и матричные элементы (недиагональные) импульсов

$$\langle q' | p_n | q'' \rangle = \langle q'_n | p_n | q''_n \rangle \prod_{i \neq n} \langle q'_i | q''_i \rangle =$$
$$= \frac{\hbar}{i} \delta' (q'_n - q''_n) \prod_{i \neq n} \delta(q'_i - q''_i) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q'_n} \delta (q' - q''). \qquad (27)$$

Выполнение коммутационных соотношений (6) и (7) нетрудно проверить, пользуясь приведенными здесь явными выражениями элементов матриц, представляющих q и p.

Любая динамическая переменная системы является функцией q и p, поэтому ей соответствует некоторый оператор, вполне определенный в пространстве $\mathscr{E}$. Следует, конечно, убедиться в том, что этот оператор является наблюдаемой. Однако согласно сделанному выше замечанию этот пункт в квантовой теории обычно принимают без обсуждения.

Метод построения пространства состояний системы путем тензорного умножения более простых пространств имеет самое широкое применение. На практике динамические переменные системы всегда можно представить в виде функций от некоторого числа «основных» переменных, а эти переменные часто можно классифицировать по отдельным подмножествам, так что переменная, принадлежащая одному подмножеству, совместна со всеми переменными других подмножеств. Предположим, например, что нам удалось разделить «основные» переменные на два подмножества $(A_1, B_1, \ldots)$ и $(A_2, B_2, \ldots)$ и что каждая переменная (1) совместна с каждой переменной (2). Каждое подмножество само по себе определяет парциальную систему, пространство состояний которой мы умеем строить. Пусть $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ суть пространства состояний, относящиеся к парциальным системам (1) и (2). Тогда очевидно, что пространство состояний $\mathscr{E}$ полной системы есть тензорное произведение двух парциальных пространств

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2.$$

Раздел II. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 8. Оператор эволюции и уравнение Шредингера

Мы хорошо знаем, что на микроскопическом уровне нельзя четко отделить физическую систему от измерительного аппарата, поэтому эволюция квантовой системы, подвергнутой некоторому измерению, перестает быть каузальной. Напротив, эволюция системы, изолированной от всяких внешних воздействий, может быть точно предсказана. Пусть $|\psi(t_0)\rangle$ — кет-вектор, представляющий динамическое состояние системы в момент времени t_0, тогда кет-вектор $|\psi(t)\rangle$, представляющий состояние в некоторый последующий момент t, вполне определяется заданием $|\psi(t_0)\rangle$, если, что мы и будем предполагать в дальнейшем, система не подвергается измерению в промежуток времени (t_0, t). В данном параграфе мы изучим этот фундаментальный закон эволюции системы.

В первую очередь постулируем, что *линейная суперпозиция* состояний сохраняется во времени. Отсюда следует, что соответствие между $|\psi(t_0)\rangle$ и $|\psi(t)\rangle$ является линейным и определяет некоторый линейный оператор $U(t, t_0)$, который называется *оператором эволюции*

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)\,|\psi(t_0)\rangle. \tag{28}$$

Если система *консервативна*, т. е. ее энергия, представляемая гамильтонианом H, явно не зависит от времени, то оператор $U(t, t_0)$ можно найти, если потребовать, чтобы движение системы с энергией E было периодическим и чтобы соответствующая (круговая) частота ω выражалась законом Эйнштейна

$$E = \hbar\omega. \tag{29}$$

Действительно, поскольку пространство $\mathscr{E}$ натянуто на собственные векторы H, для определения оператора U достаточно знать его действие на каждый из этих векторов. Пусть $|u_E(t_0)\rangle$ есть собственный вектор H, соответствующий энергии E

$$H\,|u_E(t_0)\rangle = E\,|u_E(t_0)\rangle. \tag{30}$$

В согласии с законом Эйнштейна постулируем, что эволюция вектора во времени определяется формулой

$$|u_E(t)\rangle = e^{-i\omega(t-t_0)}\,|u_E(t_0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)}\,|u_E(t_0)\rangle$$

или, учитывая уравнение (30),

$$|u_E(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,|u_E(t_0)\rangle.$$

Следовательно,

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \tag{31}$$

Дифференцируя [6]) обе части этого уравнения по t, получаем

---

[6]) Производная оператора $X(t)$, зависящего от непрерывно изменяющегося параметра t, определяется подобно производной обычной функции: $\dfrac{dX}{dt} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon}$ (см. задачу 3).

