проще и элегантнее волновой механики; она к тому же имеет и более широкую область применения, так как может быть использована для изучения квантовых систем, не имеющих классических аналогов.

В изложении этой общей формулировки квантовой теории мы будем следовать Дираку, используя введенные им чрезвычайно удобные обозначения[1]). Содержание данной главы посвящено понятиям линейной алгебры[2]), которые составляют математический аппарат теории. Описание физических явлений с помощью этого формализма и будет предметом гл. VIII.

Раздел I. ВЕКТОРЫ И ОПЕРАТОРЫ

§ 2. Векторное пространство. Кет-векторы

Согласно идеям предшествующего параграфа, каждому динамическому состоянию мы сопоставляем вектор, который, согласно Дираку, будем называть *кет-вектором* или просто *кет* и обозначать символом $|\rangle$. Чтобы отличать кет-векторы один от другого, мы снабдим каждый символ либо некоторой буквой, либо одним или несколькими индексами, могущими принимать как дискретные, так и непрерывно изменяющиеся значения в зависимости от конкретной ситуации. Так, кет u представляется символом $|u\rangle$.

Кет-векторы образуют линейное векторное пространство: всякая линейная комбинация нескольких кет-векторов также является кет-вектором. Пусть, например, заданы два кет-вектора $|1\rangle$ и $|2\rangle$ и два произвольных комплексных числа λ_1, λ_2, тогда линейная комбинация

$$|v\rangle = \lambda_1 |1\rangle + \lambda_2 |2\rangle \tag{1}$$

есть вектор в пространстве кет-векторов.

Аналогично, если $|\xi\rangle$ зависит от непрерывно изменяющегося индекса ξ, а $\lambda(\xi)$ — некоторая комплекснозначная функция ξ, то интеграл

$$|w\rangle = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \lambda(\xi)\, |\xi\rangle\, d\xi \tag{2}$$

есть вектор в пространстве кет-векторов. Мы также будем говорить, что $|w\rangle$ есть линейная комбинация (или линейная суперпозиция) кет-векторов $|\xi\rangle$.

---

[1]) *P. A. M. Dirac, loc. cit.*, сноска II [8].

[2]) Строгое и полное изложение всех этих вопросов можно найти в книгах *A. Lichnerowicz* и *M. H. Stone, loc. cit.*, сноска V [3].

По определению кет-векторы из некоторой совокупности являются *линейно независимыми*, если ни один из них не может быть представлен в виде линейной комбинации остальных (эта линейная комбинация может быть вида (1) или (2) или смешанного вида).

Если векторное пространство содержит максимум n линейно независимых векторов, то это конечномерное пространство и число его измерений по определению равно n. Если в таком векторном пространстве как-то выбрать n линейно независимых векторов, то все остальные векторы пространства могут быть представлены как линейные комбинации данных n векторов.

Если число линейно независимых векторов рассматриваемого линейного векторного пространства неограничено, то пространство является бесконечномерным. Таково пространство Гильберта, а также, как мы видели ранее, пространство волновых функций волновой механики. Однако всегда можно выбрать такую последовательность (бесконечную счетную или континуальную) линейно независимых векторов, что каждый вектор пространства может быть представлен как линейная комбинация (бесконечный ряд или интеграл) этих «базисных векторов».

Пусть задано пространство кет-векторов $\mathscr{E}$; рассмотрим последовательность кет-векторов из этого пространства. Множество кет-векторов последовательности и всех их линейных комбинаций образуют линейное векторное пространство $\mathscr{E}'$. По определению $\mathscr{E}'$ есть пространство, *натянутое* на кет-векторы последовательности. Всякий кет-вектор пространства $\mathscr{E}'$ принадлежит и пространству $\mathscr{E}$: говорят, что $\mathscr{E}'$ является *подпространством* $\mathscr{E}$. Если пространство $\mathscr{E}$ имеет конечное число измерений n, то число измерений пространства $\mathscr{E}'$, очевидно, конечно и не превосходит n. Если же пространство $\mathscr{E}$ бесконечномерно, то никаких ограничений на число измерений пространства $\mathscr{E}'$ не существует.

