$-e^2/2n^2a$ совпадает с энергией классического электрона на круговой орбите радиуса n^2a.

Этот частный пример подтверждает общее правило соответствия, по которому в пределе больших квантовых чисел должны быть справедливы классические законы движения. Чтобы детально сравнивать результаты квантовой и классической теорий, следует исследовать движение волновых пакетов. Мы не будем здесь проводить этого исследования. Ограничимся указанием того, что состояния с максимальным $l(l=n-1)$ соответствуют классическим круговым орбитам; это следует сравнивать с результатом старой квантовой теории, согласно которой эксцентриситет квантованных орбит равен $\sqrt{1-l^2/n^2}$ и обращается в нуль, когда l принимает свое наибольшее значение (см. стр. 47).

Раздел II. КУЛОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ

§ 7. Кулоновская функция рассеяния

После отделения движения центра масс уравнение Шредингера задачи о рассеянии двух частиц, взаимодействующих по закону Кулона, записывается, следуя обозначениям § 1, в виде

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+\frac{Z_1Z_2e^2}{r}\right]\psi(\boldsymbol{r})=E\psi(\boldsymbol{r}), \tag{20}$$

где E — энергия в системе центра масс. Эффективное сечение рассеяния связывается с асимптотическим поведением собственных функций положительной энергии уравнения (20). Обозначим[1])

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{mv^2}{2}, \tag{21}$$

$$\gamma=\frac{Z_1Z_2e^2}{\hbar v}; \tag{22}$$

тогда уравнение (20) записывается в форме

$$\left(\Delta+k^2-\frac{2\gamma k}{r}\right)\psi(\boldsymbol{r})=0. \tag{23}$$

Это уравнение обладает одним регулярным решением вида

$$e^{ikz}f(r-z). \tag{24}$$

---

[1]) Параметр γ аналогичен параметру ν из задачи об атоме водорода. Если положить $a=\hbar^2/Z_1Z_2me^2$, то получим $\gamma=1/ka$ (см. уравнение (10)).

Действительно, если подставить это выражение в уравнение (23) и положить $u = r - z$, то получим дифференциальное уравнение

$$\left[u \frac{d^2}{du^2} + (1 - iku)\frac{d}{du} - \gamma k\right] f(u) = 0$$

или, полагая $v = iku = ik(r - z)$,

$$\left[v \frac{d^2}{dv^2} + (1 - v)\frac{d}{dv} + i\gamma\right] f(v) = 0.$$

Это уравнение типа Лапласа, решение которого, регулярное в начале, есть вырожденная гипергеометрическая функция $F(-i\gamma, 1; v)$. Таким образом, уравнение Шредингера действительно обладает регулярным решением в форме (24), а именно

$$\psi_c = Ae^{ikz}F(-i\gamma,\ 1;\ ik(r - z)), \tag{25}$$

где A — нормировочная постоянная.

Согласно исследованию, приведенному в дополнении Б, § 1, гипергеометрическая функция, фигурирующая в равенстве (25), является суммой двух функций, асимптотические формы которых при больших значениях $|v| = 2kr \sin^2 \frac{\theta}{2}$ даются уравнениями (Б.10) и (Б.11). Используем обозначения дополнения Б и положим

$$\psi_i = Ae^{ikz}W_1(-i\gamma,\ 1;\ iku), \tag{26}$$

$$\psi_d = Ae^{ikz}W_2(-i\gamma,\ 1;\ iku). \tag{27}$$

Тогда

$$\psi_c = \psi_i + \psi_d. \tag{28}$$

Функции ψ_i и ψ_d являются решениями (нерегулярными) уравнения (20). Выбирая

$$A = \Gamma(1 + i\gamma)\, e^{-\pi\gamma/2}, \tag{29}$$

находим следующие асимптотические формы для ψ_i и ψ_d:

$$\psi_i \underset{|r-z|\to\infty}{\sim} e^{i[kz+\gamma \ln k(r-z)]}\left[1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)} + \ldots\right], \tag{30}$$

$$\psi_d \underset{|r-z|\to\infty}{\sim} -\frac{\gamma}{k(r-z)} \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)} e^{i[kr-\gamma \ln k(r-z)]}\left[1 + \frac{(1+i\gamma)^2}{ik(r-z)} + \ldots\right]. \tag{31}$$

Поскольку $z = r\cos\theta$, первый член асимптотического представления ψ_d можно записать в виде

$$\psi_d \underset{|r-z|\to\infty}{\sim} \frac{\exp[i(kr - \gamma \ln 2kr)]}{r} f_c(\theta), \tag{32}$$

