## Раздел I. ДИНАМИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

### § 2. Определение вероятностей. Постулаты измерения

Каждому динамическому состоянию соответствует некоторое статистическое распределение значений каждой из динамических переменных, характеризующих систему. Вычисление распределений основано на постулате:

*Среднее значение некоторой функции $F(A)$ от заданной физической величины $A$ дается выражением*

$$\langle F(A)\rangle = \langle u \mid F(A) \mid u\rangle, \tag{1}$$

*где кет-вектор $|u\rangle$ представляет динамическое состояние, а наблюдаемая $A$ — заданную физическую величину.*

В частности, характеристическая функция $f(\xi)$ статистического распределения $A$ есть среднее значение функции $e^{i\xi A}$:

$$f(\xi) = \langle u \mid e^{i\xi A} \mid u\rangle. \tag{2}$$

Поскольку статистическое распределение полностью определяется заданием характеристической функции, указанный постулат позволяет вычислить статистические распределения всех динамических переменных системы.

Выясним, как основной постулат влияет на соответствие между динамическими состояниями и кет-векторами. Каким бы ни был оператор $F(A)$, выражение (1) не меняется при умножении вектора $|u\rangle$ на произвольный фазовый множитель $e^{i\alpha}$ ($\alpha$ — некоторое вещественное число). Следовательно, статистические распределения, относящиеся к двум векторам, различающимся на фазовый множитель, строго одинаковы: два таких вектора представляют одно динамическое состояние. Другими словами, каждому динамическому состоянию соответствует вектор, определенный с точностью до фазового множителя. С другой стороны, поскольку $f(0) = 1$ (среднее значение 1 равно 1), необходимо, чтобы вектор $|u\rangle$ был нормирован на единицу

$$\langle u \mid u\rangle = 1. \tag{3}$$

Часто бывает удобно отказаться от последнего условия. С этой целью определение (1) для средних значений заменяют более общим выражением

$$\langle F(A)\rangle = \frac{\langle u \mid F(A) \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle}. \tag{4}$$

При таком определении два пропорциональные друг другу вектора представляют одно и то же динамическое состояние (подразумевается, конечно, что векторы, о которых идет речь, имеют ограниченную норму).

Чтобы получить статистическое распределение $A$ в явном виде, следует вычислить выражение (2) для характеристической функции $f(\xi)$ (или выражение (4), если $|u\rangle$ не нормирован на единицу) в представлении, где наблюдаемая $A$ диагональна. Этот метод уже был изложен в гл. V, правда, с незначительными отличиями в терминологии. Здесь мы не будем вновь повторять сказанное там. Ограничимся формулировкой результатов[2]:

1) Значения, которые может принимать величина $A$, принадлежат спектру собственных значений соответствующей наблюдаемой.

2) Пусть $\mathcal{E}_D$ есть подпространство, натянутое на собственные векторы $A$, принадлежащие собственным значениям, лежащим в некоторой области $D$ спектра $A$; обозначим с помощью $|u_D\rangle \equiv P_D|u\rangle$ проекцию кет-вектора $|u\rangle$ на $\mathcal{E}_D$. Вероятность $w_D$ того, что результат измерения $A$ принадлежит области $D$ равна[3])

$$w_D = \langle P_D\rangle = \frac{\langle u_D \mid u_D\rangle}{\langle u \mid u\rangle}. \tag{5}$$

Выражение (5) объединяет все результаты, полученные в частных случаях, рассмотренных в гл. V (задача 1). Действительно, $D$ может быть одним собственным значением дискретного спектра и тогда (5) совпадает с формулой (V.21). Но $D$ может быть также образована совокупностью нескольких различных дискретных собственных значений или быть частью непрерывного спектра, или же некоторой комбинацией двух предшествующих случаев. В частности, если $D$ есть бесконечно малый интервал $(a(\nu), a(\nu+d\nu))$ непрерывного спектра, как в примере в конце § V.10, то $w_D = \omega(\nu)\, d\nu$, и плотность вероятности $\omega(\nu)$, вычисленная с помощью формулы (5), совпадает с той, которая получилась из (V.44).