§ 3. Дуальное пространство. Бра-векторы

В линейной алгебре хорошо известно, что каждому векторному пространству можно сопоставить дуальное векторное пространство. Действительно, всякая линейная функция $\chi(|u\rangle)$ кет-векторов $|u\rangle$ удовлетворяет принципу суперпозиции, характерному для векторов линейного пространства[3]), и определяет,

[3]) Свойство линейности χ выражается соотношением

$$\chi(\lambda_1|1\rangle + \lambda_2|2\rangle) = \lambda_1\chi(|1\rangle) + \lambda_2\chi(|2\rangle).$$

Очевидно, что если две функции χ_1, χ_2 обладают этим свойством, то всякая линейная комбинация типа $\mu_1\chi_1 + \mu_2\chi_2$ также нм обладает.

следовательно, вектор нового типа, который мы, согласно Дираку, будем называть *бра-вектором* или просто *бра*, а представлять его будем символом $\langle\ |$. Так, функция $\chi(|u\rangle)$ определяет бра-вектор $\langle\chi|$; значение, принимаемое этой функцией при некотором данном кет-векторе $|u\rangle$, есть некоторое число (в общем случае комплексное), которое мы будем обозначать символом $\langle\chi|u\rangle$.

По определению бра-вектор $\langle\Phi|$ равен нулю, если функция $\langle\Phi|u\rangle$ равна нулю при любом $|u\rangle$:

$$\langle\Phi|=0, \text{ если } \langle\Phi|u\rangle=0 \text{ при любом } |u\rangle. \tag{3}$$

Аналогично два бра-вектора равны

$$\langle\Phi_1|=\langle\Phi_2|, \text{ если } \langle\Phi_1|u\rangle=\langle\Phi_2|u\rangle \text{ при любом } |u\rangle.$$

Если пространство кет-векторов имеет конечное число измерений, то дуальное пространство имеет то же число измерений. Если число измерений пространства кет-векторов бесконечно, то пространство, дуальное ему, обладает тем же свойством.

Чтобы ввести метрику в определенное выше векторное пространство, предположим, что существует взаимооднозначное соответствие между векторами пространства и векторами дуального пространства. Бра- и кет-векторы, сопоставляемые друг другу в этом взаимооднозначном соответствии, называются сопряженными друг другу и отмечаются одной буквой (или одинаковыми индексами): так, бра-вектор, сопряженный кет-вектору $|u\rangle$, обозначается символом $\langle u|$.

Предположим кроме того, что это соответствие *антилинейно*. Иначе говоря, бра-вектор, сопряженный кет-вектору

$$|v\rangle=\lambda_1|1\rangle+\lambda_2|2\rangle, \tag{4}$$

есть

$$\langle v|=\lambda_1^*\langle 1|+\lambda_2^*\langle 2|. \tag{5}$$

Аналогично бра-вектор, сопряженный кет-вектору

$$|w\rangle=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\lambda(\xi)|\xi\rangle\,d\xi, \tag{6}$$

есть

$$\langle w|=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\lambda^*(\xi)\langle\xi|\,d\xi. \tag{7}$$

Таким образом, соответствие между кет- и бра-векторами аналогично соответствию между волновыми функциями волновой механики и комплексно сопряженными функциями. Заметим, кстати, что если кет-вектор равен нулю, то сопряженный ему бра-вектор также равен нулю и наоборот.

Совокупность бра-векторов, сопряженных кет-векторам из подпространства $\mathscr{E}'$ пространства $\mathscr{E}$, образует подпространство, дуальное $\mathscr{E}'$.

§ 4. Скалярное произведение

По определению *скалярное произведение* кет-вектора $|u\rangle$ на кет-вектор $|v\rangle$ есть число (в общем случае комплексное) $\langle v|u\rangle$, т. е. значение $v(|u\rangle)$, принимаемое линейной функцией, ассоциированной с бра-вектором, сопряженным $|v\rangle$.

Как следствие самого определения скалярное произведение является линейным по отношению к $|u\rangle$ и антилинейным по отношению к $|v\rangle$. Мы предполагаем, что скалярное произведение обладает всеми остальными свойствами, характерными для скалярного произведения волновых функций в волновой механике (§ V. 2), а именно:

1°. Скалярное произведение $|v\rangle$ на $|u\rangle$ есть величина, комплексно сопряженная скалярному произведению $|u\rangle$ на $|v\rangle$:

$$\langle u\,|\,v\rangle = \langle v\,|\,u\rangle^*. \tag{8}$$

2°. Всякий вектор u имеет вещественную неотрицательную норму $N_u \equiv \langle u|u\rangle$ *)

$$\langle u\,|\,u\rangle \geqslant 0. \tag{9}$$

Она равна нулю в том и только в том случае, когда вектор $|u\rangle$ равен нулю. Из этих свойств вытекает *неравенство Шварца*: какими бы ни были $|u\rangle$ и $|v\rangle$, всегда

$$|\langle u\,|\,v\rangle|^2 \leqslant \langle u\,|\,u\rangle\langle v\,|\,v\rangle. \tag{10}$$

Равенство имеет место в том и только в том случае, когда векторы $|u\rangle$ и $|v\rangle$ коллинеарны (т. е. пропорциональны).

