Раздел IV. РЕЗОНАНСНОЕ РАССЕЯНИЕ

§ 14. Рассеяние глубокой прямоугольной потенциальной ямой

В качестве другого примера потенциала конечного радиуса действия рассмотрим прямоугольную потенциальную яму из § IX. 10. Положим

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}, \quad V_0=\frac{\hbar^2K_0^2}{2m}, \quad K^2=K_0^2+k^2$$

и выясним поведение различных парциальных волн в зависимости от энергии в случае очень глубокой ямы. Точнее говоря, предположим, что

$$Kr_0 \gg l, \tag{55}$$

$$K \gg k. \tag{56}$$

В этом случае величину q_l в правой части уравнения (43) в хорошем приближении можно выразить в виде

$$q_l \simeq Kr_0 \operatorname{ctg}(Kr_0-l\pi/2). \tag{57}$$

Нетрудно проанализировать общее поведение $\delta_l(E)$ при малых энергиях (т. е., согласно (56), при $E \ll V_0$). По формулам (42) и (43) δ_l зависит от энергии посредством величин τ_l, kr_0v_l, $\operatorname{Re} q_l^{(+)}$ и q_l. Первые три величины являются монотонными функциями kr_0 (τ_l убывает, две другие функции растут), причем поведение их вблизи нуля определяется формулами (45), а в асимптотической области ($kr_0 \gg l$) выражениями

$$\begin{gathered}\tau_l \underset{kr_0\to\infty}{\sim} -\left(kr_0-\frac{l}{2}\pi\right),\\ \lim_{kr_0\to\infty} v_l=1, \quad \lim_{kr_0\to\infty} \operatorname{Re} q_l^{(+)}=0.\end{gathered} \tag{58}$$

В интересующей нас области энергий эти три функции изменяются относительно медленно. Напротив, логарифмическая производная q_l, как это видно из формулы (57), меняется быстро, имея при этом серию вертикальных асимптот, соответствующих тем энергиям, для которых $Kr_0=l\pi/2+n\pi$ (n — целое). Разность энергий между соседними асимптотами равна примерно

$$D \simeq \pi\frac{\hbar^2K}{mr_0} \simeq \pi\frac{V_0}{K_0r_0}. \tag{59}$$

Когда энергия изменяется на эту величину, $|q_l|$ почти всюду оказывается порядка или больше Kr_0, так что почти на всем интервале

$$|q_l-\operatorname{Re} q_l^{(+)}| \gg kr_0v_l.$$

Второй член в правой части формулы (42) — ρ_l — остается малым (с точностью до слагаемого $n\pi$):

$$\rho_l \simeq \frac{kr_0 v_l}{q_l - \mathrm{Re}\, q_l^{(+)}} \lesssim \frac{k}{K} v_l,$$

в то же время *a priori* нет никаких ограничений на величину τ_l. Поэтому справедливо приближенное равенство $\delta_l \simeq \tau_l$. Фазовые сдвиги практически совпадают с теми, которые наблюдаются при рассеянии на твердой сфере того же радиуса. В большей части области изменения энергии потенциал рассеивает каждую парциальную волну подобно твердой сфере: мы имеем дело с «потенциальным рассеянием»; падающая волна практически не проникает во внутреннюю область потенциальной ямы.

Однако существует небольшая область энергий, окружающая точку E_p, где $q_l = \mathrm{Re}\, q_l^{(+)}$; для этой области

$$|q_l - \mathrm{Re}\, q_l^{(+)}| \lesssim kr_0 v_l.$$

Определим величины

$$\gamma = -\left.\frac{dE}{dq_l}\right|_{E=E_\mathrm{p}} \quad (\gamma > 0) \quad \text{и} \quad \Gamma = 2kr_0 v_l \gamma; \tag{60}$$

при этом Γ есть ширина указанной области. Замечаем, что[13])

$$\frac{\Gamma}{D} \approx \frac{2}{\pi} \cdot \frac{k}{K} v_l \ll 1.$$

При изменении энергии на несколько Γ в обе стороны от E_p величина $q_l - \mathrm{Re}\, q_l^{(+)}$ уменьшается от значений, существенно превосходящих kr_0v_l, до значений, существенно меньших $-kr_0v_l$, а ρ_l быстро переходит от значений, соседних с $n\pi$, к значениям, близким $(n+1)\pi$. Эффективное сечение σ_l претерпевает резкое изменение, достигая максимального значения $4\pi(2l+1)\lambda\!\!\!^{-2}$: говорят, что имеет место *резонанс* l. По определению E_p есть энер-