Остается определить динамическое состояние системы по окончании измерения. Оно, конечно, будет зависеть от конкретных условий эксперимента, но может быть просто получено в случае *идеального измерения* (см. § V.13). Если в предположении идеального измерения наблюдение показывает, что система находится в собственном состоянии $A$, принадлежащем указанной выше области $D$, то динамическое состояние системы после измерения представляется проекцией вектора $|u\rangle$ на пространство $\mathcal{E}_D$. Иными словами, изменение (некаузальное)

---

[2]) В некоторых книгах по квантовой теории два нижеследующих свойства называются соответственно *принципом квантования и принципом спектрального разложения.*

[3]) $w_D$ есть среднее значение проектора $P_D$, т. е. функции $A$, равной 1 для всех собственных векторов $A$, находящихся в $\mathcal{E}_D$, и равной нулю для всех собственных векторов $A$, ортогональных к $\mathcal{E}_D$.

вектора состояния в процессе измерения соответствует схеме:

$|u\rangle \to$ идеальное измерение, дающее результат $D \to P_D|u\rangle$.

Этот постулат редукции волнового пакета может рассматриваться как определение идеального измерения.

Если условиться всегда представлять динамические состояния векторами, нормированными на единицу, то вектор состояния системы после измерения есть $P_D|u\rangle$, умноженный на фактор нормировки, определяемый с точностью до фазы, квадрат модуля которого равен $1/w_D$ или $1/\langle u|P_D|u\rangle$.

## § 3. Наблюдаемые квантовой системы и соотношения коммутации

На первом этапе исследования квантовой системы следует установить динамические переменные системы и построить алгебру соответствующих наблюдаемых. На деле различные наблюдаемые системы могут быть выражены как функции некоторого числа «основных наблюдаемых»; тогда искомые правила алгебры наблюдаемых можно получить с помощью правил коммутации этих основных наблюдаемых.

Когда *квантовая система обладает классическим аналогом*, что имело место во всех рассмотренных до сих пор случаях, можно установить самые общие правила, основанные на принципе соответствия.

В классической системе $N$ измерений самой общей динамической переменной будет функция $2N$-независимых переменных — $N$ пространственных координат $q_1, q_2, \ldots, q_N$ и $N$ импульсов $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Те же самые динамические переменные приписываются квантовой системе. Вводятся $N$ переменных положения и $N$ переменных импульса. Этим переменным соответствуют наблюдаемые, которые мы обозначим теми же символами $q_1, \ldots, q_N$ и $p_1, \ldots, p_N$. Постулируем, что единственными некоммутирующими наблюдаемыми являются $N$ пар, в которые входят пространственная координата и ее канонически сопряженный импульс; для этих пар имеем $[q_r, p_r] = i\hbar$. Таким образом,

$$[q_r, q_s] = 0, \quad [p_r, p_s] = 0, \tag{6}$$

$$[q_r, p_s] = i\hbar\delta_{rs} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, N), \tag{7}$$

Поскольку произвольные наблюдаемые являются функциями $q$ и $p$, коммутаторы наблюдаемых находятся с помощью соотношений (6) и (7); их можно вычислить явно, пользуясь правилами алгебры коммутаторов (§ V. 17). Это соответствие между наблюдаемыми квантовой системы и величинами классической системы — аналога уже неоднократно комментировалось (§ II. 15 и § V. 3). Чтобы избежать неопределенности, следует всегда исходить из декартовых координат в конфигурационном пространстве и руководствоваться эмпирическими правилами § II. 15. В частности, правило «симметризации», данное в этом параграфе, гарантирует, что всякой вещественной величине, принадлежащей системе, сопоставляется эрмитов оператор.

Однако не все квантовые системы могут рассматриваться на основе принципа соответствия. Часто оказывается, что динамические переменные, вводимые на основе принципа соответствия с классической системой, не исчерпывают физических свойств исследуемой квантовой системы. В этом случае необходимо вводить дополнительные переменные. Выбор этих новых переменных и правил коммутации для них основывается на чисто интуитивных соображениях.

