

§ 1. Введение

Эта глава посвящена элементарным понятиям теории столкновений. Результаты опытов по столкновению частиц выражаются при помощи так называемых эффективных сечений, непосредственно связанных с асимптотическим поведением стационарных решений уравнения Шредингера. Поэтому, определив понятие эффективного сечения, мы посвятим большую часть раздела I выяснению этой связи на простом примере рассеяния частицы на потенциале, который достаточно быстро стремится к нулю на бесконечности (быстрее $1/r$); далее будет показано, каким образом, с помощью метода отделения движения центра масс, применить полученные результаты к случаю столкновения двух взаимодействующих частиц.

Все остальное содержание главы относится к рассеянию частицы на центральном потенциале и методу решения этой задачи, известному как метод фазовых сдвигов. Этот метод излагается в разделе II. Он особенно удобен, если потенциал имеет конечный радиус действия, ибо в этом случае особенно четко проявляются замечательные свойства фазовых сдвигов, что будет разобрано в разделе III. Особо следует отметить резонансные явления, проявляющиеся при столкновениях квантовых частиц — аналогичные явления имеют место в любой задаче о распространении волн. Обсуждению и физическому истолкованию резонансных явлений посвящен раздел IV. Наконец, в последнем разделе V будут приведены некоторые полезные выражения для фазовых сдвигов и выведены две приближенные формулы: формула Борна и формула Бете, или формула эффективного радиуса действия.

Раздел I. ЭФФЕКТИВНЫЕ СЕЧЕНИЯ И АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

§ 2. Определение эффективных сечений

Рассмотрим типичный эксперимент по рассеянию, когда монокинетический пучок частиц бомбардирует заданную мишень. Пусть J — величина первоначального потока, т. е. число

частиц пучка, пересекающих в единицу времени единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению пучка и неподвижной относительно мишени. Если P — число частиц в единице объема падающего пучка, а v — скорость частиц пучка по отношению к мишени, то

$$J = Pv.$$

В обычных условиях опыта P столь мало, что можно пренебречь взаимодействием частиц в первоначальном пучке и считать, что столкновения отдельных частиц с мишенью происходят независимо друг от друга. Счетчики измеряют число \mathcal{N} частиц, рассеиваемых в единицу времени в телесном угле $d\Omega$ в направлении $\Omega = (\theta, \varphi)$. Это число прямо пропорционально потоку частиц

$$\mathcal{N} = J\Sigma(\Omega) d\Omega.$$

Величина $\Sigma(\Omega)$, имеющая размерность площади, является параметром, характеризующим столкновение частицы, обладающей скоростью v , с мишенью: это эффективное сечение рассеяния частицы мишенью в направлении Ω .

В большинстве случаев мишень состоит из большого числа N атомных или ядерных рассеивателей, причем расстояния между этими атомами или ядрами атомов достаточно велики по сравнению с длиной волны падающих частиц, так что можно пренебречь всеми явлениями интерференции между волнами, рассеянными различными центрами¹⁾; каждый центр рассеяния действует независимо от других. Если, кроме того, мишень выбирается достаточно тонкой, чтобы можно было пренебречь многократным рассеянием, то \mathcal{N} оказывается прямо пропорциональным N

$$\mathcal{N} = JN\sigma(\Omega) d\Omega.$$

Площадь $\sigma(\Omega)$ называется эффективным сечением рассеяния частицы на рассеивающем центре в направлении Ω или, короче, *дифференциальным эффективным сечением рассеяния*.

Полное число частиц, рассеиваемых в единицу времени, получается интегрированием по углам. Оно равно $JN\sigma_{\text{полн}}$, где

$$\sigma_{\text{полн}} = \int \sigma(\Omega) d\Omega$$

— *полное эффективное сечение рассеяния*.

В ядерной физике центры рассеяния имеют линейные размеры порядка 10^{-12} — 10^{-13} см, эффективные сечения обычно

¹⁾ Эта ситуация реализуется не всегда. Например, при различных дифракционных явлениях в кристаллах — дифракции электронов, тепловых нейтронов или рентгеновских лучей — важнейшую роль играет именно указанная выше интерференция.

измеряются в барнах или миллибарнах:

$$1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2, \quad 1 \text{ миллибарн (мб)} = 10^{-27} \text{ см}^2.$$

Во всех этих рассуждениях мы молчаливо предполагали, что рассеяние происходит в результате упругих столкновений, т. е. столкновений, при которых квантовое состояние рассеивателя не изменяется и не происходит передачи энергии внутренним степеням свободы рассеивателя. Пока мы ограничимся только упругим рассеянием. Кроме того, мы не будем рассматривать рассеивающий центр (атом или ядро атома) во всей его сложности, а будем описывать его статическим потенциалом, зависящим от радиуса-вектора \mathbf{r} частицы.

§ 3. Стационарная волна рассеяния

Исследуем задачу о рассеянии частицы с массой m на потенциале $V(\mathbf{r})$, причем в этой главе ограничимся только такими потенциалами, которые при $r \rightarrow \infty$ стремятся к нулю быстрее $1/r$. Рассеяние на кулоновском потенциале будет рассмотрено в гл. XI.