Эти аксиомы должны быть дополнены предположением, что пространство кет-векторов $\mathscr{E}$ (а также дуальное ему пространство бра-векторов) является полным и сепарабельным (см. § V.2): это *пространство Гильберта.*

По определению два вектора *ортогональны*, если их скалярное произведение равно нулю. Два подпространства $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ ортогональны, если каждый из векторов одного подпространства ортогонален каждому вектору другого подпространства. Очевидно, что в этом случае подпространства $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ не имеют ни одного общего вектора; действительно, любой вектор, принадлежащий обоим подпространствам, может быть только рав-

*) В математической литературе норма вектора определяется как $\sqrt{\langle u\,|\,u\rangle}$. (*Прим. перев.*)

ным нулю, ибо он должен быть ортогонален сам себе, а следовательно, иметь нулевую норму.

Множество векторов, ортогональных к $\mathscr{E}_1$, образует подпространство $\mathscr{E}_1^\times$, ортогональное $\mathscr{E}_1$, — это *подпространство, дополнительное* к $\mathscr{E}_1$. Подпространство $\mathscr{E}_1^\times$ сводится к нулю, если подпространство $\mathscr{E}_1$ совпадает с самим пространством $\mathscr{E}$. Можно показать[2]), что *всякий вектор пространства $\mathscr{E}$ может быть единственным образом представлен как сумма вектора из $\mathscr{E}_1$* и вектора из дополнительного подпространства:

$$|u\rangle = |u_1\rangle + |u_1^\times\rangle.$$

Вектор $|u_1\rangle$, по определению, есть *проекция* $|u\rangle$ на подпространство $\mathscr{E}_1$. Мы еще вернемся подробно к понятию проекции в разделе II.

Во всех рассуждениях, касающихся скалярного произведения, молчаливо предполагалось, что векторы (и кет, и бра) обладают конечной нормой, в противном случае аксиома о норме теряет всякий смысл. Если это действительно так, то рассматриваемое пространство кет-векторов есть пространство Гильберта. В гл. V мы видели, что векторы, способные представлять динамические состояния, действительно должны иметь конечную норму, но что рассмотрение проблемы непрерывного спектра в задачах на собственные значения требует введения собственных векторов с бесконечной нормой. Поэтому мы должны ввести в наше пространство $\mathscr{E}$ также и векторы $|\xi\rangle$ с бесконечной нормой, зависящие от одного (по крайней мере) непрерывного индекса, и распространить на эту категорию векторов понятие скалярного произведения.

Мы принимаем, что $|\xi\rangle$ имеет конечное скалярное произведение $\langle u|\xi\rangle$ со всяким вектором $|u\rangle$ с конечной нормой и что это скалярное произведение линейно по отношению к $|\xi\rangle$ и антилинейно по отношению к $|u\rangle$. Аналогично определяется скалярное произведение $\langle\xi|u\rangle$, причем принимается, что

$$\langle\xi|u\rangle = \langle u|\xi\rangle^*.$$

В противоположность этому скалярное произведение двух векторов типа $|\xi\rangle$ может и не сходиться. В частности, норма $|\xi\rangle$ расходится. Но мы предположим, что собственный дифференциал

$$|\xi, \delta\xi\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{\delta\xi}} \int_{\xi}^{\xi+\delta\xi} |\xi'\rangle\, d\xi' \tag{11}$$

обладает положительно определенной нормой, которая стремится к конечному пределу, когда $\delta\xi \to 0$. Строго говоря, вектор

$|\xi\rangle$ не входит в пространство $\mathscr{E}$, но его собственные дифференциалы или, в более общем случае, линейные комбинации типа (2) принадлежат этому пространству и удовлетворяют всем требованиям, характеризующим векторы пространства Гильберта.

§ 5. Линейные операторы

Определив пространство кет-векторов, можно перейти к определению линейных операторов, действующих в этом пространстве (см. § II. 11).