где

$$f_c(\theta) = -\frac{\gamma}{2k\sin^2\frac{\theta}{2}} \cdot \exp\left[-i\gamma \ln\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 2i\sigma_0\right]; \tag{33}$$

здесь

$$\sigma_0 = \arg\Gamma(1 + i\gamma). \tag{34}$$

§ 8. Формула Резерфорда

Волновая функция ψ_c представляет стационарное состояние рассеяния для частицы с начальным импульсом $\hbar\boldsymbol{k}$, направленным вдоль оси Oz. Мы знаем, что в случае потенциала, стремящегося к нулю не медленнее $1/r^2$ при $r \to \infty$, аналогичное состояние рассеяния представляется волновой функцией с асимптотической формой

$$e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r},$$

которая интерпретируется как сумма падающей и рассеянной расходящейся волн. Волновая функция ψ_c также представляется в виде суммы двух членов ψ_i, ψ_d асимптотические формы которых похожи соответственно на плоскую и расходящуюся волны.

Однако даже на бесконечно больших расстояниях от начала координат функция ψ_i не может быть уподоблена плоской волне, ввиду присутствия фактора $\exp[i\gamma \ln k(r-z)]$; радиус действия кулоновского поля столь велик, что оно влияет на падающую волну даже в асимптотической области. Тем не менее, при очень больших отрицательных z функция ψ_i представляет волну с плотностью 1; причем соответствующая плотность потока

$$j_i = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi_i^*(\nabla\psi_i) - \psi_i(\nabla\psi_i)^*\right]$$

направлена по оси Oz и равна $v \equiv \hbar k/m$ (логарифмический член дает поправки порядка $1/r$, которыми можно пренебречь). Это оправдывает истолкование ψ_i как падающей волны.

Аналогичным образом радиальная зависимость функции ψ_d при очень больших r выражается не формой $\exp(ikr)/r$, характерной для расходящихся волн, но более сложным выражением $\exp[i(kr - \gamma\ln 2kr)]/r$. Однако в асимптотической области (кроме близкой окрестности полуоси положительных z, где разделение на падающую и рассеянную волны не имеет смысла) функцию ψ_d можно интерпретировать как рассеянную волну, так как вектор плотности потока j_d, вычисленный с этой функцией, действительно направлен по радиусу в направлении возрастающих r, а влиянием фактора $\exp(-i\gamma\ln 2kr)$ можно пренебречь в самом нижнем порядке по $1/r$; в этом приближении ψ_d есть волна с плотностью $|f_c(\theta)|^2/r^2$ и плотностью потока $v|f_c(\theta)|^2/r^2$.

Составляя отношение плотности рассеянного потока в телесном угле $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ и плотности падающего потока, получаем дифференциальное эффективное сечение рассеяния

$$\sigma_c(\Omega) = |f_c(\theta)|^2. \tag{35}$$

Эта формула аналогична формуле (X. 2), относящейся к рассеянию на потенциале более короткого радиуса действия. Конечно, вышеприведенные рассуждения могут быть подвергнуты той же критике, что и в § X. 3, однако, нетрудно провести и более строгое доказательство, подобное выводу §§ 4—6 гл. X.

Функция $f_c(\theta)$ называется амплитудой кулоновского рассеяния. В явном виде она дается выражением (33). Отсюда получаем формулу для эффективного сечения кулоновского рассеяния:

$$\sigma_c(\Omega) = \frac{\gamma^2}{4k^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \tag{36}$$

Полученное строгое выражение, как видим, тождественно классической формуле эффективного сечения кулоновского рассеяния, полученной в гл. VI (уравнение (VI. 29)): классическая формула Резерфорда остается верной, даже когда классическое приближение перестает быть справедливым. Это следует рассматривать как случайное совпадение.

Из формулы (36) находим следующие замечательные свойства эффективного сечения кулоновского рассеяния:

а) оно зависит только от абсолютного значения потенциала, но не от его знака;

б) угловое распределение не зависит от энергии;

в) при заданном угле эффективное сечение при возрастании энергии падает как $1/E^2$;

г) полное эффективное сечение бесконечно: интеграл $\int \sigma_c(\Omega)\, d\Omega$ расходится при малых углах.