дифференциальное уравнение

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = HU(t, t_0), \tag{32}$$

при этом $U(t, t_0)$ есть решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$U(t_0, t_0) = 1. \tag{33}$$

Обобщая этот результат, принимаем, что оператор $U(t, t_0)$ удовлетворяет уравнению (32) и начальному условию (33) даже, когда квантовая система не является консервативной. В последнем случае оператор H явно зависит от времени, поэтому, разумеется, соотношение (29) теряет всякий смысл и оператор U более не выражается формулой (31).

Отметим, что U может быть определен также интегральным уравнением

$$U(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} HU(t', t_0)\, dt'. \tag{34}$$

Уравнения (32)—(33) или интегральное уравнение (34) выражают фундаментальный закон эволюции квантовой системы. Эквивалентным выражением этого закона является *уравнение Шредингера* или дифференциальное уравнение эволюции динамических состояний системы. Это уравнение можно получить, дифференцируя почленно уравнение (28)

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \left(\frac{d}{dt} U(t, t_0)\right) |\psi(t_0)\rangle$$

и подставляя вместо $\frac{d}{dt} U(t, t_0)$ выражение (32). Находим

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle. \tag{35}$$

Чтобы норма вектора $|\psi(t)\rangle$ оставалась постоянной во времени необходимо и достаточно, чтобы оператор H был эрмитовым; это легко показать, исходя из уравнения Шредингера. Эрмитовость гамильтониана, естественно, всегда предполагается.

Заметим, что поскольку H эрмитов, оператор $U(t, t_0)$ *унитарен*. Когда H не зависит от времени, это непосредственно следует из выражения (31). Но даже если H явно зависит от времени, имеем согласно уравнению Шредингера

$$|\psi(t + dt)\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar} H\, dt\right) |\psi(t)\rangle.$$

Поскольку H — эрмитов оператор, оператор

$$U(t + dt, t) \equiv 1 - \frac{i}{\hbar} H\, dt$$

является инфинитезимальным унитарным оператором (см. § VII.22): переход от кет-вектора в момент времени t к кет-вектору в момент времени $t+dt$ осуществляется с помощью инфинитезимального унитарного преобразования. Преобразование $U(t, t_0)$, переводящее $|\psi(t_0)\rangle$ в $|\psi(t)\rangle$, есть, следовательно, последовательность инфинитезимальных унитарных преобразований; тогда $U(t, t_0)$, как произведение инфинитезимальных унитарных операторов, является унитарным оператором.

§ 9. «Представление» Шредингера

Вывод уравнения Шредингера завершает изложение общей схемы описания квантовых явлений, которую мы привели в этой главе. Резюмируем эту схему следующим образом.

1°. *Определение динамических состояний*

Динамическое состояние квантовой системы определяется заданием точных значений динамических переменных, входящих в полный набор совместных переменных. Осуществляя одновременное измерение переменных полного набора, мы однозначно определяем состояние системы в момент t, когда производится измерение.

2°. *Определение пространства состояний*

Каждое состояние может быть представлено (принцип суперпозиции) кет-вектором $|\chi\rangle$ (нормированным на единицу и определяемым с точностью до фазового множителя) некоторого векторного пространства $\mathscr{E}$. Каждая динамическая переменная представляется наблюдаемой из этого пространства; состояниями, в которых динамическая переменная имеет определенные значения, являются состояния, представляемые собственными векторами этой наблюдаемой, причем значения динамической переменной равны собственным значениям наблюдаемой, соответствующим указанным собственным векторам. Наблюдаемые удовлетворяют однородным алгебраическим соотношениям, которые можно установить, исходя из соотношений коммутации. Совместные переменные представляются коммутирующими наблюдаемыми.

