ся величиной $|\Psi^{(d)}|^2$ в точке нахождения счетчика; согласно уравнению (70), она пропорциональна $F^2(t - D/v)$. Частицы не регистрируются до момента времени D/v_p, когда фронт волны достигает счетчика; это время, необходимое для того, чтобы частица, испущенная центром с «резонансной скоростью» v_p, достигла счетчика. В дальнейшем число регистраций частиц определяется законом $\exp(-\Gamma t/\hbar)$, что и соответствует образованию в момент времени $t = 0$ метастабильного состояния со временем жизни $\hbar/\Gamma$.

Указанные выше условия эксперимента обычно осуществляются при радиоактивном распаде ядер (α- и β-радиоактивность, γ-радиоактивность изомерных ядер).

Раздел V. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМУЛЫ И СВОЙСТВА

§ 17. Интегральные представления фазовых сдвигов

Некоторые свойства и методы вычисления фазовых сдвигов могут быть получены из соответствующих интегральных представлений. Интегральные представления фазовых сдвигов очень разнообразны. Чаще всего они получаются простым применением теоремы вронскиана к подходящим образом выбранным решениям радиального уравнения. Одно такое представление мы дадим в этом параграфе. Другое будет изучено в § 20.

Наша цель состоит в сравнении фазовых сдвигов δ_l и $\hat{\delta}_l$, соответствующих потенциалам $V(r)$ и $\hat{V}(r)$ при одной и той же энергии. Вернемся к обозначениям § 8 и положим $\hat{U} = 2m\hat{V}/\hbar^2$. Пусть y_l — регулярное решение уравнения (29), причем асимптотическая форма y_l дается формулой (37). Тогда $\hat{y}_l$ — регулярное решение радиального уравнения

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\varepsilon - \hat{U} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\right]\hat{y}_l = 0 \tag{71}$$

с асимптотической формой

$$\hat{y}_l \underset{r\to\infty}{\sim} \sin\left(kr - \frac{l}{2}\pi + \hat{\delta}_l\right).$$

Вронскиан $W(y_l, \hat{y}_l)$ равен нулю в начале координат и стремится асимптотически к пределу

$$\lim_{r\to\infty} W(y_l, \hat{y}_l) = k\sin(\delta_l - \hat{\delta}_l).$$

Согласно теореме вронскиана

$$W(y_l - \hat{y}_l)\big|_a^b = -\int_a^b \hat{y}_l (U - \hat{U})\, y_l\, dr.$$

Устремляя пределы интегрирования a и b к 0 и ∞ соответственно, находим

$$\sin(\delta_l - \hat{\delta}_l) = -\frac{2m}{\hbar^2 k}\int_0^\infty \hat{y}_l (V - \hat{V})\, y_l\, dr. \tag{72}$$

Это важное соотношение справедливо независимо от вида потенциалов V и $\hat{V}$, если только оба они на бесконечности стремятся к нулю быстрее $1/r$ и не имеют сингулярности в нуле типа $1/r^2$ и выше.

Если $\hat{V}=0$, то $\hat{\delta}_l=0$ и $\hat{y}_l=krj_l(kr)$ соотношение (72) в этом частном случае записывается в виде

$$\sin\delta_l=-\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty j_l(kr)\,Vy_lr\,dr. \tag{73}$$

§ 18. Зависимость фазовых сдвигов от формы потенциала

Уравнение (72) позволяет сделать некоторые выводы об изменении фазовых сдвигов при модификации рассеивающего потенциала. При бесконечно малом изменении потенциала $\Delta V\equiv V-\hat{V}$ величина $\Delta\delta_l=\delta_l-\hat{\delta}_l$ также будет бесконечно малой; если при этом пренебречь различием между y_l и $\hat{y}_l$ в правой части уравнения (72), то получим

$$\Delta\delta_l=-\frac{2m}{\hbar^2k}\int_0^\infty y_l^2\,\Delta V\,dr. \tag{74}$$

Если изменение потенциала $\Delta V(r)$ сохраняет некоторый знак на всем интервале $(0,\infty)$, то изменение фазового сдвига $\Delta\delta_l$ имеет противоположный знак. Следовательно, всякое увеличение потенциала (большее отталкивание) уменьшает фазовый сдвиг, всякое уменьшение потенциала (большее притяжение) увеличивает сдвиг фазы.