[13]) Действительно, согласно уравнению (57):

$$\frac{dq_l}{d\,(Kr_0)} = -Kr_0 \left[1 + \frac{q_l(q_l - 1)}{(Kr_0)^2}\right].$$

Поскольку $Kr_0 \gg l$ и $|\mathrm{Re}\, q_l^{(+)}| \lesssim l$, то $\dfrac{dq_l}{dK} \simeq -Kr_0^2$, когда $E = E_\mathrm{p}$, откуда

$$\gamma \simeq \frac{\hbar^2}{mr_0^2} \quad \text{и} \quad \Gamma \simeq 2v_l \frac{\hbar^2 k}{mr_0}.$$

гия резонанса[14]), Γ — ширина резонанса, причем Γ есть произведение величины γ, зависящей от общего поведения потенциала во внутренней области (и практически не зависящей от l), и фактора kr_0v_l, зависящего от поведения волны во внешней области (и малого при больших l).

Область резонанса достаточно мала, так что можно заменить кривую $q_l(E)$ ее касательной в точке $E = E_p$, откуда

$$\rho_l \approx \operatorname{arctg} \frac{\Gamma}{2(E_p - E)}. \tag{61}$$

Используя условие непрерывности (44) для нормировки радиальной функции во внутренней области, находим в том же приближении (справедливом в интервале энергии, охватывающем резонанс, причем $\Gamma \ll \Delta E \ll D$):

$$y_l = \frac{1}{\sqrt{v_l}} \frac{\Gamma}{\sqrt{4(E - E_p)^2 + \Gamma^2}} K_p j_l(Kr) \qquad (r < r_0). \tag{62}$$

Прохождение энергетической области резонанса l сопровождается, таким образом, резким увеличением интенсивности парциальной l-волны во внутренней области потенциальной ямы.

Весь анализ значительно упрощается в случае s-волны, когда

$$\tau_0 = -kr_0, \quad v_0 = 1, \quad \operatorname{Re} q_0^{(+)} = 0, \quad q_0 = Kr_0 \operatorname{ctg} Kr_0,$$

$$\delta_0 = -kr_0 + \operatorname{arctg}\left(\frac{k}{K} \operatorname{tg} Kr_0\right).$$

Для функции y_0 находим явное выражение:

$$y_0 = \begin{cases} \sin(kr + \delta_0) & r > r_0, \\ \dfrac{k}{\sqrt{k^2 + K_0^2 \cos^2 Kr_0}} \sin Kr & r < r_0. \end{cases}$$

С учетом замены значений ($L \to r_0$, $K \to K_0$, $\eta K \to k$, $\xi K \to K$, $\varphi_l \to \rho_0 - \pi/2$) задача об рассеянии эквивалентна задаче об отражении волн прямоугольной потенциальной ямой в одномерном случае из § III. 6 (случай б)) — обсуждение явления резонанса может быть повторено здесь без изменений.

§ 15. Общий закон резонансного рассеяния. Метастабильные состояния

Явление резонанса довольно часто встречается в микроскопической физике. Резонансное рассеяние, которое мы рассмот-

[14]) Ввиду присутствия потенциального рассеяния максимальное значение σ_l достигается при значении энергии, несколько отличающемся от резонансного, которое определяется условием $\rho_l = \pi/2$ (с точностью до слагаемого $n\pi$). Может даже оказаться, что в точке резонанса $\tau_l = \pi/2$, и поэтому σ_l обращается в нуль при $E = E_p$; тогда прохождение резонансной области энергии сопровождается резким падением до нуля функции $\sigma_l(E)$.

рели на примере прямоугольной потенциальной ямы, будет иметь место и с потенциалами другой формы, если только в некоторой области пространства потенциал становится резко притягивающим. Ввиду особой важности этого явления дадим здесь более подробное описание резонансного рассеяния l-типа. Мы по-прежнему будем рассматривать прямоугольную яму, однако результаты без труда переносятся на потенциалы более общего вида, так как форма потенциала влияет только на закон изменения логарифмической производной q_l.