Среди физических величин, характеризующих систему, особо следует отметить энергию. Представляющая ее наблюдаемая $H$ называется гамильтонианом системы. Если система имеет классический аналог, то $H$ получается на основе принципа соответствия из функции Гамильтона классической механики.

## § 4. Соотношения неопределенности Гейзенберга

Соотношения неопределенности для координаты и импульса следуют непосредственно из соотношений коммутации (7).

Покажем в самом общем случае, что если две наблюдаемые $A$, $B$ удовлетворяют уравнению

$$[A, B] = i\hbar, \tag{8}$$

то произведение их средних квадратичных отклонений всегда удовлетворяет неравенству

$$\Delta A \cdot \Delta B \geqslant \hbar/2. \tag{9}$$

Доказательство по существу аналогично рассмотрению § IV. 8.

По определению

$$\Delta A = (\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2)^{1/2}, \quad \Delta B = (\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2)^{1/2}.$$

Введем наблюдаемые

$$\hat{A} = A - \langle A \rangle, \quad \hat{B} = B - \langle B \rangle;$$

тогда очевидно, что

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar$$

и что

$$\Delta A = \Delta \hat{A} = \langle \hat{A}^2 \rangle^{1/2}, \quad \Delta B = \Delta \hat{B} = \langle \hat{B}^2 \rangle^{1/2}.$$

Допустим, что динамическое состояние системы представляется кет-вектором $|u\rangle$, нормированным на единицу, и применим неравенство Шварца к векторам $\hat{A}|u\rangle$ и $\hat{B}|u\rangle$:

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \equiv \langle u | \hat{A}^2 | u \rangle \langle u | \hat{B}^2 | u \rangle \geqslant | \langle u | \hat{A}\hat{B} | u \rangle |^2.$$

Выделяя в $\hat{A}\hat{B}$ эрмитову и антиэрмитову части (ср. уравнение (VII. 29))

$$\hat{A}\hat{B} = \frac{\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}}{2} + \frac{\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}}{2} + i\,\frac{\hbar}{2},$$

можно выделить в $\langle u|\hat{A}\hat{B}|u\rangle$ вещественную и мнимую части

$$\langle u | \hat{A}\hat{B} | u \rangle = \left\langle \frac{\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}}{2} \right\rangle + i\,\frac{\hbar}{2}$$

и переписать неравенство Шварца в виде

$$(\Delta A)^2 \cdot (\Delta B)^2 \geqslant \left\langle \frac{\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}}{2} \right\rangle^2 + \frac{\hbar^2}{4},$$

т. е.

$$\Delta A \cdot \Delta B \geqslant \hbar/2,$$

что и требовалось доказать.

Чтобы произведение $\Delta A \cdot \Delta B$ стало равным своему наименьшему значению $\hbar/2$ необходимо с одной стороны, чтобы неравенство Шварца свелось к равенству, т. е. чтобы $\hat{A}|u\rangle = c\hat{B}|u\rangle$ ($c$ — произвольная постоянная), а с другой стороны, чтобы среднее значение $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ было равно нулю, т. е.

$$\langle u | \hat{A}\hat{B} | u \rangle + \langle u | \hat{B}\hat{A} | u \rangle = (c^* + c) \langle u | \hat{B}^2 | u \rangle = 0,$$

откуда $\mathrm{Re}\, c = 0$. Резюмируя, находим, что неравенство (9) сводится к равенству в том и только в том случае, когда $|u\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$(A - \alpha)|u\rangle = i\gamma (B - \beta)|u\rangle, \tag{10}$$

где $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ суть произвольные вещественные постоянные.

