содержать «полуцелое» (т. е. целое $+1/2$) число «полудлин» волн. Оно отличается от правила квантования Бора — Зоммерфельда только присутствием «полуцелых» квантовых чисел: с точностью до множителя $2\hbar$ интеграл I есть интеграл действия $\oint p dq$ в соответствующем классическом фазовом пространстве. Между прочим этот интеграл равен площади той части фазового пространства, где энергия меньше E

$$\omega(E) \equiv \int_{H \leq E} dp dq.$$

Поэтому правила (54) можно записать в форме

$$\omega(E) \equiv \oint_{H=E} p dq = \left(N + \frac{1}{2}\right) \hbar. \quad (55)$$

Согласно формуле (55), область фазового пространства $\omega(E)$ при переходе с одного уровня энергии на следующий увеличивается на \hbar . Отсюда мы получаем следующий важный результат, касающийся распределения уровней энергии:

Объем области фазового пространства, соответствующей интервалу $(E, E + \delta E)$ в единицах \hbar равна числу связанных состояний квантовой системы, энергия которых лежит в указанном интервале.

Условия справедливости этого результата в действительности менее ограничительны, чем условия применимости метода ВКБ; практически он всегда имеет место «в пределе больших квантовых чисел». Обычно принимают (и доказывают в простейших случаях), что этот результат применим и для систем, число степеней свободы которых R превышает единицу, если только в качестве единицы измерения объема фазового пространства взять \hbar^R .

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Гамильтониан гармонического осциллятора выражается формулой $H = (p^2 + m^2 \omega^2 q^2) / 2m$. Показать, что средние значения $\langle q \rangle$ и $\langle p \rangle$ колеблются по синусоидальному закону с частотой $\omega / 2\pi$ около начала координат, а дисперсии ω , χ (обозначения § 3) колеблются с половинным периодом около некоторого среднего значения (положительного), которое следует определить. При каких условиях ω и χ остаются постоянными?

2. Показать, что движение центра волнового пакета, представляющего заряженную частицу в электромагнитном поле, строго совпадает с движением классической частицы в двух следующих случаях: а) постоянное электрическое поле и б) постоянное магнитное поле.

3. Показать, что «расплывание» волнового пакета, представляющего заряженную частицу в постоянном электрическом поле, происходит по тому же закону, что и пакета свободной частицы ($\omega = \text{const}$, χ — квадратичная функция времени t).

4. С помощью волновой функции частицы $\psi(\mathbf{r})$ образуем функцию

$$D(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{P} \mathbf{r}} \psi^*\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \psi\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) d\mathbf{r},$$

которую (согласно Вигнеру) можно интерпретировать как плотность в фазовом пространстве классического статистического ансамбля, сопоставляемого этой волновой функции¹⁰). Показать, что:

1) распределения по положению и по импульсу совпадают с соответствующими распределениями квантовой частицы в состоянии $\psi(\mathbf{r})$:

$$\int D(\mathbf{R}, \mathbf{P}) d\mathbf{P} = |\psi(\mathbf{R})|^2, \quad \int D(\mathbf{R}, \mathbf{P}) d\mathbf{R} = |\varphi(\mathbf{P})|^2,$$

где $\varphi(\mathbf{P})$ — волновая функция в пространстве импульсов;

2) если частица свободна, то эволюция ансамбля во времени строго совпадает с эволюцией статистического ансамбля классических частиц той же массы;

3) найти закон «расплывания» волнового пакета свободной частицы.

5. С помощью метода ВКБ вычисляется коэффициент прохождения T частицы массы m и энергии E через барьер потенциала $V(x)$, который медленно меняется в пространстве и на двух концах интервала $(-\infty, +\infty)$ стремится к значениям, меньшим E . Предполагается, что имеются только две граничные точки a и b . Показать, что

$$T = \exp\left(-2 \int_a^b \frac{\sqrt{2m[V(x) - E]}}{\hbar} dx\right).$$

6. Вычислить с помощью метода ВКБ уровни энергии гармонического осциллятора (гамильтониан задачи 1). Обсудить условия применимости метода.

¹⁰) Однако в отличие от плотности в фазовом пространстве классического статистического ансамбля величина $D(\mathbf{R}, \mathbf{P})$ может принимать и отрицательные значения.