Ради простоты изложения предположим, что резонансы достаточно узки и достаточно хорошо отделены друг от друга, так что в изучаемой области энергии присутствует только один резонанс данной парциальной волны. Кроме того, будем считать энергию резонанса столь малой, что

$$kr_0 \ll 1 \tag{63}$$

и что, следовательно, вкладом потенциального рассеяния можно полностью пренебречь[15]). Иными словами, все фазовые сдвиги, кроме δ_l, практически равны нулю, а фаза δ_l, как функция начальной энергии E, изменяется по закону

$$\delta_l \approx \rho_l = \operatorname{arctg} \frac{\Gamma}{2(E_p - E)}.$$

Следовательно,

$$e^{i\delta_l} \sin\delta_l = \frac{\operatorname{tg}\delta_l}{1 - i\operatorname{tg}\delta_l} \approx -\frac{\Gamma}{2(E - E_p) + i\Gamma},$$

и амплитуда рассеяния записывается в форме

$$f(\theta) \approx -\frac{2l+1}{k} P_l(\cos\theta) \frac{\Gamma}{2(E - E_p) + i\Gamma}. \tag{64}$$

При прохождении резонанса модуль и производная фазы комплексной функции $f(\theta)$ обнаруживают острые максимумы. Имеем

$$\sigma(\Omega) = |f(\theta)|^2 = (2l+1)^2 P_l^2(\cos\theta)\, \lambda\!\!\bar{}^{\,2} \frac{\Gamma^2}{4(E - E_p)^2 + \Gamma^2}, \tag{65}$$

$$\frac{d}{dE}[\arg f(\theta)] = \frac{d\delta_l}{dE} = \frac{2}{\Gamma} \frac{\Gamma^2}{4(E - E_p)^2 + \Gamma^2}. \tag{66}$$

Уравнение (65) показывает, что вблизи резонанса — в той мере, в какой можно пренебречь эффектом потенциального рассеяния, — угловое распределение рассеяния не зависит от энергии, а определяется только моментом импульса l; при

[15]) Вклад этих членов в эффективное сечение порядка $4\pi r_0^2$, а члена l-резонанса в точке резонанса — порядка $4\pi(2l+1)\lambda\!\!\bar{}^{\,2} = 4\pi(2l+1)/k^2$.

этом полное эффективное сечение, как функция энергии, следует «закону Лоренца»:

$$\sigma_{\text{полн}} = 4\pi (2l+1) \lambda\!\!\!^{-2} \frac{\Gamma^2}{4(E-E_{\text{р}})^2+\Gamma^2}. \qquad (67)$$

Для выяснения смысла уравнения (66) следует вернуться к исследованию рассеяния волнового пакета, проведенного в §§ 4, 5. В принятых там обозначениях можно написать

$$\frac{us}{v} = \hbar \frac{d}{dE} [\arg f(\theta)].$$

Следовательно, формула (66) выражает запаздывание в прохождении рассеянной волны (см. сноску [8])). Мы видим, что это запаздывание зависит от энергии падающей частицы по тому же закону Лоренца, что и полное сечение, и достигает максимума $2\hbar/\Gamma$ в точке резонанса.

Полученные результаты позволяют описать явление резонанса следующим образом. В случае энергий, далеких от резонансной, падающая волна практически не проникает во внутреннюю область действия потенциала (ср. уравнение (62)) и все происходит так, как если бы она встретила на своем пути твердую сферу: рассеивается только малая фракция волны, причем рассеяние происходит без запаздывания (запаздывание порядка — r_0/v). Если же энергия частицы близка к резонансной энергии, то падающая волна глубоко проникает во внутреннюю область действия потенциала: при этом значительная часть волнового пакета в течение промежутка времени порядка $\hbar/\Gamma$ удерживается во внутренней зоне, а затем испукается в виде рассеянной волны. Этим объясняется большое резонансное эффективное сечение рассеяния. В течение указанного промежутка времени перед испусканием рассеянной волны вероятность присутствия частицы во внутренней области действия потенциала оказывается очень большой и по порядку величины равной соответствующей вероятности для связанного состояния. Однако если связанное состояние является стационарным и имеет бесконечно большое время жизни, то рассматриваемое *метастабильное* состояние имеет конечное время жизни порядка $\hbar/\Gamma$. Учитывая соотношение неопределенности время-энергия, мы приходим к выводу, что такое состояние не имеет точно определенной энергии и должно быть представлено волновым пакетом с дисперсией по энергии порядка Γ. Таким образом, каждому резонансу сопоставляется метастабильное состояние с конечным временем жизни $\hbar/\Gamma$, причем среднее значение энергии состояния равно энергии резонанса $E_{\text{р}}$, а дисперсия энергии равна ширине резонанса Γ.