3°. *Определение вероятностей*

Если произвести одновременное измерение полного набора совместных динамических переменных квантовой системы, то вероятность найти систему в состоянии $|\chi\rangle$, т. е. найти те значения динамических переменных, которые соответствуют состоянию $|\chi\rangle$, равна квадрату абсолютного значения скалярного произведения вектора $|\psi\rangle$ (нормированного на единицу), представляющего динамическое состояние системы в момент измерения, на вектор $|\chi\rangle$, т. е. $|\langle\chi|\psi\rangle|^2$. В более общем случае вероятность найти систему в подпространстве $\mathscr{E}_D$ (т. е. найти систему в одном из состояний этого подпространства) равна среднему значению оператора проектирования на это подпространство P_D, именно

$$\langle P_D\rangle = \langle\psi\,|\,P_D\,|\,\psi\rangle.$$

4°. *Уравнение эволюции*

В отсутствие всяких внешних воздействий динамическое состояние системы эволюционирует во времени строго причинным образом. Вектор $|\psi(t)\rangle$, представляющий это состояние в пространстве $\mathscr{E}$, непрерывно изменяется, подчиняясь уравнению Шредингера (35). Другими словами, переход от состояния $|\psi(t_0)\rangle$ к состоянию $|\psi(t)\rangle$ осуществляется с помощью унитарного преобразования (28), где $U(t, t_0)$ есть унитарный оператор, определяемый уравнениями (32) и (33).

Зная динамическое состояние $|\psi\rangle$ системы в начальный момент времени t_0, мы можем предсказать статистическое распределение результатов любых измерений системы в любой момент времени t_1, следующий за t_0. Действительно, динамическое состояние системы в момент начала измерения есть

$$|\,\psi(t_1)\rangle = U(t_1,\ t_0)\,|\,\psi(t_0)\rangle$$

и, следовательно, вероятность найти систему в наперед заданном состоянии $|\chi\rangle$ равна

$$|\langle\chi\,|\,\psi(t_1)\rangle|^2 = |\langle\psi\,|\,U(t_1,\ t_0)\,|\,\psi\rangle|^2. \tag{36}$$

В принятой выше схеме описания явлений состояние физической системы представляется изменяющимся во времени кет-вектором $|\psi(t)\rangle$. Напротив, физические величины, по крайней мере те из них, которые не зависят явно от времени, представляются фиксированными наблюдаемыми пространства $\mathscr{E}$. Аналогично, собственные векторы наблюдаемых являются фиксированными векторами пространства $\mathscr{E}$; именно таковы векторы $|\chi\rangle$, $|\psi\rangle$ в выражении (36). Этот способ описания квантовых явлений обычно называется *«представлением»*[7]) *Шредингера.*

[7]) Не следует смешивать это «представление» с понятием представления векторов и операторов векторного пространства матрицами. «Представление», о котором идет речь, есть представление движения квантовой системы. Чтобы исключить недоразумения, следовало бы говорить о «способе описания» Шредингера. К сожалению, исторически утвердился термин «представление». Мы будем ставить его в кавычки всякий раз, когда он будет употребляться в данном смысле. Различие, которое мы должны делать здесь, аналогично различию между унитарными преобразованиями матриц и унитарными преобразованиями векторов и операторов (см. гл. VII, раздел III).

§ 10. «Представление» Гейзенберга

Если произвести унитарное преобразование кет-векторов и наблюдаемых «представления» Шредингера и приписать преобразованным величинам тот же физический смысл, что и ранее, то мы получим некоторый новый способ описания явлений, строго эквивалентный первоначальному. При таком преобразовании наблюдаемые преобразуются в наблюдаемые, обладающие тем же спектром собственных значений, собственные векторы переходят в собственные векторы, алгебраические соотношения, соотношения сопряжения и скалярные произведения сохраняются. Поскольку измеряемыми величинами являются только модули скалярных произведений (см. уравнение (30)), очевидно, что все предсказания на основе новых величин тождественны предсказаниям, сделанным на основе старых.