Эта расходимость характерна для чисто кулоновского поля. На опыте такое поле не встречается никогда; так, при рассеянии заряженной частицы на атомном ядре кулоновское поле ядра на больших расстояниях нейтрализуется полем электронов оболочек и потенциал обращается в нуль на расстояниях, достаточно больших по сравнению с радиусом атома. Эффект экранирования приводит к модификации рассеянной волны при малых углах, так что дифференциальное эффективное сечение более не расходится при $\theta \to 0$. Можно показать, что указанное изменение волновой функции пренебрежимо мало при углах, превосходящих одновременно $2\gamma/ka$ и $1/ka$ (здесь a — радиус атома). При энергиях, обычно используемых в ядерной физике, эти предельные углы столь малы, что экранированием кулоновского поля можно полностью пренебречь.

§ 9. Разложение по парциальным волнам

Уравнение Шредингера (20) может быть решено методом разделения угловых и радиальных переменных. Этот метод не представляет большого интереса для чисто кулоновского рассеяния, так как мы обладаем более прямым методом. Кроме того, имея дело с потенциалом дальнего действия, мы заранее знаем, что разложение амплитуды рассеяния $f_c(\theta)$ по сферическим функциям будет плохо сходиться. Однако разложение по парциальным волнам оказывается полезным в таких задачах, когда к чисто кулоновскому взаимодействию добавляется некоторое взаимодействие с ограниченным радиусом, ибо присутствие этого дополнительного взаимодействия влияет только на первые члены разложения по сферическим гармоникам и, следовательно, разложение разности $f(\theta)-f_c(\theta)$ быстро сходится.

Разделение угловых и радиальных переменных уже было проведено для случая атома водорода. В наших новых обозначениях уравнение (4) записывается в форме

$$y_l'' + \left[k^2 - \frac{2\gamma k}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] y_l = 0. \tag{37}$$

Чтобы построить решения этого уравнения, действуем как в задаче об атоме водорода, производя замену искомой функции и переменной:

$$\begin{aligned} y_l &= e^{ikr}(kr)^{l+1} v_l, \\ \xi &= -2ikr; \end{aligned} \tag{38}$$

тогда v_l есть решение уравнения Лапласа (см. уравнение (12))

$$\left[\xi \frac{d^2}{d\xi^2} + (2l+2-\xi)\frac{d}{d\xi} - (l+1+i\gamma)\right] v_l = 0. \tag{39}$$

Известны асимптотические разложения (Б.10—11) двух нерегулярных решений этого уравнения $W_{1,2}(l+1+i\gamma,\ 2l+2;\ \xi)$. На их основе можно получить асимптотическую форму общего решения (39) и в результате короткого вычисления — асимптотическую форму общего решения (37): это линейная комбинация двух экспоненциальных функций

$$e^{\pm i(kr-\gamma \ln 2kr)}.$$

Мы знаем, что решение (39), регулярное в начале координат, есть гипергеометрическая функция $\Gamma(l+1+i\gamma,\ 2l+2;\ \xi)$; это сумма двух функций W_1 и W_2 (уравнение (Б.9)). Соответствующее решение уравнения (37) в асимптотической области пропорционально функции $\sin(kr-\gamma\ln 2kr - l\pi/2+\sigma_l)$, где

$$\sigma_l = \arg\Gamma(l+1+i\gamma). \tag{40}$$

Величина σ_l называется *кулоновским фазовым сдвигом*. По определению регулярной кулоновской волновой функцией $F_l(\gamma; kr)$ является регулярное решение уравнения (37) с асимптотической формой

$$F_l \underset{r\to\infty}{\sim} \sin(kr - \gamma \ln 2kr - l\pi/2 + \sigma_l). \tag{41}$$

Согласно предыдущему

$$F_l(\gamma;\ kr) = c_l(\gamma)\, e^{ikr}(kr)^{l+1} F(l+1+i\gamma,\ 2l+2;\ -2ikr), \tag{42}$$

при этом постоянная $c_l(\gamma)$ должна быть выбрана так, чтобы F_l удовлетворяла условию (41), а именно

$$c_l = \frac{2^l e^{-\pi\gamma/2}\,|\Gamma(l+1+i\gamma)|}{(2l+1)!}. \tag{43}$$

Вещественная функция F_l часто называется регулярной сферической кулоновской функцией; это функция kr, зависящая от параметра γ.