§ 16. Наблюдение времени жизни метастабильных состояний

Приведенное выше полуклассическое описание резонансного рассеяния не свободно от противоречий. Дело в том, что в обычных экспериментальных условиях измерения эффективных сечений (указанных в §§ 4—6) выявление метастабильных состояний, о которых шла речь выше, невозможно. Для измерения эффективного сечения рассеяния при заданной энергии частицы необходимо, чтобы дисперсия энергии ΔE была настолько мала, чтобы амплитуда рассеяния на интервале ΔE оставалась практически постоянной; в резонансной области это означает $\Delta E \ll \Gamma$. Только при выполнении этого условия можно действительно измерить ход изменения эффективного сечения в резонансной области, Однако при этом время столкновения $\hbar/\Delta E$, т. е. время, необходимое для полного проникновения волнового пакета во внутреннюю область действия потенциала, оказывается значительно больше времени жизни $\hbar/\Gamma$ метастабильного состояния. Это последнее становится таким образом ненаблюдаемым (см. сноску [8]).

Чтобы выявить метастабильное состояние, следует осуществить «дополнительные» (в смысле Бора) условия эксперимента

$$\Delta E \gg \Gamma. \tag{68}$$

Для определенности (см. сноску [4]) рассмотрим волновой пакет изученного в § 5 типа, который удовлетворяет одновременно условиям (9) и условию (68). Предположим, кроме того, что $E_p \gg \Delta E \gg \Gamma$[16]). Мы используем обозначения §§ 4—6 и примем, что $b = 0$ и $t_0 = 0$. Подставляя в (17) выражение (64) для $f(\theta)$, получим следующую асимптотическую форму рассеянного волнового пакета:

$$\Psi^{(d)} \sim -(2l+1)\, P_l(\cos\theta)\, \frac{\Gamma}{2} \cdot \frac{e^{i\left(k_p r - \frac{E_p t}{\hbar}\right)}}{r}\, I,$$

где

$$I = \int \frac{A(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k})}{E' - E_p + \frac{i}{2}\Gamma}\, e^{i\left[(k' - k_p)\, r - \frac{E' - E_p}{\hbar}\, t\right]}\, \frac{d\boldsymbol{k}'}{k'}$$

$\left(\text{здесь мы обозначили } E_p = \frac{\hbar^2 k_p^2}{2m} = \frac{m v_p^2}{2}\right)$.

Основной вклад в интеграл I дает область, где велико значение $A(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}) \Big/ \left(E' - E_p + \frac{i}{2}\Gamma\right)$. Переходя к сферическим координатам, положим

$$d\boldsymbol{k}' = k'^2\, d\Omega'\, dk' = \frac{mk'}{\hbar^2}\, d\Omega'\, dE'$$

и $\boldsymbol{k}' = k'\boldsymbol{u}'$. Интегрирование по углам касается только функции $A(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k})$. Что касается интегрирования по E', то согласно предположению (68) существенной областью является $|E' - E_p| \lesssim \Gamma$, где функция $A(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k})$ может быть

[16]) Это предположение, а также условие (63) не являются существенными, но они позволяют выразить окончательный результат в более простой форме. Для выполнения этих условий совместно с (9) и (68) необходимо потребовать $v_l \ll kr_0 \ll 1$.

заменена на $A(k_p\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{k})$, а k' — на первые два члена разложения Тейлора (считаем $\Gamma \ll E_p$):

$$k' \simeq k_p + \frac{1}{\hbar v_p}(E'-E_p).$$

Поэтому можно написать

$$I \simeq \frac{m}{\hbar^2} A_p F\left(t - \frac{r}{v_p}\right),$$

где мы обозначили

$$A_p = \int A(k_p\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{k})\, d\Omega',$$

$$F(\tau) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E'-E_p)\tau}}{E' - E_p + \frac{i}{2}\Gamma}\, dE'.$$

Читатель без труда проверит, что это выражение для I справедливо только, если $|\tau| \gg \hbar/\Delta E$. Заметим, что

$$F(\tau) = \int_{-\frac{2E_p}{\Gamma}}^{\infty} \frac{e^{-i\frac{\Gamma\tau}{2\hbar}\cdot z}}{z+i}\, dz.$$

Поскольку $|\tau| \gg \hbar/\Delta E_p$, нижний предел интегрирования можно заменить на $-\infty$ и тогда интеграл $F(\tau)$ вычисляется по теории вычетов; именно

$$F(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \tau \ll -\hbar/\Delta E < 0; \\ -2\pi i e^{-\Gamma\tau/2\hbar}, & \text{если} \quad \tau \gg \hbar/\Delta E > 0. \end{cases} \tag{69}$$