Пусть E — энергия, а $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ — начальный импульс частицы. Эффективное сечение $\sigma(\Omega)$ можно связать с таким решением уравнения Шредингера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right] \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}),$$

которое на бесконечности имеет асимптотическую форму

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f(\Omega) \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r}. \quad (1)$$

Примем без обсуждения²⁾, что для каждого значения \mathbf{k} имеется одно и только одно решение этого типа. Будем называть это решение $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ *стационарной волной рассеяния* с волновым вектором \mathbf{k} .

Физический смысл обоих членов асимптотической формы решения легко понять, если обратиться к определению (IV.9) вектора плотности потока³⁾

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2mi} [\psi^*(\mathbf{r}) (\nabla \psi(\mathbf{r})) - (\nabla \psi(\mathbf{r}))^* \psi(\mathbf{r})].$$

²⁾ Это утверждение будет доказано в разделе II для случая, когда центрально-симметричный потенциал V обнаруживает достаточно регулярное поведение в начале координат.

³⁾ Можно определить эрмитов оператор $\mathbf{J}(\mathbf{r}_0)$, представляющий плотность потока в точке \mathbf{r}_0 :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2m} [p\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)p];$$

тогда плотность потока, определенная выше, есть среднее значение этого оператора в некотором заданном квантовом состоянии.

Плоская волна $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ представляет волну с плотностью 1 и плотностью потока $\hbar\mathbf{k}/m$. Член $f(\Omega)\frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r}$, если учитывать только члены наименьшего порядка по $1/r$, описывает волну с плотностью $|f(\Omega)|^2/r^2$ и плотностью потока, по направлению Ω в *сторону увеличивающихся r* (расходящаяся волна), равной $\frac{\hbar k}{m} \frac{|f(\Omega)|^2}{r^2}$.

Ввиду того, что влияние потенциала V в асимптотической зоне пренебрежимо мало, можно, следуя классическому приближению (см. § VI. 4), интерпретировать член $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ как пучок монокинетических частиц с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и плотностью 1 (начальный пучок). Тогда член $f(\Omega)\frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r}$ интерпретируется как радиальный пучок частиц, исходящих из центра, т. е. представляет поток рассеянных частиц.

В согласии с этой интерпретацией найдем число частиц, рассеянных в единицу времени в телесный угол $d\Omega$ в направлении Ω : это поток частиц, проходящих через участок сферической поверхности очень большого радиуса, который виден из начала координат под телесным углом $(\Omega, \Omega + d\Omega)$, т. е. $\frac{\hbar k}{m} |f(\Omega)|^2 d\Omega$. Разделив это число на величину первоначального потока $J = \hbar k/m$, получим эффективное сечение рассеяния

$$\sigma(\Omega) = |f(\Omega)|^2. \quad (2)$$

Функция $f(\Omega)$ называется *амплитудой рассеяния*.

§ 4. Описание рассеяния при помощи пучка волновых пакетов⁴⁾

Интуитивные рассуждения предыдущего параграфа некорректны по двум причинам.

Во-первых, вектор плотности потока не является простой суммой потоков от плоской волны и рассеянной волны. Необходимо учесть вклад интерференции между $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ и $f(\Omega)\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})/r$. В предшествующих рассуждениях явление интерференции не учитывалось.

Во-вторых, представление физической ситуации стационарной волной рассеяния

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{\frac{i}{\hbar} E t} \quad (3)$$

является идеализированным. На самом деле каждая частица, подвергающаяся рассеянию, должна представляться волновым пакетом, образованным суперпозицией стационарных волн типа (3), соответствующих волновым векторам, несколько отличающимся по *величине и направлению* от \mathbf{k} . Этот пакет должен быть построен так, чтобы правильно учесть начальные условия задач. Вследствие дисперсии по направлению импульса его поперечные размеры ог-

⁴⁾ Рассмотрение проблемы рассеяния в § 4, 5 и 6 основано на работах Чу и Лоу по теории рассеяния. Вычисления § 16 также заимствованы из этих работ.

раничены и не превосходят размеров диафрагмы источника первоначального пучка. Вследствие же дисперсии по энергии пакет ограничен также и в продольном направлении и распространяется параллельно друг другу со скоростью v и отличающихся друг от друга только значениями параметров b и t_0 , фиксирующих движение центров пакетов до столкновения.

Удобно характеризовать траекторию частицы положением b точки ее пересечения с плоскостью (S), проходящей через рассеивающий центр перпендикулярно направлению распространения. Пусть t_0 — момент времени пересечения плоскости (S) центром пакета в том случае, когда его движение не возмущается рассеивающим потенциалом; тогда закон движения центра пакета до столкновения может быть записан в форме

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \mathbf{b} + \mathbf{v} (t - t_0).$$

Начальный поток является в действительности потоком волновых пакетов указанного выше типа, перемещающихся параллельно друг другу со скоростью v и отличающихся друг от друга только значениями параметров b и t_0 , фиксирующих движение центров пакетов до столкновения.