Можно определить также «нерегулярные сферические кулоновские функции». Это решения уравнения (37), нерегулярные в начале координат. Наиболее часто употребляемые функции определены в § Б.5. Укажем здесь только сходящуюся и расходящуюся волны $u_l^{(-)}$ и $u_l^{(+)}$ с асимптотическими формами

$$u_l^{(\pm)} \underset{r\to\infty}{\sim} e^{\pm i(kr - \gamma\ln 2kr - l\pi/2)}.$$

Эти функции являются комплексно сопряженными, причем

$$F_l = \operatorname{Im} e^{i\sigma_l} u_l^{(+)}. \tag{44}$$

§ 10. Разложение ψ_c по сферическим функциям

Кулоновская волновая функция ψ_c, определенная в § 7,

$$\psi_c = e^{-\pi\gamma/2}\Gamma(1+i\gamma)\, e^{ikz} F(-i\gamma,\ 1;\ ik(r-z)), \tag{45}$$

может быть представлена в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра:

$$\psi_c = \frac{1}{kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\, i^l e^{i\sigma_l} F_l(\gamma;\ kr)\, P_l(\cos\theta). \tag{46}$$

Это разложение аналогично разложению плоской волны

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\, i^l j_l(kr)\, P_l(\cos\theta), \tag{47}$$

в которое оно переходит при $\gamma \to 0$, Чтобы доказать соотношение (46), следует использовать интегральное представление (Б.6) гипергеометрической функции, фигурирующей в определении ψ_c, что дает

$$\psi_c = \frac{e^{-\pi\gamma/2}}{\left(1-e^{-2\pi\gamma}\right)\Gamma(-i\gamma)}\, e^{ikz}\int_{\Gamma_0} e^{ik(r-z)t}\, t^{-i\gamma-1}(1-t)^{i\gamma}\,dt =$$

$$= \frac{e^{-\pi\gamma/2}}{\left(1-e^{-2\pi\gamma}\right)\Gamma(-i\gamma)}\int_{\Gamma_0} e^{ikrt} e^{ikz(1-t)}\, t^{-i\gamma-1}(1-t)^{i\gamma}\,dt.$$

Если разложить экспоненту $\exp[ikz(1-t)]$ в подынтегральном выражении в ряд по полиномам Лежандра по формуле (47) и изменить порядок суммирования и интегрирования, получим

$$\psi_c = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\, i^l \varphi_l(r)\, P_l(\cos\theta), \tag{48}$$

где

$$\varphi_l(r) = \frac{e^{-\pi\gamma/2}}{\left(1-e^{-2\pi\gamma}\right)\Gamma(-i\gamma)}\int_{\Gamma_0} e^{ikrt} j_l[kr(1-t)]\, t^{-i\gamma-1}(1-t)^{i\gamma}\,dt. \tag{49}$$

С другой стороны, мы знаем, что

$$\xi j_l(\xi) = F_l(0;\ \xi) = \frac{2^l\, l!}{(2l+1)!}\,\xi^{l+1} e^{i\xi} F(l+1,\ 2l+2;\ -2i\xi),$$

откуда

$$j_l(\xi) = 2^l \xi^l e^{i\xi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(l+p)!}{(2l+1+p)!}\,\frac{(-2i\xi)^p}{p!}.$$

Подставляя это выражение для j_l в интеграл в правой части (49) и вновь меняя порядок суммирования и интегрирования, находим

$$\varphi_l(r) = \frac{2^l e^{-\pi\gamma/2}}{\left(1-e^{-2\pi\gamma}\right)\Gamma(-i\gamma)}\,(kr)^l e^{ikr}\times$$

$$\times\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(l+p)!}{(2l+1+p)!}\left(\int_{\Gamma_0} t^{-i\gamma-1}(1-t)^{l+p+i\gamma}\,dt\right)\frac{(-2ikr)^p}{p!}$$

и поскольку, следуя (Б.5),

$$\int_{\Gamma_0} t^{-i\gamma-1}(1-t)^{l+p+i\gamma}\,dt = \left(1-e^{-2\pi\gamma}\right)\frac{\Gamma(-i\gamma)\,\Gamma(l+p+1+i\gamma)}{(l+p)!},$$

имеем

$$\varphi_l(r) = 2^l e^{-\pi\gamma/2}(kr)^l e^{ikr}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma(l+p+1+i\gamma)}{(2l+1+p)!}\,\frac{(-2ikr)^p}{p!} =$$

$$= 2^l e^{-\pi\gamma/2}\,\frac{\Gamma(l+1+i\gamma)}{(2l+1)!}\,(kr)^l e^{ikr} F(l+1+i\gamma,\ 2l+2;\ -2ikr).$$

При учете определений (40), (42) и (43) это дает

$$kr\varphi_l(r) = e^{i\sigma_l} F_l(\gamma;\ kr).$$

Искомое разложение получается при подстановке этого выражения в уравнение (48).