До сих пор сдвиг фазы δ_l был определен только с точностью до слагаемого $2n\pi$. Чтобы снять эту неоднозначность, рассмотрим непрерывное изменение потенциала от 0 до $V(r)$, при этом фазовый сдвиг изменяется также непрерывно от 0 до некоторого значения δ_l, которое, как можно показать, не зависит от пути изменения потенциала от нуля до $V(r)$. Именно это значение δ_l мы примем в качестве истинной величины фазового сдвига.

Если потенциал $V(r)$ всюду отталкивающий, то переход от нуля к $V(r)$ можно осуществить путем последовательного прибавления бесконечно малых положительных добавок. Согласно уравнению (74) каждая из этих добавок уменьшает фазовый сдвиг, поэтому δ_l отрицательно. Аналогичным образом, если потенциал $V(r)$ всюду притягивающий, то δ_l положительно.

В общем случае:

$$\text{если } V(r)>\hat{V}(r) \text{ при любых } r, \text{ то } \delta_l<\hat{\delta}_l,$$

$$\text{если } V(r)<\hat{V}(r) \text{ при любых } r, \text{ то } \delta_l>\hat{\delta}_l.$$

§ 19. Приближение Борна

Для того чтобы точно вычислить фазовый сдвиг δ_l, надо, вообще говоря, решить уравнение (29). Однако если $V(r)$ достаточно мал, регулярное решение y_l этого уравнения мало отличается от свободной сферической волны $krj_l(kr)$, и фазовый сдвиг близок к нулю. Поэтому приближенно можно в уравнении (73) заменить y_l на свободную волну, что дает

$$\delta_l \simeq -\frac{2m}{\hbar^2} k \int_0^\infty j_l^2(kr)\, V(r)\, r^2\, dr. \tag{75}$$

Это выражение для фазового сдвига в «*приближении Борна*».

Ошибка мала, если потенциал $V(r)$ достаточно мал по сравнению с $E - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$ в большей части области изменения r. Можно ожидать поэтому, что приближение Борна будет оправдано при высоких энергиях или (при условии, что $V(r)$ достаточно быстро уменьшается на бесконечности) при больших значениях l. В действительности выражение (75) является только первым членом в разложении по степеням потенциала V, поэтому ошибку можно оценить, вычисляя следующие члены разложения. Исходя из соотношения (72), можно получить аналогичное приближенное выражение для $\delta_l - \hat{\delta}_l$, а именно

$$\delta_l - \hat{\delta}_l \simeq -\frac{2m}{\hbar^2 k} \int \hat{y}_l^2 (V - \hat{V})\, dr. \tag{76}$$

Эта «обобщенная формула Борна» полезна, когда известно регулярное решение $\hat{y}_l$ радиального уравнения с потенциалом $\hat{V}$, мало отличающимся от потенциала V. Она позволяет получить в хорошем приближении δ_l, не решая точно радиальное уравнение с потенциалом V [18]).

§ 20. Теория эффективного радиуса действия. Формула Бете

Формулы § 17 позволяют исследовать изменение фазовых сдвигов при модификации потенциала при данном значении энергии. В этом параграфе мы рассмотрим изменение фазовых

---

[18]) Формулой (76) можно воспользоваться также, чтобы изучить влияние «хвоста» потенциала V. Достаточно в качестве $\hat{V}$ выбрать потенциал

$$\hat{V} = \begin{cases} V(r), & \text{если } r < r_0, \\ 0, & \text{если } r > r_0, \end{cases}$$

где r_0 — подходящим образом выбранное расстояние. $\hat{V}$ есть потенциал с ограниченным радиусом действия и обладает всеми его свойствами. $V - \hat{V}$ — хвост потенциала V. Влияние «хвоста», если оно мало, может быть учтено с помощью формулы (76).

сдвигов в зависимости от изменения энергии. Полученные формулы будут особенно полезны в предельном случае малых энергий, когда потенциал имеет короткий радиус действия.

Пусть u — одно из регулярных решений уравнения (29); пока мы не будем уточнять его нормировку. Пусть $\hat{u}$ есть решение (нерегулярное) уравнения (71), соответствующее тому же значению энергии и имеющее ту же асимптотическую форму, что и u, включая нормировку. Рассмотрим теперь два различных значения энергии E_1 и E_2; будем отмечать индексами 1 и 2 все величины, относящиеся к этим энергиям. По теореме вронскиана (III. 27) имеем

$$W(u_1, u_2)\Big|_a^b = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\int_a^b u_1 u_2\, dr,$$