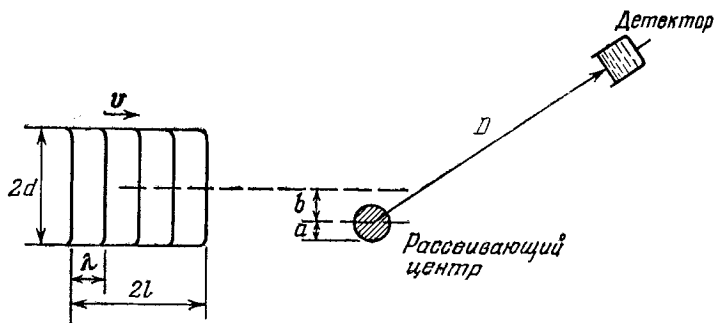


Рис. 29. Схема эксперимента по рассеянию и характеристические длины в этом опыте.

В дальнейшем обсуждении будут рассматриваться следующие характеристические длины (рис. 29):

$\lambda = h/mv$ — средняя длина волны падающего волнового пакета;

d, l — поперечные и продольные размеры падающего пакета;

a — размеры зоны рассеяния;

D — расстояние регистрирующего прибора от зоны рассеяния.

Длины d и l связаны соотношениями неопределенности с дисперсиями падающего пакета волн соответственно по направлению и энергии. Поскольку мы предполагаем, что направление распространения пакета и его энергия хорошо определены, необходимо

$$\lambda \ll d \quad \text{и} \quad \lambda \ll l. \quad (4)$$

Чтобы само рассеяние не зависело существенным образом от конкретной формы волнового пакета, необходимо, кроме того, чтобы его размеры значительно превосходили размеры зоны рассеяния, т. е. той области пространства, где потенциал имеет отличную от нуля величину, т. е.

$$a \ll d, l \quad (5)$$

($a \approx 10^{-8}$ см при рассеянии на атоме и $a \approx 10^{-13}$ см при рассеянии на ядре).

При этих предположениях, если прицельный параметр превосходит поперечные размеры пакета ($b > d$), то падающий волновой пакет не касается

зоны рассеяния и движется все время как свободный волновой пакет. Если, напротив, $b < d$, он достигает зоны рассеяния в некоторый момент $t_1 \approx t_0 - l/v$. В этот момент начинается собственно столкновение. Через достаточно большой промежуток времени волновой пакет вновь оказывается полностью вне зоны рассеяния, но теперь он состоит, вообще говоря, из двух частей: проходящего волнового пакета, форма и закон движения которого мало отличаются от первоначальных, и пакета волн, рассеянных в разных направлениях относительно первоначального (рис. 30)⁵⁾.

Детектирование рассеянных частиц осуществляется некоторым регистрирующим устройством (счетчики, фотопластинки и т. д.) в заданном направлении $\Omega = (\theta, \varphi)$ на некотором расстоянии порядка D от центра рассеяния. Это расстояние не должно быть слишком большим, если мы не хотим принимать во внимание расплывание волнового пакета в ходе эксперимента (см. § VI. 3):

$$\sqrt{\lambda D} \ll d, l. \quad (6)$$

Но это расстояние все же должно быть достаточно большим, чтобы распространение детектируемой волны не возмущалось присутствием потенциала зоны рассеяния, т. е.

$$a, \lambda \ll D, \quad (7)$$

и чтобы детектор не мог регистрировать частицы проходящего волнового пакета:

$$d \ll D \sin \theta. \quad (8)$$

Заметим, что волна, рассеянная вперед ($\theta = 0$), не может быть отделена от проходящей волны.

Объединяя условия (4)–(8), получаем неравенства⁶⁾:

$$a, \sqrt{\lambda D} \ll l, \quad (9a)$$

$$a, \sqrt{\lambda D} \ll d \ll D. \quad (9б)$$

Формула (2) выражает эффективное сечение рассеяния только при том условии, что экспериментальное устройство, предназначенное для измерения этой величины, обеспечивает выполнение неравенств (9).

Кроме этого необходимо, чтобы волновые пакеты имели достаточно хорошо определенные направление движения и энергию, так как только в этом случае амплитуда рассеяния вообще имеет смысл. Функция $f(\Omega)$ должна оставаться практически постоянной и по модулю, и по фазе при изменении

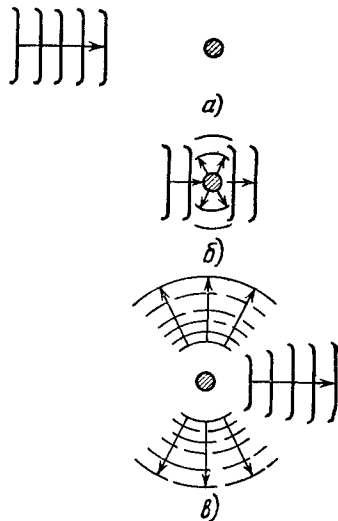


Рис. 30. Схема процесса рассеяния волнового пакета: а) — до столкновения; б) — в момент столкновения; в) — после столкновения (заштрихована область, где действует отличный от нуля потенциал).

