и поскольку

$$\frac{d\Omega_1}{d\Omega} = \left| \frac{d(\cos\theta_1)}{d(\cos\theta)} \right|,$$

находим, применяя соотношение (22):

$$\sigma_1(\Omega_1) = \sigma(\Omega)\frac{d\Omega}{d\Omega_1} = \frac{(1+2\tau\cos\theta+\tau^2)^{3/2}}{|1+\tau\cos\theta|}|f(\Omega)|^2. \tag{26}$$

Раздел II. РАССЕЯНИЕ ЦЕНТРАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ. ФАЗОВЫЕ СДВИГИ

§ 8. Разложение по парциальным волнам. Метод фазовых сдвигов

Рассмотрим рассеяние частицы *центрально-симметричным потенциалом* $V(r)$. Для вычисления эффективного сечения необходимо найти асимптотическую форму стационарной волны рассеяния ψ. С этой целью будем решать уравнение Шредингера в сферических координатах.

Направление начального волнового вектора $\boldsymbol{k}$ в данном случае является осью вращательной симметрии задачи. Если выбрать это направление в качестве полярной оси, то волна ψ и амплитуда рассеяния f не будут зависеть от угла φ. Разложим эти величины в ряды по полиномам Лежандра:

$$\psi(r,\theta) = \sum_l \frac{y_l(r)}{r} P_l(\cos\theta), \tag{27}$$

$$f(\theta) = \sum_l f_l P_l(\cos\theta). \tag{28}$$

Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon = k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E, \quad U(r) = \frac{2m}{\hbar^2}V(r).$$

Тогда y_l есть регулярное решение радиального уравнения

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\varepsilon - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\right] y_l = 0 \tag{29}$$

с асимптотическим поведением

$$y_l \underset{r\to\infty}{\sim} a_l \sin\left(kr - \frac{l}{2}\pi + \delta_l\right). \tag{30}$$

Фазовые сдвиги δ_l определяются единственным образом по радиальному уравнению. Постоянная a_l должна быть выбрана так, чтобы функция $\psi(r,\theta)$ имела надлежащую асимптотическую форму. Пользуясь разложениями (IX.35) и (28), можно выразить асимптотическую форму ψ в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$e^{ikr}+f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}=\sum_{l}\left[(2l+1)\,i^l j_l(kr)+f_l\frac{e^{ikr}}{r}\right]P_l(\cos\theta).$$

Если учесть также асимптотическое выражение для $j_l(kr)$, то можно переписать этот ряд, разделяя сходящиеся и расходящиеся волны, в форме

$$r\psi(r,\,\theta)\sim\sum_{l}\left[(-1)^{l+1}\,\frac{2l+1}{2ik}\,e^{-ikr}+\left(\frac{2l+1}{2ik}+f_l\right)e^{ikr}\right]P_l(\cos\theta).$$

В асимптотической области функция y_l должна быть равна выражению в квадратных скобках в правой части этой формулы. Это условие фиксирует a_l однозначно и позволяет выразить f_l как функцию фазовых сдвигов. Последовательно имеем

$$a_l=i^l\,\frac{2l+1}{k}\,e^{i\delta_l},\quad f_l=\frac{2l+1}{k}\,e^{i\delta_l}\sin\delta_l.$$

Подставляя последнее соотношение в (28), находим искомое выражение

$$f(\theta)=\lambda\!\!\!{}^{-}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,e^{i\delta_l}\sin\delta_l P_l(\cos\theta),\tag{31}$$

здесь $\lambda\!\!\!{}^{-}$ — начальная длина волны ($\lambda\!\!\!{}^{-}=1/k$).