и соответствующее выражение для $\hat{u}$, откуда

$$W(\hat{u}_1, \hat{u}_2) - W(u_1, u_2)\Big|_a^b = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\int_a^b (\hat{u}_1\hat{u}_2 - u_1 u_2)\, dr.$$

Когда $b \to \infty$, то поскольку u и $\hat{u}$ имеют одну асимптотическую форму, интеграл в правой части уравнения сходится, а разность вронскианов на верхнем пределе обращается в нуль. Поскольку, кроме того, $\lim\limits_{a\to 0} W(u_1, u_2) = 0$, написанная формула при $b \to \infty$, $a \to 0$ переходит в

$$\lim_{a\to 0}\left[W(\hat{u}_1, \hat{u}_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\int_a^\infty (\hat{u}_1\hat{u}_2 - u_1 u_2)\, dr\right] = 0. \tag{77}$$

Выбирая подходящим образом нормировку u, можно из этой формулы найти значения разности $\delta - \hat{\delta}$ при энергиях E_1 и E_2.

Ограничимся случаем s-волны $(l = 0)$[19]. Кроме этого, положим $\hat{V} = 0$ и обозначим через v_1, v_2 значения $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$ в этом частном случае. Фиксируем нормировку u условием $v(0) = 1$, т. е.

$$v = \cos kr + \operatorname{ctg}\delta \cdot \sin kr.$$

Тогда формула (77) запишется в виде

$$W(v_2, v_1)\Big|_{a=0} \equiv k_1 \operatorname{ctg}\delta_1 - k_2 \operatorname{ctg}\delta_2 =$$
$$= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\int (v_1 v_2 - u_1 u_2)\, dr. \tag{78}$$

---

[19]) Когда $l \neq 0$, функции $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2$ имеют особенность в начале координат типа $(1/r)^l$. В формуле (77) члены $W(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ и $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\int \hat{u}_1\hat{u}_2\, dr$ расходятся как $(1/a)^{2l-1}$, однако сумма их стремится к конечному пределу.

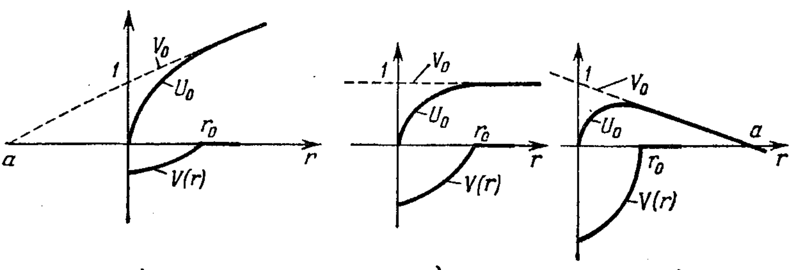
В предположении, что $V(r)$ стремится к нулю при $r \to \infty$ достаточно быстро, так чтобы интеграл в правой части сходился, эта формула остается справедливой в пределе $\varepsilon_2 \to 0$. Обозначим с помощью u_0, v_0 функции u, v при энергии равной нулю. Замечаем, что

$$v_0 = 1 - \frac{r}{a} \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} k \operatorname{ctg} \delta = -\frac{1}{a},$$

где a — длина рассеяния, определяемая уравнением (47). Выбирая значения $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 0$ в соотношении (78) (см. рис. 35), получаем *формулу Бете*:

$$k \operatorname{ctg} \delta = -\frac{1}{a} + \varepsilon \int (v v_0 - u u_0)\, dr. \tag{79}$$

Это строгое соотношение. Оно полезно, когда интеграл в правой части медленно меняется как функция энергии.



а) б) в)

Рис. 35. Волновые s-функции нулевой энергии в теории эффективного радиуса действия для последовательно увеличивающейся глубины потенциала ограниченного радиуса действия $V(r) = \omega W(r)$ (ω — параметр глубины ямы, при этом $\omega = 1$ соответствует глубине, необходимой для образования связанного состояния): *а)* $\omega < 1$ ($a < 0$); *б)* $\omega = 1$ ($a = \infty$); *в)* $\omega > 1$ ($a > 0$). *Замечание.* a является убывающей функцией ω, имеющей вертикальную асимптоту при каждом значении ω, для которого существует связанное состояние с нулевой энергией.