⁵⁾ Это явление аналогично явлениям отражения и прохождения волн в одномерной задаче, рассмотренной в гл. III (§§ 3, 6 и 7).

⁶⁾ В экспериментах атомной и ядерной физики длина d равна самое большее ширине входной диафрагмы ($d \sim 1$ мм); длина l может быть заметно больше; D — обычно порядка 1 м. Если $a \approx 10^{-8}$ см и $\lambda \approx 10^{-8}$ см, что является максимальной величиной, то $\sqrt{\lambda D} \approx 10^{-3}$ см и $l/a \approx 10^7$, $l/\sqrt{\lambda D} \gg d/\sqrt{\lambda D} \approx 10^2$, $d/D \approx 10^{-3}$. Таким образом, условия (9) выполняются с избытком.

энергии на величину порядка $\delta E \simeq \hbar v/l$, а угла падения — на величину порядка χ/d вблизи соответствующих средних значений.

Доказательство этого результата будет проведено в двух последующих параграфах.

§ 5. Рассеяние волнового пакета на потенциале

В предполагаемых условиях ($l, d \gg a$) эволюция волновых пакетов падающего пучка практически не зависит от их конкретной формы. Будем считать, что все они имеют одинаковую форму, причем каждый характеризуется параметрами \mathbf{b} и t_0 , которые определяют движение центра пакета. Примем t_0 за начало отсчета времени ($t_0 = 0$), что не ограничивает общности рассуждений. Для определения формы падающего пакета введем функцию $\chi(\rho)$ с единичной нормой

$$\int |\chi(\rho)|^2 d\rho = 1. \quad (10)$$

Пусть $A(\mathbf{x})$ — фурье-образ этой функции, так что

$$\chi(\rho) = \int A(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x}\rho} d\mathbf{x}. \quad (11)$$

По предположению $\chi(\rho)$ — вещественная функция, принимающая существенно отличные от нуля значения, когда ρ находится вблизи точки $\rho = 0$ в области с продольными размерами $\sim l$ и поперечными размерами $\sim d$. Функция $A(\mathbf{x})$ также вещественная и отлична от нуля в области с продольными размерами $\sim 1/l$ и поперечными размерами $\sim 1/d$ вблизи точки $\mathbf{x} = 0$. Для упрощения будем считать, что $d \simeq l$.

Задолго до столкновения ($t \ll -l/v$) исследуемый нами волновой пакет $\Psi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t)$ тождествен волновому пакету для свободной частицы $\Phi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t)$, центр которого движется по закону

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \mathbf{b} + \mathbf{v}t,$$

а форма в момент времени $t = 0$ выражается формулой

$$\Phi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, 0) = e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{b})} \chi(\mathbf{r}-\mathbf{b}) = \int A(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}'(\mathbf{r}-\mathbf{b})} d\mathbf{k}'.$$

В момент времени t :

$$\Phi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) = \int A(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}'(\mathbf{r}-\mathbf{b})-i\frac{E't}{\hbar}} d\mathbf{k}'. \quad (12)$$

Если пренебречь распылыванием, то свободный волновой пакет может быть представлен выражением (см. § XIII. 18)

$$\Phi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) \simeq e^{-i\mathbf{k}\mathbf{b}} e^{i\left(\mathbf{k}\mathbf{r}-\frac{Et}{\hbar}\right)} \chi(\mathbf{r}-\mathbf{v}t-\mathbf{b}), \quad (13)$$

которое получается, если в (12) заменить энергию $E' = \hbar^2 \mathbf{k}'^2/2m$ двумя первыми членами ее разложения по степеням $\mathbf{k}' - \mathbf{k}$:

$$E' = E + \hbar\mathbf{v}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}).$$

Волновой пакет $\Psi_{\mathbf{b}}$ получится, если вместо плоской волны в подынтегральном выражении формулы (12) мы подставим стационарную волну рассеяния:

$$\Psi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) \simeq \int A(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{b}} \psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) e^{-i\frac{E't}{\hbar}} d\mathbf{k}'. \quad (14)$$

Это выражение является решением уравнения Шредингера, так как представляет собой суперпозицию решений этого уравнения. Нам достаточно показать, что до столкновения это выражение тождественно свободному волновому пакету Φ_b .

Поскольку функция $A(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$ имеет острый максимум вблизи точки $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$, вклад в интеграл дает только малая область около этой точки. Когда $t \ll -l/v$, фаза подынтегрального выражения ввиду присутствия экспоненциального фактора $\exp(iE't/\hbar)$ быстро изменяется именно в этой области, и интеграл практически равен нулю, кроме тех значений r , при которых фаза оказывается стационарной. Это может иметь место только для r порядка $v|t|$, иначе говоря для тех областей пространства конфигураций, где $\Psi_{\mathbf{k}'}(r)$ может быть заменена своей асимптотической формой

$$\Psi_{\mathbf{k}'}(r) \sim e^{ik'r} + f_{\mathbf{k}'}(\Omega) \frac{e^{ik'r}}{r}. \quad (15)$$

Подставляя это выражение в интеграл (14), находим

$$\Psi_b(r, t) \underset{t \rightarrow -\infty}{\sim} \Phi_b(r, t) + \Psi_b^{(d)}(r, t), \quad (16)$$

где

$$\Psi_b^{(d)} = \int A(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) e^{-ik'b} f_{\mathbf{k}'}(\Omega) \frac{e^{i(k'r - E't/\hbar)}}{r} d\mathbf{k}'; \quad (17)$$

при $t \rightarrow -\infty$ фаза подынтегрального выражения не может быть сделана стационарной в области $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ и интеграл $\Psi_b^{(d)}$ практически равен нулю, каким бы ни было r . Волновой пакет, таким образом, в этом пределе действительно совпадает со свободным волновым пакетом.