Приложение этого результата к паре координата — импульс $(q_r, p_r)$ предшествующего параграфа дает соотношение неопределенности

$$\Delta q_r \cdot \Delta p_r \geqslant \hbar/2 \qquad (r = 1, 2, \ldots, N), \tag{11}$$

причем равенство выполняется, если $|u\rangle$ есть решение уравнения

$$(p_r - i\gamma q_r)|u\rangle = (\alpha - i\gamma\beta)|u\rangle$$

($\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — произвольные вещественные постоянные).

## § 5. Определение состояний и построение пространства $\mathcal{E}$

После определения наблюдаемых нашей квантовой системы и установления коммутационных соотношений необходимо точно определить различные возможные квантовые состояния, т. е. необходимо построить гильбертово пространство, в котором действуют наблюдаемые. Для этого достаточно задать систему базисных векторов пространства и установить действие наблюдаемых на эти векторы. Следует, конечно, убедиться, что все операторы, представляющие физические величины, действительно являются наблюдаемыми, удовлетворяющими коммутационным соотношениям.

Чтобы определить базисную систему векторов, из всей совокупности наблюдаемых выделяют полный набор коммутирующих наблюдаемых $A$, $B$, $C$, ... Одновременное измерение соответствующих динамических переменных дает максимально возможную информацию о состоянии системы, т. е. полностью определяет некоторое динамическое состояние системы. Следовательно, каждый набор собственных значений $a$, $b$, $c$, ... этих наблюдаемых определяет вектор в пространстве $\mathcal{E}$ с точностью до постоянного множителя; произвольно фиксируя этот множитель, находим некоторый вектор $|abc\ldots\rangle$. Множество векторов $|abc\ldots\rangle$, получаемое при изменении каждого собственного значения $a$, $b$, $c$, ... на всем протяжении спектров $A$, $B$, $C$, ... образует полную ортогональную систему векторов в пространстве $\mathcal{E}$. Если же фиксировать подходящим образом нормировку векторов $|abc\ldots\rangle$ — нормировку на единицу для векторов с конечной нормой, нормировку с помощью $\delta$-функции Дирака для векторов, соответствующих непрерывному спектру, — то мы получим полную ортонормированную систему в $\mathcal{E}$. Таким образом, базисная система векторов в $\mathcal{E}$ определяется при задании спектров наблюдаемых $A$, $B$, $C$, ...

Действие базисных наблюдаемых $A$, $B$, $C$, ... на каждый из этих векторов оказывается автоматически определенным. Остается выяснить, как действуют на них другие наблюдаемые, способные представлять физические величины.

Рассмотрение одних только соотношений коммутации позволяет, вообще говоря:

а) убедиться в том, что набор $A$, $B$, $C$, ... составляет полный набор коммутирующих наблюдаемых;

б) определить структуру спектров этих наблюдаемых;

в) установить действие других наблюдаемых на векторы базисной системы.

Иначе говоря, знания алгебры наблюдаемых системы почти всегда достаточно для однозначного определения пространства $\mathscr{E}$, в котором они действуют[4]).

Остается еще убедиться во внутренней согласованности полученной схемы, т. е. проверить, что операторы, представляющие физические величины, действительно являются наблюдаемыми.

Заметим, что на этом этапе теория уже допускает экспериментальную проверку. Физические величины определяются в принципе с помощью точных операций измерения, так что спектры их значений могут быть проверены на опыте. Необходимо, чтобы теоретический спектр, т. е. спектр собственных значений наблюдаемой, сопоставленной каждой физической величине, совпадал с результатами эксперимента.

## § 6. Квантовая одномерная система, обладающая классическим аналогом

Применим метод построения пространства $\mathscr{E}$ из § 5 к одномерной квантовой системе, обладающей классическим аналогом; наблюдаемые такой системы являются функциями двух из них, а именно $q$ и $p$, связанных соотношением коммутации

$$[q, p] = i\hbar. \tag{12}$$

Величина $q$ сама по себе образует полный набор коммутирующих наблюдаемых. Действительно, коммутатор $q$ и заданной функции $A(q, p)$ согласно уравнению (V.68) равен

$$[q, A] = i\hbar \frac{\partial A}{\partial p}, \tag{13}$$

следовательно, $q$ коммутирует с $A$ только, если $A$ не зависит от $p$; иными словами, единственными наблюдаемыми, коммутирующими с $q$, являются функции от $q$.