Полезно сравнить асимптотическую форму y_l/r, т. е. коэффициента разложения по полиномам Лежандра функции ψ, соответствующего моменту импульса l, с соответствующим коэффициентом разложения плоской волны e^{ikr}, а именно $(2l+1)\,i^l j_l(kr)$:

$$\frac{y_l}{r}\sim\frac{(2l+1)}{2ikr}\left((-1)^{l+1}e^{-ikr}+e^{2i\delta_l}e^{ikr}\right),$$

$$(2l+1)\,i^l j_l(kr)\sim\frac{2l+1}{2ikr}\left((-1)^{l+1}e^{-ikr}+e^{ikr}\right).$$

Обе эти функции, как видим, являются суперпозициями сходящейся и расходящейся волн равной интенсивности. Сходящиеся волны, очевидно, одинаковы для обеих функций. Однако член расходящейся волны в стационарном состоянии рассеяния отличается от соответствующего члена в плоской волне фазовым множителем $\exp(2i\delta_l)$: *влияние рассеивающего потенциала сводится к сдвигу фазы каждой парциальной расходящейся волны.*

Дифференциальное эффективное сечение рассеяния получается как квадрат модуля функции $f(\theta)$:

$$\sigma(\Omega) = \bar{\lambda}^2 \sum_{l,\,l'} (2l+1)(2l'+1)\, e^{i(\delta_l - \delta_{l'})} \sin\delta_l \times \\ \times \sin\delta_{l'} P_l(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta). \qquad (32)$$

Интегрируя по углам (θ, φ), получаем полное эффективное сечение. Учитывая соотношения ортогональности полиномов Лежандра, полное сечение можно выразить в виде ряда

$$\sigma_{\text{полн}} = 4\pi\bar{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2\delta_l, \qquad (33)$$

каждый член которого

$$\sigma_l = 4\pi (2l+1)\, \bar{\lambda}^2 \sin^2\delta_l \qquad (34)$$

дает вклад в рассеяние парциальной волны с моментом импульса l. Отметим неравенство

$$\sigma_l \leqslant 4\pi (2l+1)\, \bar{\lambda}^2. \qquad (35)$$

Максимальное значение σ_l достигается при

$$\delta_l = (n + 1/2)\,\pi \qquad (n \text{ — целое число}).$$

§ 9. Квазиклассическое представление рассеяния. Прицельный параметр

Рассмотрим рассеяние *классической* частицы в поле центральной силы. Если энергия падающей частицы фиксирована $E = p^2/2m$, то каждая траектория характеризуется своим прицельным параметром b, определяемым как расстояние от силового центра C до прямой, положение которой определяется начальным импульсом p_0 (рис. 33). При таком столкновении момент импульса L является постоянной движения, причем b прямо пропорционален L

$$L = bp.$$

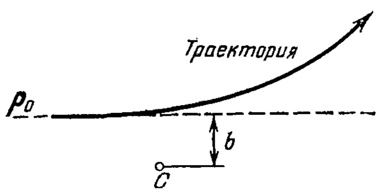

Рис 33. Рассеяние классической частицы на силовом центре C; p_0 — начальный импульс, b — прицельный параметр.

Если поле сил имеет ограниченный радиус действия r_0: $V(r) = 0$ для $r > r_0$, то падающая частица испытывает отклонение траектории при $b < r_0$ и не испытывает его при $b > r_0$. Отклоняются частицы с достаточно малым моментом импульса.

Столкновение в квантовой теории имеет существенно иную природу: это в основе своей явление рассеяния волн. Однако в тех случаях, когда рассеивающий потенциал оказывается пренебрежимо малым на расстояниях, превышающих некоторый радиус r_0 (причем не требуется точного обращения в нуль), квантовое рассеяние имеет много общего с явлением рассеяния пучка классических частиц потенциалом конечного радиуса действия r_0. *Как общее правило, вклад σ_l парциальной волны l пренебрежимо мал*[11]), *если* $l\lambda\!\!\!^{-} \gtrsim r_0$; если же $l\lambda\!\!\!^{-} \lesssim r_0$, то эта величина может принимать все значения от 0 до максимального