Исследуем теперь эволюцию волнового пакета в зоне детектирования ($r \geq D$). В этой области пространства подстановка асимптотической формы (15) несомненно оправдана, выражение (16) вновь обретает силу.

Мы предположим, что дисперсии по направлению и энергии столь малы, что $f_{\mathbf{k}'}(\Omega)$ остается практически постоянной в области с размерами $1/d \simeq \simeq 1/l$ около точки $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ и что в интеграле (17) модуль $f_{\mathbf{k}'}(\Omega)$ можно заменить его значением в точке \mathbf{k} , а фазу этой функции — двумя первыми членами разложения:

$$\begin{aligned} \arg f_{\mathbf{k}'}(\Omega) &\simeq \arg f_{\mathbf{k}}(\Omega) + (\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \mathbf{s}(\Omega), \\ \mathbf{s}(\Omega) &= \text{grad}_{\mathbf{k}} [\arg f_{\mathbf{k}}(\Omega)] \quad (s \ll d, l). \end{aligned} \quad (18)$$

Фазы других сомножителей также заменим двумя первыми членами разложения вблизи \mathbf{k} :

$$\mathbf{k}' \simeq \mathbf{k} + u(\mathbf{k}' - \mathbf{k}), \quad E' \simeq E + \hbar v(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \quad (19)$$

($u \equiv v/v$ — единичный вектор в направлении начальной скорости). Тогда вычисление по методу стационарной фазы приводит нас к результату, аналогичному формуле (13) для случая Φ_b :

$$\Psi_b^{(d)} \simeq e^{-ik'b} f_{\mathbf{k}}(\Omega) \frac{e^{i(kr - E't/\hbar)}}{r} \chi[u(r - vt) + \mathbf{s} - \mathbf{b}]. \quad (20)$$

Поведение функции $\Psi_b^{(d)}$ существенно зависит от величины прицельного параметра b .

Если $b > d$, то аргумент функции χ все время находится в области, где значение этой функции пренебрежимо мало: $\Psi_b^{(d)}$ все время остается практически равной нулю, волновой пакет движется как свободный.

Если $b < d$, т. е. если падающий волновой пакет попадает в зону эффективного действия потенциала, то функция χ существенно отлична от нуля в сферическом слое толщины l по обе стороны сферы $r = vt$. Функция $\Psi_b^{(d)}$, практически равная нулю до столкновения, после столкновения представляет собой пакет сферических волн, расходящихся из центра с радиальной скоростью v . При $t \simeq D/v$ волна $\Psi_b^{(d)}$ достигает зоны детектирования, к этому моменту она уже полностью отделена от проходящей волны Φ_b по всем направлениям, кроме направления вперед ($\theta < d/D$), где эти две волны оказываются сравнимыми по величине и могут интерферировать⁷⁾. Мы приходим к качественным результатам, изложенным в § 4.

§ 6. Вычисление эффективных сечений

До вычисления эффективных сечений следует уточнить, в чем состоит операция детектирования. Каковы бы ни были детали экспериментального устройства, оно обязательно включает некоторую диафрагму, расположенную на расстоянии D и в направлении Ω от мишени. Отверстие диафрагмы пропускает без искажения волну в телесном угле $(\Omega, \Omega + d\Omega)$, остальная часть излучения отсекается. Регистрирующее устройство за диафрагмой детектирует все частицы, проходящие через отверстие. Вероятность $P_b(\Omega)d\Omega$ регистрации частицы, движение которой перед детектированием описывалось волной $\Psi_b(r, t)$, равна полному потоку через отверстие диафрагмы за все время столкновения⁸⁾, или, что то же самое, вероятности нахождения рассеянной частицы в телесном угле $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ по окончании столкновения ($t = T \gg l/v$).

Ввиду того, что детектор достаточно удален в поперечном направлении и проходящая волна не может на него действовать (условие (8)), вычисление указанной выше вероятности должно производиться с помощью рассеянной волны $\Psi_b^{(d)}$. Пользуясь выражением (20), находим

$$P_b(\Omega) = \int_0^{\infty} |\Psi_b^{(d)}(r, T)|^2 r^2 dr = |f_R(\Omega)|^2 \int_0^{\infty} |\chi(u(r-vT) + s - b)|^2 dr. \quad (21)$$

Поскольку $vT \gg l$, можно сделать замену переменной

$$z = r - vT$$

и распространить предел интегрирования до $-\infty$, что дает

$$P_b(\Omega) = |f_R(\Omega)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(uz + s - b)|^2 dz.$$

Рассмотрим теперь пучок частиц с потоком, равным 1: в единицу времени на элемент поверхности $(b, b + db)$ падает db частиц и каждая из них имеет

⁷⁾ Этим интерференционным членом нельзя пренебречь, ибо он обеспечивает сохранение нормы (задача 1).