Именно это имеет место в случае короткодействующего потенциала $V(r)$ того типа, что мы встречаем в ядерной физике, когда можно разделить все пространство на внутреннюю область ($r < r_0$, $kr_0 \ll 1$), для которой $|V| \gg E$, и внешнюю область ($r > r_0$), где потенциал V пренебрежимо мал. Основной вклад в интеграл дает внутренняя область, где без большой ошибки можно заменить u на u_0 и v на v_0, так как в начале координат $u = u_0 = 0$ и $v = v_0 = 1$ и относительная кривизна функций u и u_0 практически одинакова ($u''/u \simeq 2mV/\hbar^2$) во всей этой области (рис. 35). Таким образом, в очень хорошем приближении имеем

$$k \operatorname{ctg} \delta \simeq -\frac{1}{a} + \varepsilon \int_0^\infty \left(v_0^2 - u_0^2\right) dr. \qquad (80)$$

Величина $r_{\text{эфф}} \equiv 2 \int_0^\infty \left(v_0^2 - u_0^2\right) dr$ обычно называется *эффективным радиусом* — это параметр, характеризующий свойства потенциала.

Правая часть уравнения (80) по существу представляет два первых члена в разложении $k \operatorname{ctg} \delta$ по степеням энергии. Чтобы выписать члены более высокого порядка, надо получить разложения u и v в виде рядов по степеням ε и подставить эти ряды в правую часть (79)[20]. Основываясь на аргументах, приведенных выше, следует ожидать, что получающиеся ряды быстро сходятся во внутренней области, поэтому и сходимость разложения для $k \operatorname{ctg} \delta$ также будет хорошей.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассматривается рассеяние частицы с длиной волны $\lambdabar$ на потенциале $V(r)$, который при $r \to \infty$ стремится к нулю быстрее $1/r$. Пусть $f(\Omega)$ — амплитуда рассеяния в направлении $\Omega = (\theta, \varphi)$. Показать, что

$$\sigma_{\text{полн}} \equiv \int |f(\Omega)|^2 d\Omega = 4\pi\lambdabar \operatorname{Im} f(0),$$

где $f(0)$ обозначает амплитуду рассеяния вперед ($\theta = 0$). Это *соотношение Бора — Пайерлса — Плачека.*

2. При бомбардировке ядер типа A ядрами типа a могут образовываться ядра b и B: $a + A \to b + B$. В лабораторной системе мишень A покоится. Пусть m_a, m_A, m_b, m_B — массы частиц, участвующих в реакции. В нерелятивистском приближении $m_a + m_A = m_b + m_B$. Пусть E_i и E_f — полные кинетические энергии начального $(a + A)$ и конечного $(b + B)$ состояний в системе центра масс, а θ и θ_1 — углы испускания частицы b в системе центра масс и в лабораторной системе соответственно. Показать, что зависимость θ_1 от θ дается соотношением (24), если τ представляет отношение скорости центра масс V к скорости v_b частицы b в системе центра масс, т. е.

$$\tau = \frac{V}{v_b} = \left[\frac{m_a m_b}{m_A m_B} \frac{E_i}{E_f}\right]^{1/2}.$$

---

[20]) См. *G. Chew, M. Goldberger*, Phys. Rev. **75**, 1637 (1949); *H. A. Bethe*, Phys. Rev. **76**, 38 (1949).

3. Вывести следующие соотношения между величинами τ_l, v_l и $q_l^{(+)}$, введенными в § 10 (определение (41)):

$$v_l = -\frac{d\tau_l}{d\xi}, \quad \operatorname{Im} q_l^{(+)} = \xi v_l, \quad \operatorname{Re} q_l^{(+)} = -\frac{\xi}{2v_l}\frac{dv_l}{d\xi}.$$

4. Показать, что в приближении ВКБ фазовый сдвиг δ_l выражается формулой

$$\delta_l = \lim_{R\to\infty}\left[\int_a^R \sqrt{k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}}\,dr - \int_{a_0}^R \sqrt{k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}}\,dr\right].$$

Определения δ_l, k и $U(r)$ те же, что и в § 8; нижние пределы интегрирования a и a_0 являются нулями подынтегральных выражений (если $k^2 - U(r) - l(l+1)/r^2$ имеет несколько корней, то a равен наибольшему из них). Обсудить условия справедливости этого приближения. Для того чтобы формула была применима для малых значений l, нужно, следуя рекомендации Лангера (см. задачу IX.6), заменить в обоих интегралах $l(l+1)$ на $(l+1/2)^2$.

5. Применить теорию эффективного радиуса действия к p-рассеянию. Показать, что она дает разложение $k^3 \operatorname{ctg} \delta_1$ в ряд по степеням энергии и найти два первых члена разложения (δ_1 — сдвиг p-фазы).