В частном случае можно определить *«представление» Гейзенберга*, производя унитарное преобразование, зависящее от времени и осуществляемое оператором $U^+(t, t_0)$. Будем обозначать старые величины индексом S, а новые — индексом H. Кет-вектор

$$|\psi_S(t)\rangle = U(t, t_0)\,|\psi_S(t_0)\rangle,$$

представляющий динамическое состояние системы в момент времени t, преобразуется в «неподвижный» кет-вектор

$$|\psi_H\rangle = U^+(t, t_0)\,|\psi_S(t)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle. \tag{37}$$

Напротив, наблюдаемая A_S «представления» Шредингера преобразуется в

$$A_H(t) = U^+(t, t_0)\,A_S U(t, t_0). \tag{38}$$

Мы видим, что даже если A_S не зависела явно от времени, наблюдаемая A_H непрерывно изменяется. Если использовать дифференциальное уравнение (32) и эрмитово сопряженное уравнение, можно путем почленного дифференцирования (38) получить

$$i\hbar\frac{dA_H}{dt} = -U^+HA_SU + i\hbar U^+\frac{\partial A_S}{\partial t}U + U^+A_SHU = \\ = U^+[A_S, H]\,U + i\hbar U^+\frac{\partial A_S}{\partial t}U. \tag{39}$$

В этом уравнении H есть гамильтониан в «представлении» Шредингера. Вводя гамильтониан «представления» Гейзенберга

$$H_H = U^+HU,$$

находим

$$U^+[A_S, H]\,U = [A_H, H_H].$$

Наблюдаемая A_S — некоторая функция основных наблюдаемых «представления» Шредингера — может и явно зависеть от времени; второй член в правой части (39) учитывает это обстоятельство. Наблюдаемая $\partial A_S/\partial t$ есть также некоторая функция наблюдаемых «представления» Шредингера. Если обозначить с помощью $\partial A_H/\partial t$ функцию, получаемую из предшествующей путем замены всех наблюдаемых на соответствующие наблюдаемые «представления» Гейзенберга, то получим

$$\frac{\partial A_H}{\partial t}=U^{\dagger}\frac{\partial A_S}{\partial t}U.$$

Поэтому уравнение (39) записывается в форме

$$i\hbar\frac{\partial A_H}{\partial t}=[A_H,\ H_H]+i\hbar\frac{\partial A_H}{\partial t}. \qquad (40)$$

Это уравнение известно как *уравнение Гейзенберга.*

В заключение можно сделать вывод, что «представление» Гейзенберга получается путем придания пространству векторов «представления» Шредингера некоторого общего движения, выбираемого таким образом, чтобы динамическое состояние квантовой системы было представлено неподвижным кет-вектором $|\psi_H\rangle$. Другими словами, *всякий неподвижный кет-вектор «представления» Гейзенберга описывает возможное движение квантовой системы. В противоположность этому различные физические величины представляются наблюдаемыми, изменяющимися во времени согласно закону* (38) *или, что то же самое, согласно уравнению Гейзенберга* (40) *с начальным условием* $A_H(t_0)=A_S(t_0)$.

Уравнения (38) и (40) применимы, разумеется, к любой функции наблюдаемых «представления» Гейзенберга и, в частности, к выражению $e^{i\xi A_H}$ или оператору проектирования $P_D^{(H)}$ на подпространство собственных векторов, принадлежащих собственным значениям в некоторой области D спектра A_H.

Точно так же, кет-вектор $|\chi_H\rangle$, представляющий точное задание набора совместных переменных, вообще говоря, зависит от времени и получается из своего аналога $|\chi_S\rangle$ «представления» Шредингера с помощью формулы

$$|\chi_H(t)\rangle=U^{\dagger}(t,\ t_0)\,|\chi_S\rangle. \qquad (41)$$

Предположим, что движение квантовой системы представляется, начиная с момента времени t_0, неподвижным кет-вектором $|\psi_H\rangle$. Тогда вероятность найти ее в состоянии $|\chi_H\rangle$ в результате измерения, производимого в последующий момент времени t_1, есть

$$|\langle\chi_H(t_1)\,|\,\psi_H\rangle|^2.$$

Эта величина равна той, которая получается с помощью соответствующих кет-векторов «представления» Шредингера (уравнение (36)), ибо скалярное произведение инвариантно относительно унитарного преобразования $U^{\dagger}(t_1, t_0)$.

§ 11. «Представление» Гейзенберга и принцип соответствия

Как мы видели, «представления» Шредингера и Гейзенберга строго эквивалентны. На практике чаще используется «представление» Шредингера, так как оно более удобно для вычислений. Решение уравнения Шредингера, т. е. уравнения для векторов, *a priori* должно быть проще решения уравнения Гейзенберга, которое является операторным уравнением. Однако некоторые свойства квантовых систем наиболее отчетливо проявляются в «представлении» Гейзенберга.