⁸⁾ Момент пересечения диафрагмы частицей равен в среднем $(D + us)/v$. Он не может быть указан с точностью, превышающей l/v , в согласии с соотношением неопределенности время-энергия; величина us/v может рассматриваться как запаздывание прохождения рассеянной волны. Однако наше экспериментальное устройство, очевидно, не может учесть такое запаздывание, так как $s \ll l$ (см. обсуждение запаздывания отражения в § III. 6). Наблюдение запаздывания этого рода предполагает значительную погрешность определения энергии (см. § 16).

вероятность $P_b(\Omega) d\Omega$ быть рассеянной в направлении $(\Omega, \Omega + d\Omega)$. Вероятность рассеяния в телесном угле $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ в единицу времени и на единицу потока получается интегрированием этого выражения по b :

$$\sigma(\Omega) = |f_k(\Omega)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int db |\chi(uz + s - b)|^2.$$

Область интегрирования по b представляет собой плоскость, перпендикулярную u . Заменой переменных $\rho = uz + s - b$ тройной интеграл сводится к интегралу нормировки функции χ (уравнение (10)). Тогда действительно получаем выражение (2):

$$\sigma(\Omega) = |f_k(\Omega)|^2.$$

§ 7. Столкновение двух частиц. Лабораторная система и система центра масс

Метод отделения движения центра масс позволяет рассмотреть задачу о столкновении двух частиц при наличии потенциала взаимодействия, зависящего только от взаимного положения частиц $V(r)$, путем сведения ее к задаче рассеяния одной частицы на потенциале. Как было показано в разделе III гл. IX (мы будем следовать обозначениям этого раздела), движение двух частиц состоит из двух отдельных движений — движения центра масс как свободной частицы и движения «относительной частицы» с массой $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ под действием потенциала $V(r)$.

В типичном эксперименте по рассеянию мишень, состоящая из частиц типа 2, бомбардируется монокинетическим пучком частиц типа 1 и производится подсчет частиц какого-либо типа, например, типа 1, испускаемых в заданном направлении $\Omega_1 = (\theta_1, \varphi_1)$. До столкновения частица 2 находилась в покое, частица 1 двигалась со скоростью v , так что скорость центра масс равна

$$V = \frac{m_1}{M} v \quad (M = m_1 + m_2).$$

Полная энергия системы является суммой энергий движения центра масс и относительного движения

$$E = E_R + E_r;$$

здесь

$$E = \frac{m_1 v^2}{2}, \quad E_R = \frac{MV^2}{2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} E, \quad E_r = \frac{mv^2}{2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E.$$

Во время столкновения центр масс продолжает оставаться в состоянии равномерного и прямолинейного движения. Очевидно, что величина эффективного сечения рассеяния связана с асимптотическим поведением функций стационарных состояний энергии E_r , зависящих от относительных координат.

Чтобы установить эту связь, удобно изменить систему отсчета и рассматривать явление рассеяния в той системе координат, в которой покоится центр масс частиц. Обычно *лабораторной системой* называется система отсчета, в которой неподвижна частица-мишень до столкновения, а *системой центра масс* — та система, в которой покоится центр масс; первая система рассматривалась выше, вторая равномерно и прямолинейно движется относительно первой со скоростью V . Переход от одной системы к другой изменяет описание движения центра масс, движение «относительной частицы» остается неизменным.

Определение эффективного сечения, данное в § 2, не обязательно предполагает, что частица мишени первоначально покоится.

Отметим, что падающий поток, входящий в это определение, есть поток частиц *относительно* мишени; эта величина не зависит от выбранной системы отсчета. Можно определить эффективное сечение $\sigma(\Omega)$ в системе центра масс, подобно тому как определялось эффективное сечение $\sigma_1(\Omega)$ в лабораторной системе для того же процесса. Величина $\sigma(\Omega)$ равна числу частиц типа 1, испускаемых в единицу времени на единицу телесного угла в направлении Ω , когда частица типа 2 бомбардируется относительным потоком частиц типа 1, равным единице, причем все наблюдения производятся в системе центра масс и углы рассеяния также измеряются в этой системе отсчета.

Из этого определения следует, что

$$\sigma(\Omega) d\Omega = \sigma_1(\Omega_1) d\Omega_1, \quad (22)$$

где Ω_1 — направление движения рассеянной частицы 1 в лабораторной системе отсчета, если в системе центра масс она движется в направлении Ω . Отметим равенство полных эффективных сечений

$$\sigma_{\text{полн}} \equiv \int \sigma(\Omega) d\Omega = \sigma_{1 \text{ полн}}.$$

Это, разумеется, было ясно *a priori*, ибо полное эффективное сечение дает полное число частиц, рассеянных на единицу падающего потока, а эта величина не зависит от системы отсчета.