Простые соображения внутренней согласованности накладывают очень строгие условия на собственные функции и спектр собственных значений $q$. Пусть $|q_0\rangle$ есть собственный кет-вектор $q$

$$q\,|q_0\rangle = q_0\,|q_0\rangle.$$

[4]) Это справедливо только, если пространство $\mathscr{E}$ является неприводимым по отношению к указанным наблюдаемым; это условие, которое мы отмечаем здесь для полноты, всегда считается выполненным в дальнейших рассуждениях. Понятие неприводимости и его физический смысл будут подробно обсуждаться в гл. XV (§ 6).

Запишем условие того, что обе части равенства (12) имеют один и тот же диагональный элемент, соответствующий $|q_0\rangle$:

$$i\hbar\langle q_0|q_0\rangle = \langle q_0|qp|q_0\rangle - \langle q_0|pq|q_0\rangle;$$

$|q_0\rangle$ не может иметь конечной нормы, так как в противном случае правая часть равенства была бы равна нулю, а левая часть конечна и не равна нулю.

Рассмотрим далее оператор сдвига

$$S(\xi) = e^{-\frac{i}{\hbar}p\xi}. \tag{14}$$

Это функция наблюдаемой $p$, зависящая от параметра $\xi$. Ясно, что это унитарный оператор

$$S^+S = SS^+ = 1,$$

так как эрмитово сопряженный оператор есть

$$S^+(\xi) = S(-\xi) = e^{\frac{i}{\hbar}p\xi}.$$

Применяя уравнение (12), находим

$$[q, S] = i\hbar\frac{\partial S}{\partial p} = \xi S,$$

т. е.

$$qS = S(q+\xi) \tag{15}$$

и, следовательно,

$$qS|q_0\rangle = S(q+\xi)|q_0\rangle = (q_0+\xi)S|q_0\rangle. \tag{16}$$

Таким образом, $S|q_0\rangle$ есть собственный вектор $q$, принадлежащий собственному значению $q_0+\xi$. Этот вектор, очевидно, не равен нулю (в противном случае не существовало бы оператора, обратного $S$); его норма (бесконечная) та же, что и $|q_0\rangle$, ибо $S$ — унитарный оператор

$$\langle q_0|S^+S|q_0\rangle = \langle q_0|q_0\rangle.$$

Все это справедливо, каким бы ни было значение $\xi$ во всем интервале $(-\infty, +\infty)$. Так, с помощью унитарного преобразования $|q_0\rangle$ с подходящим параметром можно образовать собственный кет-вектор $q$, соответствующий любому наперед заданному собственному значению в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Мы приходим к заключению, что спектр $q$ непрерывный, невырожденный и заполняет весь интервал $(-\infty, +\infty)$; собственные векторы имеют бесконечную норму.

Обозначим с помощью $|q'\rangle$ один из собственных кет-векторов $q$, принадлежащий собственному значению $q'$

$$q|q'\rangle = q'|q'\rangle;$$

$|q'\rangle$ определяется с точностью до постоянного множителя, абсолютную величину которого фиксируем условием нормировки

$$\langle q' | q'' \rangle = \delta(q' - q''). \tag{17}$$

Пространство $\mathscr{E}$, по определению, образовано линейными комбинациями векторов $|q'\rangle$.

Величина $q$ очевидно является наблюдаемой этого пространства. Векторы $|q'\rangle$ суть базисные векторы некоторого представления векторов и операторов $\mathscr{E}$, а именно представления $\{q\}$, в котором оператор $q$ диагонален

$$\langle q' | q | q'' \rangle = q'\delta(q' - q''). \tag{18}$$

Покажем, что $p$ есть вполне определенный эрмитов оператор в пространстве $\mathscr{E}$; для этого достаточно найти его матрицу в представлении $\{q\}$.