Окончательно получаем

$$\Psi^{(d)} \sim -(2l+1) P_l(\cos\theta) \frac{mA_p}{2\hbar^2} \Gamma \cdot F\left(t - \frac{r}{v_p}\right) \frac{e^{i\left(k_p r - \frac{E_p t}{\hbar}\right)}}{r}. \tag{70}$$

Общее поведение этой волновой функции определяется свойствами функции $F(\tau)$, вытекающими из (69). Это расходящаяся волна, ограниченная спереди волновым фронтом, перемещающимся по закону $r = v_p t$. В каждой данной точке интенсивность волны сначала равна нулю, затем она резко изменяется от 0 до некоторого положительного значения — это соответствует прохождению волнового фронта, оно продолжается примерно в течение времени $\hbar/\Delta E$, что значительно меньше $\hbar/\Gamma$; затем интенсивность уменьшается по закону $\exp(-\Gamma t/\hbar)$.

На опыте, чтобы обнаружить этот закон экспоненциального затухания, в течение короткого промежутка времени посылают пучок волновых пакетов, отвечающих указанным выше условиям, и регистрируют с помощью детектора на расстоянии D от рассеивающего центра число частиц, рассеянных в направлении телесного угла $(\Omega, \Omega + d\Omega)$. Поскольку дисперсия энергии [17]) падающих волновых пакетов очень велика ($\Delta E \gg \Gamma$), момент столкновения $t = 0$ определяется точно: $\Delta t \ll \hbar/\Gamma$. Количество детектируемых частиц определяет-

[17]) Это дисперсия энергии каждого волнового пакета отдельно.

ся величиной $|\Psi^{(d)}|^2$ в точке нахождения счетчика; согласно уравнению (70), она пропорциональна $F^2(t - D/v)$. Частицы не регистрируются до момента времени D/v_p, когда фронт волны достигает счетчика; это время, необходимое для того, чтобы частица, испущенная центром с «резонансной скоростью» v_p, достигла счетчика. В дальнейшем число регистраций частиц определяется законом $\exp(-\Gamma t/\hbar)$, что и соответствует образованию в момент времени $t = 0$ метастабильного состояния со временем жизни $\hbar/\Gamma$.

Указанные выше условия эксперимента обычно осуществляются при радиоактивном распаде ядер (α- и β-радиоактивность, γ-радиоактивность изомерных ядер).

Раздел V. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМУЛЫ И СВОЙСТВА

§ 17. Интегральные представления фазовых сдвигов

Некоторые свойства и методы вычисления фазовых сдвигов могут быть получены из соответствующих интегральных представлений. Интегральные представления фазовых сдвигов очень разнообразны. Чаще всего они получаются простым применением теоремы вронскиана к подходящим образом выбранным решениям радиального уравнения. Одно такое представление мы дадим в этом параграфе. Другое будет изучено в § 20.

Наша цель состоит в сравнении фазовых сдвигов δ_l и $\hat{\delta}_l$, соответствующих потенциалам $V(r)$ и $\hat{V}(r)$ при одной и той же энергии. Вернемся к обозначениям § 8 и положим $\hat{U} = 2m\hat{V}/\hbar^2$. Пусть y_l — регулярное решение уравнения (29), причем асимптотическая форма y_l дается формулой (37). Тогда $\hat{y}_l$ — регулярное решение радиального уравнения

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\varepsilon - \hat{U} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\right]\hat{y}_l = 0 \tag{71}$$

с асимптотической формой

$$\hat{y}_l \underset{r\to\infty}{\sim} \sin\left(kr - \frac{l}{2}\pi + \hat{\delta}_l\right).$$

Вронскиан $W(y_l, \hat{y}_l)$ равен нулю в начале координат и стремится асимптотически к пределу

$$\lim_{r\to\infty} W(y_l, \hat{y}_l) = k \sin(\delta_l - \hat{\delta}_l).$$

Согласно теореме вронскиана

$$W(y_l - \hat{y}_l)\Big|_a^b = -\int_a^b \hat{y}_l (U - \hat{U})\, y_l\, dr.$$

Устремляя пределы интегрирования a и b к 0 и ∞ соответственно, находим

$$\sin(\delta_l - \hat{\delta}_l) = -\frac{2m}{\hbar^2 k}\int_0^\infty \hat{y}_l (V - \hat{V})\, y_l\, dr. \tag{72}$$