Если $r_0 < l\lambda\!\!\!^{-}$, то волна практически не проникает в область действия потенциала и поэтому не испытывает его влияния.

Это рассуждение не является строгим. Более точные результаты относительно сходимости рядов (31) и (32) будут приведены в § 12. Но как бы то ни было, метод фазовых сдвигов особенно удобен при вычислении эффективных сечений в случае, когда радиус действия потенциала не превосходит нескольких длин волн.

Раздел III. ПОТЕНЦИАЛ ОГРАНИЧЕННОГО РАДИУСА ДЕЙСТВИЯ

§ 10. Сдвиг фазы и логарифмическая производная

Предположим, что потенциал $V(r)$ отличен от нуля только в некоторой ограниченной области пространства: $V(r) = 0$ при $r > r_0$.

Пусть q_l — значение в точке r_0 логарифмической производной регулярного в начале координат решения радиального уравнения (29):

$$q_l = \frac{r}{y_l}\frac{dy_l}{dr}\bigg|_{r=r_0} \tag{36}$$

(это определение отличается от обычного множителем r). Мы знаем, что q_l — *монотонно убывающая функция энергии* (§ III.8), детальный вид этой функции зависит, естественно, от формы потенциала $V(r)$.

Однако условие равенства нулю потенциала при $r > r_0$ позволяет установить соотношение между q_l и δ_l, которое не зависит от конкретной формы потенциала $V(r)$: задания q_l достаточно для определения асимптотического поведения решения.

В дальнейшем предполагаем, что нормировка y_l выбирается так, чтобы

$$y_l \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l). \tag{37}$$

Поэтому во внешней области

$$y_l = kr\,[\cos\delta_l j_l(kr) + \sin\delta_l n_l(kr)] \qquad (r > r_0).$$

Для дальнейших выкладок удобно ввести обозначение $\xi = kr$ и ввести сходящиеся и расходящиеся волны

$$u_l^{(\pm)}(\xi) = \xi\,[n_l(\xi) \pm i j_l(\xi)] = \xi h_l^{(\pm)}(\xi),$$

вронскиан которых не зависит от ξ и равен

$$u^{(-)}\frac{d}{d\xi}u^{(+)} - u^{(+)}\frac{d}{d\xi}u^{(-)} = 2i. \tag{38}$$

Во внешней области

$$y_l = \frac{1}{2i}\left(u_l^{(+)} e^{i\delta_l} - u_l^{(-)} e^{-i\delta_l}\right) = \operatorname{Im} u_l^{(+)} e^{i\delta_l} \qquad (r > r_0). \tag{39}$$

Условие непрерывности логарифмической производной в точке $r = r_0$ дает соотношение

$$q_l = \xi \frac{\operatorname{Im} e^{i\delta_l}\left(\dfrac{du_l^{(+)}}{d\xi}\right)}{\operatorname{Im} e^{i\delta_l} u_l^{(+)}}\Bigg|_{\xi = kr_0}. \tag{40}$$

Это и есть искомое соотношение между q_l и δ_l.

Чтобы представить данное соотношение в более удобной форме, введем обозначения:

$$\left|u_l^{(\pm)}(kr_0)\right| = \frac{1}{\sqrt{v_l}}, \qquad u_l^{(\pm)}(kr_0) = \frac{e^{\mp i\tau_l}}{\sqrt{v_l}},$$

$$\frac{\xi}{u_l^{(\pm)}}\left(\frac{du_l^{(\pm)}}{d\xi}\right)\Bigg|_{\xi = kr_0} = q_l^{(\pm)}. \tag{41}$$

Из уравнения (38) следует (см. задачу 3)

$$\operatorname{Im} q_l^{(+)} = kr_0 v_l.$$

Здесь v_l — положительная величина, не превосходящая 1, она называется *фактором проникновения.*

В этих обозначениях условие непрерывности (40) записывается так:

$$e^{2i\delta_l} = e^{2i\tau_l} \frac{q_l - q_l^{(-)}}{q_l - q_l^{(+)}}$$

или же

$$\delta_l = \tau_l + \rho_l, \tag{42}$$

где

$$\rho_l = \arg\left(q_l - q_l^{(-)}\right) = \operatorname{arctg} \frac{kr_0 v_l}{q_l - \operatorname{Re} q_l^{(+)}}. \tag{43}$$

Мы видим, что фазовый сдвиг δ_l выражается в виде суммы двух членов, из которых первый, τ_l, не зависит от конкретной формы рассеивающего потенциала, а второй, ρ_l, зависит от нее через q_l согласно уравнению (43).