Предположим, что каждому кет-вектору $|u\rangle$ векторного пространства соответствует некоторый кет-вектор $|v\rangle$: говорят, что $|v\rangle$ получается в результате действия на $|u\rangle$ некоторого оператора. Если, кроме того, это соответствие линейно, то оно определяет некоторый *линейный оператор* A. Пишут

$$|v\rangle = A\,|u\rangle.$$

Такой оператор равен нулю, если вектор $|v\rangle$ равен нулю при любом векторе $|u\rangle$.

Чтобы оператор A был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы каким бы ни был вектор $|u\rangle$,

$$\langle u\,|\,A\,|\,u\rangle = 0.$$

Доказательство этого свойства не представляет серьезных трудностей, мы не будем на нем останавливаться. Отсюда немедленно следует:

Чтобы два оператора A и B были равны, необходимо и достаточно, чтобы, каким бы ни был вектор $|u\rangle$,

$$\langle u\,|\,A\,|\,u\rangle = \langle u\,|\,B\,|\,u\rangle. \tag{12}$$

Основные операции алгебры операторов были уже указаны (§ II. 11): умножение на постоянную, сумма и произведение. *Сложение* линейных операторов является операцией ассоциативной и коммутативной. *Умножение* ассоциативно, дистрибутивно по отношению к сумме, но — и в этом основное различие между обычной алгеброй и алгеброй линейных операторов — *умножение не коммутативно.* Напомним, что коммутатор двух линейных операторов A и B обозначается символом

$$[A,\,B] \equiv AB - BA.$$

Основные свойства алгебры коммутаторов изучались в § V. 17 (уравнения (V. 63—66)); они все остаются в силе и не будут вновь излагаться здесь.

Заметим, что операция умножения кет-вектора на заданную постояннную c также выражает действие линейного оператора. Этот оператор c коммутирует со всеми линейными операторами, какими бы они ни были: $[A, c] = 0$. В частности, умножение на 1 есть единичный оператор.

Если соответствие между $|u\rangle$ и $|v\rangle$, определенное выше, является взаимооднозначным, то оно определяет два линейных оператора A и B:

$$|v\rangle = A\,|u\rangle, \quad |u\rangle = B\,|v\rangle. \tag{13}$$

Эти операторы, по определению, *обратны* друг другу. Говорят еще, что операторы A и B обратны друг другу, если они одновременно удовлетворяют уравнениям

$$AB = 1, \quad BA = 1. \tag{14}$$

Эти два определения эквивалентны.

Оператор, обратный данному, существует не всегда. Когда он существует, его обычно выражают символом A^{-1}. Пользуясь соотношениями (14), легко получить следующее свойство. Если операторы P, Q имеют обратные операторы, то произведение PQ также имеет обратный оператор, причем

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1} \tag{15}$$

(отметим перестановку порядка сомножителей в правой части (15)).

Если действие линейного оператора A в пространстве кет-векторов известно, то его действие в дуальном векторном пространстве однозначно определяется следующим образом. При задании бра-вектора $\langle\chi|$ скалярное произведение $\langle\chi|\,(A\,|u\rangle)$ есть несомненно линейная функция $|u\rangle$, так как оператор A линеен. Пусть $\langle\eta|$ есть бра-вектор, определяемый этой функцией; тогда каждому бра-вектору $\langle\chi|$ соответствует бра-вектор $\langle\eta|$. Ясно, что это соответствие линейно (свойства скалярного произведения). Говорят, что $\langle\eta|$ получается в результате действия A на $\langle\chi|$ и пишут

$$\langle\eta\,| = \langle\chi\,|\,A. \tag{16}$$

Следуя этому определению, получаем тождество

$$(\langle\chi\,|\,A)\,|\,u\rangle \equiv \langle\chi\,|\,(A\,|\,u\rangle). \tag{17}$$

Скобки в этих двух выражениях оказываются, таким образом, лишними и мы будем писать просто $\langle\chi|A\,|u\rangle$ для обоих равных скалярных произведений.