Можно было, впрочем, ожидать этого результата заранее. Действительно, поскольку ψ_c есть регулярное решение уравнения Шредингера (20), $r\varphi_l(r)$ необходимо есть регулярное решение радиального уравнения (37), т. е. пропорционально $F_l(\gamma; kr)$. Цель нашего вычисления состояла в определнии константы пропорциональности.

Полезно выразить разложение (46) при помощи расходящихся и сходящихся кулоновских волновых функций. Подставляя вместо F_l ее выражение через функции $u_l^{(+)}$ и $u_l^{(-)}$ (уравнение (44)), находим

$$\psi_c = \frac{1}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, i^{l+1} \left(u_l^{(-)} - e^{2i\sigma_l} u_l^{(+)}\right) P_l(\cos\theta). \tag{50}$$

§ 11. Модификация кулоновского потенциала короткодействующим взаимодействием

Когда к кулоновскому полю $V_c(r)$ добавляется некоторое короткодействующее взаимодействие $V'(r)$, стационарное состояние рассеяния более не представляется чисто кулоновской волновой функцией, но функцией ψ, разложение которой в ряд по полиномам Лежандра имеет вид

$$\psi = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, i^l \chi_l(r) P_l(\cos\theta). \tag{51}$$

Метод фазовых сдвигов, позволяющий описывать рассеяние частицы потенциалом $V'(r)$, почти без изменений переносится на случай рассеяния потенциалом $V'(r) + V_c(r)$; следует только на каждом этапе вычислений заменить свободные волны на соответствующие кулоновские волновые функции.

Функция $\chi_l(r)$ является решением радиального уравнения

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2\gamma k}{r} - \frac{2m}{\hbar^2} V'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] \chi_l(r) = 0. \tag{52}$$

Можно показать (задача 2), что, если $V'(r)$ стремится к нулю в асимптотической области не медленнее $1/r^2$, то решения радиального уравнения асимптотически переходят в линейные комбинации экспонент $e^{\pm i(kr - \gamma \ln 2kr)}$ или, что то же самое, в линейные комбинации расходящихся и сходящихся кулоновских функций $u_l^{(+)}$ и $u_l^{(-)}$. В частности, регулярное решение этого уравнения асимптотически переходит в некоторую линейную комбинацию указанных двух функций. Пусть

$$A_l \left(u_l^{(-)} - e^{2i\delta_l} e^{2i\sigma_l} u_l^{(+)}\right)$$

есть эта линейная комбинация (A_l — постоянная нормировки). Фазовый сдвиг δ_l характеризует действие потенциала $V'(r)$, добавленного к кулоновскому. Фазовый сдвиг δ_l равен нулю, если $V' = 0$, и в дальнейшем играет роль, совершенно аналогичную роли фазовых сдвигов при рассмотрении короткодействующих потенциалов.

Регулярное решение радиального уравнения χ_l должно быть выбрано так, чтобы функция ψ представляла стационарное состояние рассеяния; для этого необходимо, чтобы $\psi - \psi_c$ асимптотически вела себя как расходящаяся волна, т. е. как

$$e^{i(kr-\gamma\ln 2kr)}/r.$$

Это условие выполняется, если $A_l = i/2$ при всех значениях l, как это можно видеть, сравнивая (50) и (51). В асимптотической области, т. е. для значений r, достаточно больших, чтобы можно было полностью пренебречь потенциалом $V'(r)$, получаем разложение

$$\psi \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{2kr}\sum_l (2l+1)\, i^{l+1}\left(u_l^{(-)} - e^{2i\delta_l}e^{2i\sigma_l}u_l^{(+)}\right)P_l(\cos\theta) \sim$$

$$\underset{r\to\infty}{\sim} \psi_c - \frac{1}{2kr}\sum_l (2l+1)\, i^{l+1}e^{2i\sigma_l}\left(e^{2i\delta_l}-1\right)u_l^{(+)}P_l(\cos\theta). \qquad (53)$$

Как и в § 7, можно представить ψ в виде суммы

$$\psi = \psi_i + \psi_d, \qquad (54)$$

где ψ_i — функция, определенная уравнением (26) и представляющая падающую волну. Напротив, ψ_d отличается от функции (27), ее асимптотическая форма, после соответствующих вычислений, может быть представлена в виде

$$\psi_d \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{r}\exp\left[i(kr-\gamma\ln 2kr)\right]\times f(\theta),$$