Заметим, между прочим, что

$$y_l(r_0) = \frac{\sin \rho_l}{\sqrt{v_l}}. \tag{44}$$

§ 11. Сдвиги фаз при низких энергиях ($\lambda \to \infty$)

Зная поведение сферических функций Бесселя при малых значениях аргумента (уравнение (Б. 52)), можно из уравнений (42) — (43) найти поведение δ_l, когда $kr_0 \ll l$, т. е. или при очень малых энергиях или при очень больших значениях момента импульса. Действительно, если $kr_0 \ll l$, то

$$\begin{aligned} \tau_l &\simeq \frac{(kr_0)^{2l+1}}{(2l+1)!!\,(2l-1)!!}, \\ v_l &\simeq \frac{(kr_0)^{2l}}{[(2l-1)!!]^2}, \quad \operatorname{Re} q_l^{(+)} \simeq -l + O\left(k^2 r_0^2\right) \end{aligned} \tag{45}$$

(эти выражения справедливы и при $l = 0$, если $kr_0 \ll 1$).

Рассмотрим поведение эффективных сечений, когда энергия частицы стремится к нулю. При этом вещественная величина q_l увеличивается до некоторого предельного значения $\hat{q}_l$. В общем случае $\hat{q}_l \neq -l$, так что фазовый сдвиг δ_l стремится к нулю как k^{2l+1}. Находим

$$\delta_l \underset{k\to 0}{\sim} \frac{l+1-\hat{q}_l}{l+\hat{q}_l}\, \frac{(kr_0)^{2l+1}}{(2l+1)!!\,(2l-1)!!}. \tag{46}$$

Таким образом, амплитуда f_l, пропорциональная δ_l/k, стремится к нулю как k^{2l}. Следовательно, в пределе очень малых энергий эффективное сечение становится изотропным, так как все парциальные сечения σ_l стремятся к нулю как k^{4l} (уравнение (34)), кроме сечения s-волны σ_0, которое стремится к некоторой постоянной, вообще говоря, отличной от нуля.

По определению *длиной рассеяния* называется величина

$$a = -\lim_{k\to 0} f_0 = -\lim_{k\to 0} \frac{\delta_0}{k} = \left(1 - \frac{1}{\hat{q}_0}\right) r_0. \tag{47}$$

Длина рассеяния a получается при решении радиального уравнения, соответствующего нулевой энергии:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - U(r)\right] y_0 = 0.$$

Это расстояние от начала координат до точки, в которой асимптота y_0 пересекает ось r. В пределе очень малых энергий

$$\sigma_{\text{полн}} = \sigma_0 = 4\pi a^2.$$

Если окажется, что $\hat{q}_l = -l$, то при стремлении энергии к нулю амплитуда f_l ведет себя как k^{2l-2} (кроме случая $l = 0$, когда из $\hat{q}_0 = 0$ следует $f_0 \sim i/k$). Говорят, что имеется *резонанс* с нулевой энергией в состоянии l. Предшествующие выводы должны быть изменены следующим образом. Если это резонанс $s\,(l = 0)$, то a бесконечно и $\sigma_{\text{полн}}$ стремится к бесконечности как $1/E$. Если это резонанс $p(l=1)$, то $f(\theta)$ имеет вид $-a+b\cos\theta$, а эффективное сечение остается ограниченным, но не является изотропным. Если же резонанс имеет более высокий порядок, то он не влияет на общее поведение эффективных сечений в пределе малых энергий.

§ 12. Парциальные волны более высокого порядка. Сходимость ряда ($l\to\infty$)

Асимптотические формулы (45) позволяют также найти асимптотический вид фазовых сдвигов высокого порядка при заданном (ненулевом) значении энергии. Если l достаточно велико, выражение

$$k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}$$

остается отрицательным в интервале $(0, r_0)$; следовательно, решение y_l уравнения (29) в этом интервале ведет себя экспоненциально: величина q_l, очевидно, положительна. Кроме того, при $l \gg kr_0$ можно использовать выражения (45) и ввиду того что $q_l + l$ несомненно отлично от нуля, получаем следующее асимптотическое выражение, сходное с формулой (46):

$$\delta_l \underset{l\to\infty}{\simeq} \frac{l+1-q_l}{l+q_l}\,\frac{(kr_0)^{2l+1}}{(2l-1)!!\,(2l+1)!!}. \tag{48}$$

Выражение (48) определяет скорость сходимости разложения по парциальным волнам в случае, когда рассеивающий потенциал имеет ограниченный радиус действия. Это подтверждает оценки по порядку величины, сделанные в § 9.