Особенно ярко проявляется в «представлении» Гейзенберга формальная аналогия между классической и квантовой теориями. Подобно движению классической системы движение квантовой системы в «представлении» Гейзенберга описывается зависимостью от времени характеризующих систему динамических переменных.

Рассмотрим поэтому квантовую систему, обладающую классическим аналогом, и сравним описание движения двух систем. Каждой физической величине классической системы соответствует физическая величина квантовой системы. Единственное различие состоит в том, что физические величины классической системы подчиняются правилам обычной алгебры, в то время как их квантовые аналоги представляют собой операторы и подчиняются законам некоммутативной алгебры. Но в тех случаях, когда можно отождествить выражения некоммутативной алгебры с выражениями обычной алгебры, уравнения движения квантовых величин совпадают с уравнениями для их классических аналогов. Действительно, уравнения Гейзенберга для переменных $q_1, \ldots, q_N$ и $p_1, \ldots, p_N$ могут быть записаны в форме

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[q_i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \text{(I)}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

При выводе этих уравнений учитывались основные коммутационные соотношения между q и p и свойства (V.67) и (V.68), которые из них следуют. Система уравнений (I) формально идентична канонической системе уравнений Гамильтона классической механики.

Всякая классическая динамическая переменная $A_{кл} = A(q_1, \ldots, q_N; p_1, \ldots, p_N; t)$ подчиняется уравнению движения

$$\frac{dA_{кл}}{dt} = \{A_{кл}, H_{кл}\} + \frac{\partial A_{кл}}{\partial t}, \tag{42}$$

где $\{A_{кл}, H_{кл}\}$ обозначает так называемые скобки Пуассона

$$\{A, H\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right).$$

Мы видим, что классическое уравнение (42) совпадает с уравнением Гейзенберга, если можно отождествить скобки Пуассона $\{A, H\}$ с коммутатором $[A_H, H_H]/i\hbar$. Пользуясь основными коммутационными соотношениями и сходством правил алгебры коммутаторов и алгебры скобок Пуассона, можно действительно показать идентичность этих двух выражений, выбирая соответствующим образом порядок q и p в явном выражении скобок Пуассона.

§ 12. Интегралы движения

Понятие постоянной или интеграла движения наиболее ясно и прозрачно именно в «представлении» Гейзенберга. Динамическая переменная, *не зависящая явно от времени*, является постоянной движения, если соответствующая наблюдаемая C_H в «представлении» Гейзенберга остается постоянной во времени. Вследствие этого ее система собственных векторов остается неподвижной, так что статистическое распределение результатов наблюдения этой величины при всех условиях не зависит от времени осуществления измерения.

Следуя этому определению постоянной движения, можем написать

$$i\hbar \frac{d}{dt} C_H = [C_H, H_H] = 0.$$

Таким образом, постоянные движения представляются *наблюдаемыми, которые коммутируют с гамильтонианом*. Этот результат, впрочем, равным образом справедлив и в «представлении» Шредингера, так как соотношения коммутации сохраняются при унитарном преобразовании.

Будучи независимой от времени, наблюдаемая C_H остается равной своему начальному значению:

$$C_H(t) = C_H(t_0) = C_S = C.$$

Если, в частности, динамическое состояние системы представляется в «представлении» Гейзенберга собственным вектором C

$$C_H \,|\, \psi_H \rangle = c \,|\, \psi_H \rangle,$$

то переменная C сохраняет определенное значение c в течение всего времени; говорят, что собственное значение c является *хорошим квантовым числом*. Нетрудно, впрочем, показать, что C

коммутирует с оператором эволюции $U(t, t_0)$; вследствие этого кет-вектор $|\psi_S(t)\rangle$ «представления» Шредингера остается постоянно в подпространстве собственного значения c

$$C\,|\,\psi_S(t)\rangle = c\,|\,\psi_S(t)\rangle.$$

§ 13. Уравнение эволюции средних значений и соотношение неопределенности время-энергия

Исходя из «представления» Гейзенберга, особенно просто написать дифференциальное уравнение для среднего значения заданной наблюдаемой A_H. Действительно, поскольку $|\psi_H\rangle$ не зависит от времени, имеем

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{d}{dt}\langle\psi_H\,|\,A_H\,|\,\psi_H\rangle = \langle\psi_H\,|\,\frac{dA_H}{dt}\,|\,\psi_H\rangle.$$

Пользуясь уравнением Гейзенберга, вновь получаем уравнение (V.72)

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A,\ H]\rangle + \left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle. \tag{43}$$

Если же воспользоваться системой (I), то получаются уравнения Эренфеста (§ VI. 2).