С помощью тождества (17) можно определить различные операции алгебры линейных операторов, действующих на бра-векторы. В частности, для трех основных операций имеем:

(а) умножение A на комплексную постоянную c:

$$(cA)\,|\,u\rangle = c\,(A\,|\,u\rangle), \quad \text{откуда} \quad \langle\chi\,|\,(cA) = c\,(\langle\chi\,|\,A);$$

(б) сумма операторов $S = A + B$:

$$S\,|u\rangle = A\,|u\rangle + B\,|u\rangle, \quad \text{откуда} \quad \langle\chi\,|\,S = \langle\chi\,|\,A + \langle\chi\,|\,B;$$

(в) произведение операторов $P = AB$:

$$P\,|u\rangle = A\,(B\,|u\rangle, \quad \text{откуда} \quad \langle\chi\,|\,P = (\langle\chi\,|\,A)\,B.$$

При этом действует условие, что бра-векторы пишутся слева, а кет-векторы — справа от символа оператора, тогда алгебраические манипуляции с линейными операторами в обоих случаях производятся одинаково.

Некоторые операторы при использовании указанных выше обозначений оказываются особенно простыми в обращении: это операторы типа $|u\rangle\langle v|$, действие которых на кет $|w\rangle$ дает кет, пропорциональный $|u\rangle$, а именно кет $|u\rangle\langle v|w\rangle$ (множитель пропорциональности $\langle v|w\rangle$), а действие на любой бра $\langle w|$ дает бра, пропорциональный $\langle v|$, а именно бра $\langle w|u\rangle\langle v|$. Оператор $|u\rangle\langle v|$ не имеет обратного.

§ 6. Тензорное произведение [4]) двух векторных пространств

Чтобы завершить это введение в векторную алгебру, остается определить часто используемую операцию образования тензорного произведения двух векторных пространств.

Смысл и интерес этой операции можно иллюстрировать следующим примером. Рассмотрим квантовую систему, состоящую из двух частиц. Произведение $\Psi_1(\boldsymbol{r}_1)\Psi_2(\boldsymbol{r}_2)$ волновой функции $\Psi_1(\boldsymbol{r}_1)$, относящейся к первой частице, на волновую функцию $\Psi_2(\boldsymbol{r}_2)$, относящуюся ко второй частице, представляет некоторое частное состояние этой системы (§ IV. 6). Самая общая волновая функция $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ не есть указанное произведение функций, но может быть всегда представлена как линейная комбинация волновых функций такого вида. Одним из многочисленных способов добиться этого является разложение Ψ в ряд по полной системе ортонормированных функций $\boldsymbol{r}_1$; поскольку коэффициенты такого ряда являются функциями $\boldsymbol{r}_2$, каждый член ряда имеет форму указанного выше произведения. Таким образом, полное пространство волновых функций системы образовано линейными комбинациями произведений волновых функций, относящихся к каждой из отдельных систем $\Psi_1(\boldsymbol{r}_1)$ и $\Psi_2(\boldsymbol{r}_2)$. Говорят, что пространство функций $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ является тензорным произведением пространства функций $\Psi_1(\boldsymbol{r}_1)$ и пространства функций $\Psi_2(\boldsymbol{r}_2)$.

Произведения $\Psi_1(\boldsymbol{r}_1)\Psi_2(\boldsymbol{r}_2)$ играют особую роль при изучении полной системы. Действительно, динамические переменные

[4]) Произведение этого типа часто называется кронекеровым произведением.

частицы 1 представляются некоторыми наблюдаемыми A_1, действующими на функцию $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$, рассматриваемую как функция $\boldsymbol{r}_1$; динамические переменные частицы 2 представляются наблюдаемыми A_2, действующими на ту же функцию, но рассматриваемую как функция $\boldsymbol{r}_2$. Ясно, что каждая наблюдаемая A_1 коммутирует с каждой наблюдаемой A_2. Когда Ψ имеет вид $\Psi_1(r_1)\Psi_2(r_2)$, действие наблюдаемых этого типа особенно просто; так, например, $A_1(\Psi_1\Psi_2)$ равно произведению $A_1\Psi_1$ на Ψ_2.

Предшествующие замечания относятся к любым квантовым системам, допускающим разделение на две более простые системы.