§ 13. Рассеяние на твердой сфере

Если потенциал ограниченного радиуса действия соответствует потенциалу твердой сферы

$$V(r) = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad r < r_0, \\ 0, & \text{если} \quad r > r_0, \end{cases}$$

то все формулы § 10 упрощаются. Волновая функция должна обращаться в нуль на поверхности сферы, т. е. $y_l(r_0) = 0$ при любых $l\,(q_l = -\infty)$, что дает (уравнение (44)) $\rho_l = 0$, т. е.

$$\delta_l = \tau_l = \arg u_l^{(-)}. \tag{49}$$

После соответствующих вычислений получаем

$$\sigma_l = \frac{4\pi(2l+1)}{k^2}\,\frac{j_l^2(kr_0)}{j_l^2(kr_0) + n_l^2(kr_0)} \tag{50}$$

и, в частности,

$$\sigma_0 = 4\pi r_0^2 \left(\frac{\sin kr_0}{kr_0}\right)^2.$$

При очень малых энергиях, в согласии с результатами § 11, дифференциальное эффективное сечение становится изотропным, и полное эффективное сечение имеет предел

$$\lim_{k\to 0} \sigma_{\text{полн}} = \lim_{k\to 0} \sigma_0 = 4\pi r_0^2, \tag{51}$$

соответствующий длине рассеяния $a = r_0$.

При возрастании энергии вклад парциальных волн высокого порядка становится все более значительным, а анизотропия рассеяния — все более выраженной. При очень больших энергиях ($\lambda\!\!\!{}^{-} \ll r_0$) дифференциальные и полные эффективные сечения могут быть вычислены при использовании асимптотического поведения функций Бесселя больших порядков. Таким путем получаем [12]):

$$\sigma(\Omega) \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{r_0^2}{4}\left[1 + \operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2} J_1^2(kr_0\sin\theta)\right], \tag{52}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{\text{полн}} = 2\pi r_0^2. \tag{53}$$

Дадим упрощенное доказательство соотношения (53). Зная функции $j_l(\xi)$ и $n_l(\xi)$, нетрудно установить поведение функции

$$g_l(\xi) = \frac{j_l^2(\xi)}{j_l^2(\xi) + n_l^2(\xi)}.$$

Эта функция ведет себя как $\xi^{4l+2}/(2l+1)!!(2l-1)!!$ вблизи $\xi = 0$, затем монотонно растет до окрестности $\xi = l$, а затем бесконечно осциллирует по закону

$$g_l(\xi) \underset{\xi\to\infty}{\sim} \sin^2\left(\xi - \frac{l}{2}\pi\right). \tag{54}$$

Поэтому в сумме

$$\sigma_{\text{полн}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, g_l(kr_0)$$

---

[12]) См. книгу Морса и Фешбаха, *loc, cit.*, сноска VI. [9] $J_1(x)$ есть функция Бесселя первого порядка. При изменении x от 0 до $+\infty$ функция $J_1(x)$ сначала растет от нуля ($J_1(x) \sim x/2$), до первого максимума $J_1(1{,}84) \simeq 0{,}58$, затем уменьшается и первый раз обращается в нуль при $x \simeq 3{,}83$; далее функция бесконечно осциллирует, согласно формуле

$$J_1(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right).$$

вклад членов $l > kr_0$ пренебрежимо мал по сравнению со вкладом членов $l < kr_0$, который можно грубо оценить, используя асимптотическую форму (54), что дает

$$\sigma_{\text{полн}} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{kr} (2l+1) \sin^2 \left(kr_0 - \frac{l}{2}\pi\right).$$

Эту сумму можно оценить, группируя попарно последовательные члены, что в пределе очень больших k дает

$$\int_0^{kr_0} l\, dl = \frac{k^2 r_0^2}{2},$$

откуда и получается выражение (53).

Таким образом, в пределе малых длин волн ($kr_0 \gg 1$) мы не получаем эффективного сечения рассеяния классической частицы твердой сферой радиуса r_0. Полное классическое эффективное сечение

$$\sigma_{\text{кл}} = \pi r_0^2$$

равно только половине квантового результата в пределе малых длин волн. Аналогичным образом, дифференциальное классическое эффективное сечение изотропно и равно $r_0^2/4$: оно соответствует первому члену асимптотической формы (52) для $\sigma(\Omega)$.

Эти результаты показывают, что в рассматриваемом случае нельзя пренебречь волновым аспектом явления, так как даже в предельной ситуации очень малых длин волн потенциал нельзя считать медленно меняющимся в пространстве ввиду наличия разрыва в точке $r = r_0$. Наблюдаемое явление совершенно аналогично явлению дифракции в оптике, на что указывает исследование асимптотической формы (52) дифференциального эффективного сечения. Это выражение содержит два члена. Первый член изотропного «отражения» идентичен классическому дифференциальному эффективному сечению. Второй,

$$\frac{1}{4} r_0^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} J_1^2 (kr_0 \sin\theta),$$

является резко анизотропным: он дает существенный вклад только при малых углах порядка $\lambda\!\!\!^{-}/r_0$; это член «дифракции» (теневое рассеяние), связанный с наличием тени от идеально отражающей сферы на пути падающей волны.