В качестве приложения уравнения (43) дадим точный вывод соотношения неопределенности время-энергия (см. § IV. 10). Рассмотрим систему, гамильтониан которой не зависит явно от времени, и пусть A есть некоторая другая наблюдаемая этой системы, также не зависящая от времени. Мы анализируем динамическое состояние системы в заданный момент времени t. Пусть $|\psi\rangle$ есть вектор, представляющий это состояние. Обозначим с помощью ΔA, ΔE средние квадратичные отклонения A и H соответственно. Применим неравенство Шварца к векторам $(A-\langle A\rangle)\,|\psi\rangle$ и $(H-\langle H\rangle)\,|\psi\rangle$ и повторим слово в слово рассуждения § 4. Мы найдем после вычислений, что

$$\Delta A\cdot\Delta E \geqslant \frac{1}{2}\,|\langle [A,\ H]\rangle|, \tag{44}$$

причем равенство реализуется, если $|\psi\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$(A-\alpha)\,|\,\psi\rangle = i\gamma\,(H-\varepsilon)\,|\,\psi\rangle,$$

где α, γ и ε — некоторые вещественные постоянные (ср. уравнение (10)). Однако согласно уравнению (43)

$$\langle [A,\ H]\rangle = i\hbar\,\frac{d\langle A\rangle}{dt};$$

неравенство (44) можно поэтому записать в форме

$$\frac{\Delta A}{|d\langle A\rangle/dt|}\cdot\Delta E\geqslant\frac{\hbar}{2}$$

или

$$\tau_A\cdot\Delta E\geqslant\frac{\hbar}{2}, \tag{45}$$

если положить

$$\tau_A=\left|\frac{\Delta A}{d\langle A\rangle/dt}\right|, \tag{46}$$

где τ_A — характеристическое время эволюции статистического распределения A. Это время, необходимое для того, чтобы центр $\langle A\rangle$ распределения сместился на ширину распределения ΔA, т. е. время, необходимое для заметного изменения распределения. Таким образом, для каждой динамической переменной можно ввести характеристическое время эволюции.

Пусть теперь τ есть наименьшее из так определенных характеристических времен; τ можно рассматривать как характеристическое время эволюции самой физической системы: каким бы ни было измерение, осуществляемое в системе в момент времени t', его статистическое распределение будет практически одинаковым с распределением измерения в момент t, если разность $|t-t'|$ меньше τ.

Согласно неравенству (45), τ и ΔE удовлетворяют соотношению неопределенности время-энергия

$$\tau\cdot\Delta E\geqslant\hbar/2. \tag{47}$$

Если, в частности, система находится в стационарном состоянии, то $d\langle A\rangle/dt=0$ каким бы ни было A и, следовательно, τ бесконечно велико; при этом $\Delta E=0$ в согласии с соотношением (47).

§ 14. Промежуточные «представления»

«Представления» Шредингера и Гейзенберга не являются единственно возможными. Всякое унитарное преобразование векторов и наблюдаемых «представления» Шредингера (или Гейзенберга) приводит к новому «представлению». Все эти «представления» дают строго эквивалентные описания квантовых явлений. Для каждой конкретной проблемы выбирают то «представление», которое наилучшим образом подходит для ее разрешения.