Величина $\sigma(\Omega)$ по сравнению с $\sigma_1(\Omega_1)$ более непосредственно связана с трехмерной задачей о рассеянии «относительной частицы» потенциалом $V(\mathbf{r})$. Действительно, в системе центра масс направление движения частицы 1 совпадает с направлением движения «относительной частицы» (частица 2 движется в противоположном направлении). Поскольку, кроме того, падающий поток «относительной частицы» по отношению к силовому центру ($r = 0$) равен падающему потоку в нашей задаче

о рассеянии, величина $\sigma(\Omega)$ есть эффективное сечение рассеяния «относительной частицы» в направлении Ω , т. е. дифференциальное эффективное сечение рассеяния в направлении Ω частицы с массой m и начальной скоростью v на потенциале $V(r)$.

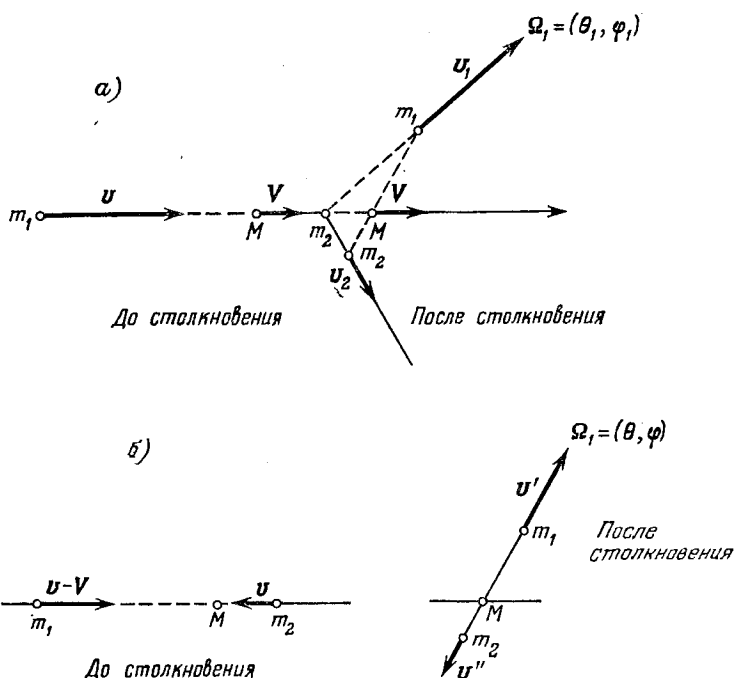


Рис. 31. а) Столкновение в лабораторной системе ($V = \frac{m_1}{M} v$); б) то же столкновение в системе центра масс.

В частности, если потенциал $V(r)$ асимптотически стремится к нулю быстрее, чем $1/r$, уравнение Шредингера для «относительной частицы»

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E_r \psi(\mathbf{r})$$

обладает собственным решением с энергией E_r , асимптотическая форма которого имеет вид

$$e^{ikr} + f(\Omega) \frac{e^{ikr}}{r},$$

где $E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$, $k = mv / \hbar = m_2 k_1 / M$, k_1 — начальный волновой вектор в лабораторной системе координат. В этом случае

$$\sigma(\Omega) = |f(\Omega)|^2,$$

Чтобы перейти от этого выражения⁹⁾ к эффективному сечению $\sigma_1(\Omega_1)$ в лабораторной системе координат, необходимо найти связь между Ω и Ω_1 . В качестве полярной оси в обеих системах отсчета выберем ось, параллельную направлению движения. На рис. 31, а представлена схема столкновения в лабораторной системе, а на рис. 31, б — схема того же столкновения в системе центра масс. Начальные и конечные скорости двух частиц в сферических координатах представлены в следующей таблице.

	Начальные скорости		Конечные скорости	
	1	2	1	2
Лабораторная система	$v(v, 0, 0)$	0	$v_1(v_1, \theta_1, \varphi_1)$	$v_2(v_2, \theta_2, \varphi_2)$
Система центра масс	$v-V(v-V, 0, 0)$	$-V(V, \pi, 0)$	$v'(v', \theta, \varphi)$	$v''(v'', \pi-\theta, \varphi+\pi)$

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v, \quad v' = v - V = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v, \quad v'' = V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v.$$

Направление (θ_1, φ_1) связано с направлением (θ, φ) векторным равенством¹⁰⁾

$$v_1 = v' + V, \quad (23)$$

т. е.

$$\varphi_1 = \varphi, \quad v_1 \sin \theta_1 = v' \sin \theta, \quad v_1 \cos \theta_1 = v' \cos \theta + V,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \tau}$$

⁹⁾ Все эти вычисления справедливы только в нерелятивистском приближении. Однако понятие системы центра масс сохраняет свою силу и в релятивистской механике: это система отсчета, в которой полный импульс (импульс частицы 1 + импульс частицы 2) равен нулю. Переход от системы центра масс к лабораторной системе осуществляется преобразованиями Лоренца. В нерелятивистском приближении преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея, т. е.

$$r_i \rightarrow r_i + Vt, \quad p_i \rightarrow p_i + m_i V.$$

¹⁰⁾ Связь между направлениями (θ_2, φ_2) и (θ, φ) определяется равенством $v_2 = v'' + V$. Поскольку $v'' = V$, нетрудно показать, что $\theta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \theta)$, $\varphi_2 = \varphi + \pi$.