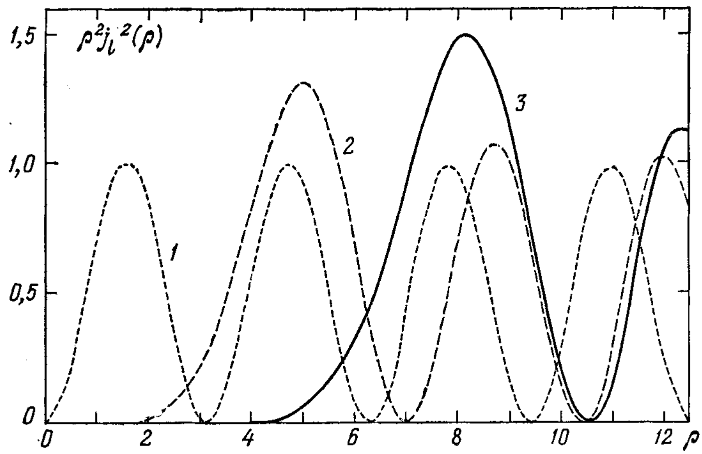

Рис. 34. График функции $\rho^2 j_l^2(\rho)$ для $l=0$ (кривая *1*), 3 (кривая *2*) и 6 (кривая *3*).

значения $4\pi(2l+1)\lambda\!\!\!^{-2}$. Согласно этому правилу существует некоторое сходство между вкладом волны l в рассеяние квантовой частицы и вкладом частиц с прицельным параметром между $l\lambda\!\!\!^{-}$ и $(l+1)l\lambda\!\!\!^{-}$, т. е. моментом импульса от $l\hbar$ до $(l+1)\hbar$, при рассеянии пучка классических частиц.

Это правило основано на следующем полуклассическом рассуждении. Падающая волна представляет собой суперпозицию сферических волн с заданным моментом импульса. Радиальная часть члена, соответствующего парциальной волне l, пропорциональна $j_l(r/\lambda\!\!\!^{-})$, следовательно, относительная вероятность нахождения частицы в сферическом слое $(r, r+dr)$ равна $r^2 j_l^2(r/\lambda\!\!\!^{-})$. Эта вероятность очень мала, пока $r < \sqrt{l(l+1)}\,\lambda\!\!\!^{-}$, и колеблется между 0 и 1, когда $r > \sqrt{l(l+1)}\,\lambda\!\!\!^{-}$ (см. рис. 34).

[11]) Это правило не является абсолютным; мы встретим исключения из него при рассмотрении резонансного рассеяния в § 14.

Если $r_0 < l\lambdabar$, то волна практически не проникает в область действия потенциала и поэтому не испытывает его влияния.

Это рассуждение не является строгим. Более точные результаты относительно сходимости рядов (31) и (32) будут приведены в § 12. Но как бы то ни было, метод фазовых сдвигов особенно удобен при вычислении эффективных сечений в случае, когда радиус действия потенциала не превосходит нескольких длин волн.

Раздел III. ПОТЕНЦИАЛ ОГРАНИЧЕННОГО РАДИУСА ДЕЙСТВИЯ

§ 10. Сдвиг фазы и логарифмическая производная

Предположим, что потенциал $V(r)$ отличен от нуля только в некоторой ограниченной области пространства: $V(r) = 0$ при $r > r_0$.

Пусть q_l — значение в точке r_0 логарифмической производной регулярного в начале координат решения радиального уравнения (29):

$$q_l = \frac{r}{y_l} \frac{dy_l}{dr}\bigg|_{r=r_0} \tag{36}$$

(это определение отличается от обычного множителем r). Мы знаем, что q_l — *монотонно убывающая функция энергии* (§ III.8), детальный вид этой функции зависит, естественно, от формы потенциала $V(r)$.

Однако условие равенства нулю потенциала при $r > r_0$ позволяет установить соотношение между q_l и δ_l, которое не зависит от конкретной формы потенциала $V(r)$: задания q_l достаточно для определения асимптотического поведения решения.

В дальнейшем предполагаем, что нормировка y_l выбирается так, чтобы

$$y_l \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l). \tag{37}$$

Поэтому во внешней области

$$y_l = kr\,[\cos\delta_l j_l(kr) + \sin\delta_l n_l(kr)] \qquad (r > r_0).$$

Для дальнейших выкладок удобно ввести обозначение $\xi = kr$ и ввести сходящиеся и расходящиеся волны

$$u_l^{(\pm)}(\xi) = \xi\,[n_l(\xi) \pm i j_l(\xi)] = \xi h_l^{(\pm)}(\xi),$$

вронскиан которых не зависит от ξ и равен

$$u^{(-)} \frac{d}{d\xi} u^{(+)} - u^{(+)} \frac{d}{d\xi} u^{(-)} = 2i. \tag{38}$$