Всякая проблема квантовой механики в конечном счете сводится к более или менее полному и более или менее точному определению свойств унитарного оператора $U(t,t_0)$; действительно, все предсказания теории заключены в элементах матрицы $U(t, t_0)$, таких как в уравнении (36). Решение уравнения (32) является поэтому центральной проблемой теории. Если известно некоторое приближенное решение этого уравнения $U^{(0)}(t, t_0)$, то часто бывает удобно положить

$$U = U^{(0)}U'. \tag{48}$$

Подставляя это выражение в уравнение (32) и умножая обе стороны уравнения на унитарный оператор $U^{(0)\dagger}$ слева, получаем дифференциальное уравнение

$$i\hbar \frac{d}{dt} U' = U^{(0)\dagger}\left(HU^{(0)} - i\hbar \frac{dU^{(0)}}{dt}\right) U'. \tag{49}$$

Решение U' этого уравнения удовлетворяет начальному условию

$$U'(t_0, t_0) = 1.$$

Если приближение удачно, оператор U' медленно меняется во времени; это хорошо видно из уравнения (49), так как при удачном выборе $U^{(0)}$ оператор $HU^{(0)} - i\hbar \frac{dU^{(0)}}{dt}$ мал. Поэтому уравнение (49) легко (лучше, чем (32)) допускает приближенное решение [8]).

Поскольку оператор $U^{(0)}$ унитарен, оператор

$$H^{(0)}(t) \equiv i\hbar\left[\frac{d}{dt} U^{(0)}(t, t_0)\right] U^{(0)\dagger}(t, t_0)$$

эрмитов (задача 6). Таким образом, оператор $U^{(0)}(t, t_0)$ является строгим решением уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{d}{dt} U^{(0)} = H^{(0)}U^{(0)}, \quad U^{(0)}(t_0, t_0) = 1. \tag{50}$$

Гамильтониан H можно представить в виде суммы двух операторов

$$H = H^{(0)} + H',$$

один из которых — H' — в наших предположениях можно рассматривать как малое возмущение, а второй — $H^{(0)}$ есть гамильтониан уравнения Шредингера, которое мы умеем интегрировать. В этих обозначениях уравнение (49) записывается просто

$$i\hbar \frac{d}{dt} U' = H'_I U', \tag{51}$$

причем H'_I получается из H' с помощью унитарного преобразования, зависящего от времени

$$H'_I = U^{(0)\dagger} H' U^{(0)}. \tag{52}$$

---

[8]) Обсуждаемые манипуляции являются обобщением на случай дифференциальных операторных уравнений известного метода вариации произвольной постоянной в элементарной теории дифференциальных уравнений.

Мы видим, что удобно ввести «представление», промежуточное между «представлениями» Шредингера и Гейзенберга, а именно то, которое получается при действии на векторы и наблюдаемые «представления» Шредингера унитарного оператора $U^{(0)\dagger}(t, t_0)$. Обозначим с помощью индекса I векторы и наблюдаемые этого нового «представления»:

$$|\psi_I(t)\rangle = U^{(0)\dagger}|\psi_S(t)\rangle, \tag{53}$$

$$A_I(t) = U^{(0)\dagger} A_S U^{(0)}. \tag{54}$$

В промежуточном «представлении» вектор $|\psi_I(t)\rangle$, представляющий возможное движение квантовой системы, равен $U'|\psi_S(t_0)\rangle$. Согласно уравнению (51), этот вектор эволюционирует (медленно) во времени, подчиняясь уравнению Шредингера с гамильтонианом, выражающим энергию возмущения H'_I

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = H'_I|\psi_I(t)\rangle. \tag{55}$$

С другой стороны, физические величины представляются подвижными наблюдаемыми; эти наблюдаемые подчиняются уравнениям движения Гейзенберга с «невозмущенным» гамильтонианом H_I^0:

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_I = [A_I, H_I^{(0)}] + i\hbar \frac{\partial A_I}{\partial t}, \tag{56}$$

что легко показать, производя с уравнением (54) те же манипуляции, которые в случае уравнения (38) привели к выводу уравнения Гейзенберга.

Раздел III. РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕОРИИ

§ 15. Определение представления

Согласно теории, развитой в двух первых разделах, все необходимые для описания квантовой системы элементы оказываются в наличии, если определены ее основные динамические переменные, коммутационные соотношения, которым подчиняются представляющие их наблюдаемые, и явное выражение через эти основные наблюдаемые гамильтониана, который определяет эволюция системы во времени. Тогда можно построить пространство $\mathscr{E}$ векторов, представляющих различные возможные динамические состояния системы, определить физический смысл векторов пространства, решая задачи на собственные значения для различных наблюдаемых, выписать и решить фундаментальные уравнения эволюции и, наконец,