ИЛИ

$$\cos \theta_1 = \frac{\cos \theta + \tau}{(1 + 2\tau \cos \theta + \tau^2)^{1/2}}; \quad (24)$$

в этих выражениях мы положили

$$\tau = V/v' = m_1/m_2. \quad (25)$$

Векторную сумму (23) можно представить графически, тогда соотношение (24) легко получить из чертежа (рис. 32). Возможны два случая:

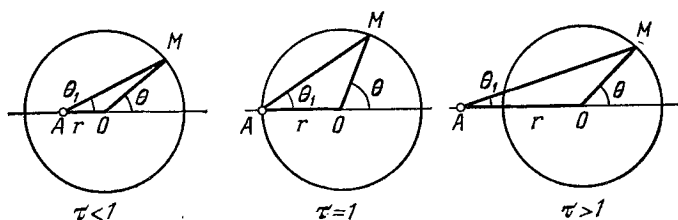


Рис. 32. Геометрическое построение θ_1 в зависимости от θ : $OA = \tau$, $OM = 1$ ($\tau = V/v' = m_1/m_2$).

а) $\tau < 1$ ($m_1 < m_2$). Угол θ_1 монотонно увеличивается от 0 до π , когда θ увеличивается от 0 до π . Заметим, что $\frac{1}{2}\theta < \theta_1 < \theta$ при любом θ . В пределе $m_1 \ll m_2$ имеем $\theta_1 \simeq \theta$ (центр масс практически совпадает с частицей 2, т. е. остается неподвижным в лабораторной системе).

б) $\tau > 1$ ($m_1 > m_2$). Когда θ увеличивается от 0 до π , θ_1 сначала увеличивается от 0 до некоторой максимальной величины, меньшей $\pi/2$ ($\theta_{1 \max} = \arcsin \frac{1}{\tau}$), затем угол θ_1 уменьшается от $\theta_{1 \max}$ до 0. Каждому значению θ_1 соответствуют, таким образом, два значения θ : $\theta_<$ и $\theta_>$, связанные между собой соотношением $\theta_1 = \frac{1}{2}(\theta_< + \theta_> - \pi)$; каждому из этих значений соответствуют два различных значения v_1 , причем меньшему значению угла соответствует большее значение v_1 .

Когда $\tau = 1$ ($m_1 = m_2$), имеем просто $\theta_1 = \theta/2$.

Из соотношения (24) получаем

$$\frac{d(\cos \theta_1)}{d(\cos \theta)} = \frac{1 + \tau \cos \theta}{(1 + 2\tau \cos \theta + \tau^2)^{1/2}}$$

и поскольку

$$\frac{d\Omega_1}{d\Omega} = \left| \frac{d(\cos \theta_1)}{d(\cos \theta)} \right|,$$

находим, применяя соотношение (22):

$$\sigma_1(\Omega_1) = \sigma(\Omega) \frac{d\Omega}{d\Omega_1} = \frac{(1 + 2\tau \cos \theta + \tau^2)^{3/2}}{|1 + \tau \cos \theta|} |f(\Omega)|^2. \quad (26)$$

Раздел II. РАССЕЯНИЕ ЦЕНТРАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ. ФАЗОВЫЕ СДВИГИ

§ 8. Разложение по парциальным волнам. Метод фазовых сдвигов

Рассмотрим рассеяние частицы *центрально-симметричным потенциалом* $V(r)$. Для вычисления эффективного сечения необходимо найти асимптотическую форму стационарной волны рассеяния ψ . С этой целью будем решать уравнение Шредингера в сферических координатах.

Направление начального волнового вектора \mathbf{k} в данном случае является осью вращательной симметрии задачи. Если выбрать это направление в качестве полярной оси, то волна ψ и амплитуда рассеяния f не будут зависеть от угла φ . Разложим эти величины в ряды по полиномам Лежандра:

$$\psi(r, \theta) = \sum_l \frac{y_l(r)}{r} P_l(\cos \theta), \quad (27)$$

$$f(\theta) = \sum_l f_l P_l(\cos \theta). \quad (28)$$

Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon = k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E, \quad U(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r).$$

Тогда y_l есть регулярное решение радиального уравнения

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\varepsilon - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right] y_l = 0 \quad (29)$$

с асимптотическим поведением

$$y_l \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} a_l \sin \left(kr - \frac{l}{2} \pi + \delta_l \right). \quad (30)$$

Фазовые сдвиги δ_l определяются единственным образом по радиальному уравнению. Постоянная a_l должна быть выбрана так, чтобы функция $\psi(r, \theta)$ имела надлежащую асимптотическую форму. Пользуясь разложениями (IX.35) и (28), можно