где

$$f(\theta) = f_c(\theta) + f'(\theta), \qquad (55)$$

причем

$$f_c(\theta) = -\frac{\gamma}{2k\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\exp\left[-i\gamma\ln\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 2i\sigma_0\right], \qquad (55а)$$

$$f'(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)\, e^{2i\sigma_l}\left(e^{2i\delta_l}-1\right)P_l(\cos\theta). \qquad (55б)$$

Нетрудно установить с помощью тех же аргументов, что и в § 8, что эффективное сечение рассеяния равно

$$\sigma(\Omega) = |f(\theta)|^2. \qquad (56)$$

Можно выразить его в виде суммы трех членов, воспользовавшись равенством (55)

$$\sigma(\Omega) = \sigma_c(\Omega) + 2\,\mathrm{Re}\, f_c^* f' + |f'(\theta)|^2.$$

Многие характерные свойства обычных фазовых сдвигов присущи и фазовым сдвигам, введенным в этом параграфе. В частности, ряд (55б) сходится тем быстрее, чем короче радиус действия дополнительного потенциала V'. Формулы (X. 39—44) из § X. 10 остаются справедливыми, если только учесть, что функции $u_l^{(\pm)}$ представляют теперь не свободные волны, а волны кулоновские (задача 3). Однако численные значения величин τ_l, v_l, $q_l^{(\pm)}$ могут сильно отличаться от соответствующих значений для свободных волновых функций, так что результаты обсуждения поведения при малых энергиях, а также сходимости ряда должны быть пересмотрены. В частности, если мы имеем дело с отталкивающим кулоновским потенциалом, то фактор проникновения тем меньше, чем меньше начальная энергия, так что $v_l \ll 1$, каким бы ни было l, если только $E \lesssim Z_1 Z_2 e^2/r_0$ (т. е. энергия меньше кулоновского барьера в точке r_0). За исключением этого все обсуждение резонансного рассеяния может быть повторено без изменения. При некотором изменении определений входящих величин (задача 4) формулы (X. 72—73), исходные для приближения Борна, и формула (X. 77), исходная для приближения «эффективного радиуса действия», остаются в силе.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Пользуясь радиальным уравнением для атома водорода, доказать рекуррентное соотношение (*соотношение Крамерса*):

$$\frac{s+1}{n^2}\langle r^s\rangle - (2s+1)\,a\,\langle r^{s-1}\rangle + \frac{s}{4}\left[(2l+1)^2 - s^2\right]a^2\langle r^{s-2}\rangle = 0,$$

в котором $\langle r^s\rangle$ обозначает среднее значение r^s, когда атом находится в квантовом состоянии (nlm) $(a > -2l-3)$. Вывести отсюда выражение для $\langle r^{-1}\rangle$, $\langle r\rangle$, $\langle r^2\rangle$, приведенные в § Б.3. Это соотношение не позволяет найти $\langle r^{-2}\rangle$.

Показать, что во всяком стационарном состоянии водородоподобного атома среднее значение кинетической энергии равно с обратным знаком собственному значению энергии

$$E_n = -\langle p^2/2m\rangle_{nlm}.$$

2. Рассматривается рассеяние частицы с массой m центрально-симметричным потенциалом $V(r) = Ze^2/r + V'(r)$, где $V'(r)$ при $r \to \infty$ стремится к нулю не медленнее $1/r^2$. Показать, что решения радиального уравнения асимптотически переходят в линейные комбинации экспоненциальных функций $\exp[\pm i(kr - \gamma \ln 2kr)]$ $(k = \sqrt{2mE}/\hbar,\ \gamma = Ze^2/\hbar v;$ v и E — начальные скорость и энергия).

3. Показать, что формулы (X. 39—44) остаются верными, если к короткодействующему потенциалу прибавить член кулоновского взаимодействия $Z_1Z_2e^2/r$ (необходимо только изменить определение функций $u_l^{(+)}$ и $u_l^{(-)}$).

4. Как должны быть изменены интегральные представления (X. 72) и (X. 73), если рассеивающий потенциал есть сумма кулоновского и короткодействующего потенциалов? Тот же вопрос относительно формулы (X. 77). Рассмотреть теорию эффективного радиуса для s-рассеяния, когда короткодействующий потенциал обладает свойствами, указанными на стр. 391 (см. *H. A. Bethe, loc. cit.*, сноска X. [20]).