Рассмотрим вначале унитарный оператор $S(\xi)$, определенный уравнением (14). Поскольку этот оператор удовлетворяет уравнению (15), $S(\xi)|q'\rangle$ есть собственный вектор $q$, принадлежащий собственному значению $(q' + \xi)$:

$$S(\xi)|q'\rangle = c\,|q' + \xi\rangle,$$

где $c$ — фазовый множитель[5]), который может зависеть от $\xi$ и $q'$. Выберем фазы базисных векторов так, чтобы

$$|q'\rangle = S(q')\,|0\rangle.$$

При этом фазовый множитель $c$ будет равен 1, какими бы ни были $\xi$ и $q'$. Действительно,

$$S(\xi)\,|q'\rangle = S(\xi)\,S(q')\,|0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}p\xi}e^{-\frac{i}{\hbar}pq'}\,|0\rangle =$$
$$= e^{-\frac{i}{\hbar}p(\xi+q')}\,|0\rangle = S(q' + \xi)\,|0\rangle = |q' + \xi\rangle \tag{19}$$

или

$$\langle q' | S(\xi) | q'' \rangle = \langle q' | q'' + \xi \rangle = \delta(q' - q'' - \xi).$$

Зная таким образом матричные элементы $S(\xi)$ для любых значений параметра $\xi$ и учитывая, что в пределе бесконечно малых значений этого параметра $(\xi \to \varepsilon)$

$$S(\varepsilon) \sim 1 - \frac{i}{\hbar}p\varepsilon,$$

можем написать

$$\delta(q' - q'' - \varepsilon) = \langle q' | S(\varepsilon) | q'' \rangle \sim \delta(q' - q'') - \frac{i}{\hbar}\varepsilon \langle q' | p | q'' \rangle,$$

---

[5]) Ввиду того, что $S$ — унитарный оператор, имеем

$$\langle q'' | S^{+}(\xi)\,S(\xi) | q' \rangle = c^{*}(\xi, q'')\,c(\xi, q')\,\delta(q'' - q') = \delta(q'' - q'),$$

откуда $|c(\xi, q')| = 1$.

откуда

$$\langle q' | p | q'' \rangle = \frac{\hbar}{i} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta(q' - q'') - \delta(q' - q'' - \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\hbar}{i} \delta'(q' - q''). \qquad (20)$$

Поскольку «функция» $\delta'$ нечетна, ясно, что $\langle q'' | p | q' \rangle = \langle q' | p | q'' \rangle^*$, т. е. оператор $p$ эрмитов.

Проверим также, что $q$ и $p$ удовлетворяют условию коммутации (12):

$$\langle q' | (qp - pq) | q'' \rangle = \langle q' - q'' \rangle \langle q' | p | q'' \rangle = \\ = \frac{\hbar}{i} (q' - q'') \delta'(q' - q'') = i\hbar \delta(q' - q'')$$

(здесь использовано тождество (A.30) из дополнения A).

Остается показать, что $p$ есть наблюдаемая. Для этого решим задачу о собственных значениях $p$ в представлении $\{q\}$. Пусть $| p' \rangle$ — собственный кет-вектор, принадлежащий собственному значению $p'$. Уравнение

$$p | p' \rangle = p' | p' \rangle$$

в представлении $\{q\}$, с учетом уравнения (20), записывается в форме

$$p' \langle q' | p' \rangle = \langle q' | p | p' \rangle = \int \langle q' | p | q'' \rangle \, dq'' \langle q'' | p' \rangle = \\ = \frac{\hbar}{i} \int \delta'(q' - q'') \langle q'' | p' \rangle \, dq'' = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq'} (\langle q' | p' \rangle).$$