На абстрактном математическом языке, которым мы пользуемся в этой главе, тензорное произведение может быть определено следующим образом. Пусть мы имеем два векторных пространства $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$. Взяв один кет-вектор $|u\rangle^{(1)}$ из первого и один кет-вектор $|u\rangle^{(2)}$ из второго пространства, можно образовать произведение кет-векторов $|u\rangle^{(1)}|u\rangle^{(2)}$. Операция образования такого произведения коммутативна и мы используем обозначение

$$|u^{(1)}u^{(2)}\rangle \equiv |u\rangle^{(1)}\,|u\rangle^{(2)}. \tag{18}$$

Кроме того, предположим, что эта операция дистрибутивна по отношению к сумме. Если

$$|u\rangle^{(1)} = \lambda\,|v\rangle^{(1)} + \mu\,|w\rangle^{(1)},$$

то

$$|u^{(1)}u^{(2)}\rangle = \lambda\,|v^{(1)}u^{(2)}\rangle + \mu\,|w^{(1)}u^{(2)}\rangle.$$

Аналогично, если

$$|u\rangle^{(2)} = \lambda\,|v\rangle^{(2)} + \mu\,|w\rangle^{(2)},$$

то

$$|u^{(1)}u^{(2)}\rangle = \lambda\,|u^{(1)}v^{(2)}\rangle + \mu\,|u^{(1)}w^{(2)}\rangle.$$

На кет-векторы $|u^{(1)}u^{(2)}\rangle$ натянуто новое векторное пространство, пространство $\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2$, которое называется *тензорным произведением векторных пространств* $\mathscr{E}^{(1)}$ *и* $\mathscr{E}^{(2)}$. Если размерности этих пространств равны соответственно N_1 и N_2, то число измерений пространства-произведения равно N_1N_2. Однако операция образования тензорного произведения возможна и когда пространства обладают бесконечным числом измерений, как это показывает разобранный выше пример.

Каждому линейному оператору $A^{(1)}$ пространства $\mathscr{E}^{(1)}$ соответствует линейный оператор пространства-произведения, который мы обозначим тем же символом. Если действие оператора $A^{(1)}$ на любой кет $|u\rangle^{(1)}$ известно

$$A^{(1)}\,|u\rangle^{(1)} = |v\rangle^{(1)},$$

то действие этого оператора на кет-векторы $|u^{(1)}u^{(2)}\rangle$ пространства-произведения определяется формулой

$$A^{(1)}\,|u^{(1)}u^{(2)}\rangle = |v^{(1)}u^{(2)}\rangle, \tag{19}$$

а его действие на произвольный кет-вектор пространства-произведения получается с помощью линейной суперпозиции. Аналогично каждый линейный оператор $A^{(2)}$ пространства $\mathscr{E}^{(2)}$ позволяет определить линейный оператор в пространстве-произведении.

Каждый из операторов $A^{(1)}$ коммутирует с каждым из операторов $A^{(2)}$

$$[A^{(1)}, A^{(2)}] = 0.$$

Нетрудно проверить, пользуясь самими определениями операторов $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, что действие коммутатора на всякий вектор $|u^{(1)}u^{(2)}\rangle$ дает нуль:

$$A^{(1)}A^{(2)}\,|u^{(1)}u^{(2)}\rangle = |v^{(1)}v^{(2)}\rangle = A^{(2)}A^{(1)}\,|u^{(1)}u^{(2)}\rangle.$$

В пространстве-произведении можно определить соответствие между кет- и бра-векторами, действие линейных операторов на бра-векторы и т. д. Алгебраические правила, указанные выше, остаются справедливыми для всех алгебраических операций в пространстве-произведении. Доказательство этих результатов не составляет труда и будет здесь опущено.

Раздел II. ЭРМИТОВЫ ОПЕРАТОРЫ, ПРОЕКТОРЫ И НАБЛЮДАЕМЫЕ

§ 7. Сопряженные операторы и правила сопряжения

Исходя из взаимооднозначного соответствия между сопряженными бра- и кет-векторами, можно получить аналогичное правило сопряжения между линейными операторами.

Пусть A — линейный оператор. Пусть $|v\rangle$ есть кет-вектор, сопряженный бра-вектору $\langle u|A$. Вектор $|v\rangle$ зависит от бра-вектора $\langle u|$ антилинейно, следовательно, это линейная функция $|u\rangle$. Такое линейное соответствие определяет линейный оператор, который называют оператором, *эрмитово сопряженным* A, или оператором, *присоединенным к* A, и обозначают символом $A^{\dagger}$:

$$|v\rangle = A^{\dagger}\,|u\rangle.$$

Ясно, что $A^{\dagger} = 0$, если $A = 0$, и наоборот.

Поскольку $A^{\dagger}|u\rangle$ есть кет-вектор, сопряженный бра-вектору $\langle u|A$, скалярное произведение этого кет-вектора на произволь-