Это дифференциальное уравнение для функции $\langle q' | p' \rangle$ от переменной $q'$; общее его решение есть

$$\langle q' | p' \rangle = a e^{\frac{i}{\hbar} p' q'},$$

где $a$ — произвольная постоянная. Оказывается, таким образом, что $p$ имеет непрерывный спектр собственных значений $p'$, простирающийся от $-\infty$ до $+\infty$. Собственные векторы имеют бесконечную норму, они удовлетворяют условиям ортонормировки

$$\langle p' | p'' \rangle = \delta(p' - p''),$$

если принять $a = (2\pi\hbar)^{-1/2}$. Теперь ясно, что $p$ наблюдаемая, ибо векторы $| p' \rangle$ удовлетворяют соотношению замкнутости. Действительно, оператор проектирования

$$P_p \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} | p' \rangle \, dp' \langle p' |$$

в представлении $\{q\}$ имеет матричные элементы

$$\langle q' | P_p | q'' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle q' | p' \rangle \, dp' \, \langle p' | q'' \rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar} p' (q' - q'')} \, dp' = \delta (q' - q'').$$

Следовательно,

$$P_p = 1.$$

С помощью основных наблюдаемых $p$ и $q$ можно построить любой оператор $F(p, q)$, представляющий различные динамические переменные системы. Всякий раз нетрудно проверить, что эти операторы эрмитовы. Для полноты следует показать, что они являются наблюдаемыми. Обычно в квантовой теории проходят мимо этих тонкостей и принимают без обсуждения, что все эрмитовы операторы, представляющие физические величины, являются наблюдаемыми.

## § 7. Построение пространства состояний путем тензорного умножения более простых пространств

Умея строить пространство $\mathscr{E}$ для одномерной системы, обладающей классическим аналогом, нетрудно решить ту же задачу для системы, также обладающей классическим аналогом, но уже с числом степеней свободы $N$.

В этом случае динамические переменные будут функциями $2N$ основных переменных положения и импульса. Представляющие их наблюдаемые подчиняются коммутационным соотношениям (6) и (7). Их можно подразделить на $N$ пар $(q_1, p_1)$, $(q_2, p_2)$, $\ldots$, $(q_N, p_N)$, каждая из которых состоит из некоторой координаты и соответствующего канонически сопряженного импульса. Каждая пара наблюдаемых коммутирует со всеми наблюдаемыми из других пар.

Наблюдаемые данной пары, например $(q_i, p_i)$, могут рассматриваться как основные наблюдаемые одномерной системы того типа, который изучался в предшествующем параграфе. Мы уже умеем строить пространство состояний $\mathscr{E}_i$ такой системы: согласно результатам § 6, $\mathscr{E}_i$ образовано линейной суперпозицией ортонормированных кет-векторов $|q'_i\rangle$, причем индекс $q'_i$ изменяется непрерывно во всем интервале $(-\infty, +\infty)$.

Пространство $\mathscr{E}$ динамических состояний системы с $N$ степенями свободы получается как тензорное произведение (см. § VII. 6) одномерных пространств $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\ldots$, $\mathscr{E}_N$:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2 \otimes \ldots \otimes \mathscr{E}_N,$$

иными словами, это пространство натянуто на кет-векторы

$$|q_1'q_2' \dots q_N'\rangle \equiv |q_1'\rangle |q_2'\rangle \dots |q_N'\rangle. \tag{21}$$

Каждой паре операторов $q_i$, $p_i$ пространства $\mathscr{E}_i$ соответствует вполне определенная пара операторов $q_i$, $p_i$ пространства — произведения $\mathscr{E}$. Таким образом, для представления $2N$ основных переменных мы получаем $2N$ вполне определенных операторов, действующих в $\mathscr{E}$. Согласно правилам тензорного умножения каждой наблюдаемой парциального пространства соответствует наблюдаемая полного пространства, две наблюдаемые из различных парциальных пространств коммутируют между собой, две наблюдаемые из одного парциального пространства $\mathscr{E}_i$ подчиняются в $\mathscr{E}$ тем же соотношениям коммутации, которым они подчиняются в $\mathscr{E}_i$. Следовательно, построенные нами в $\mathscr{E}$ операторы $q_1, \dots, q_N$; $p_1, \dots, p_N$ являются наблюдаемыми и подчиняются коммутационным соотношениям (6) и (7).

Множество векторов $|q_1', \dots, q_N'\rangle$, получающееся при изменении каждого собственного значения $q_1', \dots, q_N'$ в интервале $(-\infty, +\infty)$, образует базисную систему в $\mathscr{E}$ и определяет некоторое представление, а именно представление $\{q\}$. Полезно выписать в явном виде матричные элементы $q$ и $p$ в этом представлении. Для этого используем сокращенные обозначения:

$$|q'\rangle \equiv |q_1'q_2' \dots q_N'\rangle, \tag{22}$$

$$\delta(q' - q'') \equiv \prod_{i=1}^{N} \delta(q_i' - q_i'') \equiv \delta(q_1' - q_1'')\,\delta(q_2' - q_2'') \dots \\ \dots \delta(q_N' - q_N''), \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_n'}[\delta(q' - q'')] \equiv \delta'(q_n' - q_n'') \prod_{i \neq n} \delta(q_i' - q_i''). \tag{24}$$

Символ $\prod\limits_{i \neq n}$ обозначает произведение $N - 1$ сомножителей, исключая множитель с индексом $n$.

Применяя соотношения (17), (18) и (20) из § 6, получим последовательно: условия ортонормированности

$$\langle q' | q'' \rangle = \prod_{i=1}^{N} \langle q_i' | q_i'' \rangle = \delta(q' - q''); \tag{25}$$

матричные элементы (диагональные) координат

$$\langle q' | q_n | q'' \rangle = \langle q_n' | q_n | q_n'' \rangle \prod_{i \neq n} \langle q_i' | q_i'' \rangle = q_n' \delta(q' - q'') \tag{26}$$

и матричные элементы (недиагональные) импульсов

$$\langle q' | p_n | q'' \rangle = \langle q'_n | p_n | q''_n \rangle \prod_{i \neq n} \langle q'_i | q''_i \rangle =$$

$$= \frac{\hbar}{i} \delta' (q'_n - q''_n) \prod_{i \neq n} \delta(q'_i - q''_i) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q'_n} \delta (q' - q''). \qquad (27)$$

Выполнение коммутационных соотношений (6) и (7) нетрудно проверить, пользуясь приведенными здесь явными выражениями элементов матриц, представляющих $q$ и $p$.

Любая динамическая переменная системы является функцией $q$ и $p$, поэтому ей соответствует некоторый оператор, вполне определенный в пространстве $\mathscr{E}$. Следует, конечно, убедиться в том, что этот оператор является наблюдаемой. Однако согласно сделанному выше замечанию этот пункт в квантовой теории обычно принимают без обсуждения.

Метод построения пространства состояний системы путем тензорного умножения более простых пространств имеет самое широкое применение. На практике динамические переменные системы всегда можно представить в виде функций от некоторого числа «основных» переменных, а эти переменные часто можно классифицировать по отдельным подмножествам, так что переменная, принадлежащая одному подмножеству, совместна со всеми переменными других подмножеств. Предположим, например, что нам удалось разделить «основные» переменные на два подмножества $(A_1, B_1, \ldots)$ и $(A_2, B_2, \ldots)$ и что каждая переменная (1) совместна с каждой переменной (2). Каждое подмножество само по себе определяет парциальную систему, пространство состояний которой мы умеем строить. Пусть $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ суть пространства состояний, относящиеся к парциальным системам (1) и (2). Тогда очевидно, что пространство состояний $\mathscr{E}$ полной системы есть тензорное произведение двух парциальных пространств

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2.$$

## Раздел II. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

### § 8. Оператор эволюции и уравнение Шредингера

Мы хорошо знаем, что на микроскопическом уровне нельзя четко отделить физическую систему от измерительного аппарата, поэтому эволюция квантовой системы, подвергнутой некоторому измерению, перестает быть каузальной. Напротив, эволюция системы, изолированной от всяких внешних воздействий, может быть точно предсказана. Пусть $|\psi(t_0)\rangle$ — кет-век-