Нормированное на единицу решение этого уравнения имеет вид

$$u_0(Q) = \pi^{-1/4} e^{-Q^2/2}. \tag{26}$$

Из (17) и (18) можно получить соотношения, связывающие нормированные собственные функции, принадлежащие соседним собственным значениям (см. дополнение Б, раздел III). В частности, повторное применение (17) позволяет построить все собственные функции, исходя из функции u_0. Вместо (17) удобнее использовать соотношение (20), которое полностью эквивалентно ему, что дает

$$u_n(Q) = \left[\sqrt{\pi}\, 2^n n!\right]^{-1/2} \left(Q - \frac{d}{dQ}\right)^n e^{-Q^2/2}. \tag{27}$$

Пользуясь операторным тождеством

$$\left(Q - \frac{d}{dQ}\right) \equiv \left(-e^{Q^2/2} \frac{d}{dQ} e^{-Q^2/2}\right),$$

можно переписать уравнение (27) в форме (Б.70), где $H_n(Q)$ — полином Эрмита порядка n в соответствии с определением (Б.59). Таким образом, получаем, что $u_n(Q)$ выражается как произведение $\exp(-Q^2/2)$ на полином степени n и четности $(-1)^n$. Главные свойства этих полиномов указаны в дополнении Б, § 7.

Раздел II. ПРИЛОЖЕНИЯ И РАЗЛИЧНЫЕ СВОЙСТВА

§ 8. Производящая функция собственных функций $u_n(Q)$

В качестве примера приложения результатов теории найдем производящую функцию собственных функций $u_n(Q)$, т. е. функцию

$$F(t, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(Q)\, t^n,$$

где c_n — соответствующие постоянные нормировки. Ввиду того что $u_n(Q)$ представляет вектор $(n!)^{-1/2} a^{+n} |0\rangle$ (уравнение (20)), функция $F(t, Q)$ представляет вектор

$$\sum_n \frac{c_n}{\sqrt{n!}} (a^+ t)^n |0\rangle.$$

Если выбрать

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}},$$

то $F(t, Q)$ будет представлять вектор $\exp(a^+ t)|0\rangle$

$$F(t, Q) = \langle Q | e^{a^+ t} | 0 \rangle. \tag{28}$$

Для вычисления последнего выражения воспользуемся следующей леммой.

Лемма. *Если коммутатор двух операторов A и B коммутирует с каждым из них*

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0,$$

то имеет место тождество

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}. \tag{29}$$

Приводимое нами доказательство принадлежит Глауберу. Рассмотрим оператор, зависящий от параметра x

$$f(x) = e^{Ax} e^{Bx}.$$

Имеем

$$\frac{df}{dx} = Ae^{Ax}e^{Bx} + e^{Ax}Be^{Bx} = (A + e^{Ax}Be^{-Ax}) f(x).$$

Но поскольку $[B, A]$ коммутирует с A:

$$[B, A^n] = nA^{n-1}[B, A],$$

$$[B, e^{-Ax}] = \sum_n \frac{(-x)^n}{n!}[B, A^n] = \sum_n \frac{(-x)^n}{(n-1)!} A^{n-1}[B, A] = -e^{-Ax}[B, A]\, x.$$

Следовательно (см задачу VIII. 4),

$$e^{Ax}Be^{-Ax} = B - [B, A]\, x,$$

так что

$$\frac{df}{dx} = (A + B + [A, B]\, x) f(x).$$

Оператор $f(x)$ является решением этого дифференциального уравнения, причем $f(0) = 1$. Поскольку операторы $A + B$ и $[B, A]$ коммутируют, они могут рассматриваться здесь согласно обычным правилам алгебры. Дифференциальное уравнение интегрируется без труда и дает

$$f(x) = e^{(A+B)x} e^{\frac{1}{2}[A, B]x^2}$$

Тождество (29) следует, если положить $x = 1$

Взяв $A = Qt/\sqrt{2}$, $B = -iPt/\sqrt{2}$, $[A, B] = t^2/2$, применим тождество (29) к оператору $\exp(a^{+}t)$, тогда

$$\exp(a^{+}t) = \exp(Qt/\sqrt{2}) \exp(-iPt/\sqrt{2}) \exp(-t^2/4),$$

Перенося это выражение в уравнение (28), получаем

$$F(t, Q) = e^{-t^2/4} e^{Qt/\sqrt{2}} \langle Q | e^{-iPt/\sqrt{2}} | 0 \rangle.$$

Но

$$\langle Q | e^{-iPt/\sqrt{2}} | 0 \rangle = e^{-\frac{t}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{dQ}} u_0(Q) = u_0\left(Q - \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Воспользовавшись выражением (26) для u_0, после вычислений получим

$$F(t, Q) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(Q)}{\sqrt{n!}} t^n = \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{Q^2}{2} + tQ\sqrt{2} - \frac{t^2}{2}\right). \tag{30}$$

§ 9. Интегрирование уравнений Гейзенберга

Рассмотрим гармонический осциллятор в *«представлении» Гейзенберга*. Все операторы в этом параграфе будут операторами в «представлении» Гейзенберга, поэтому опустим индекс H, который мы использовали в гл. VIII. Все операторы изменяются во времени. Индексом «0» будем отмечать их значения в момент времени $t = 0$.

Учитывая уравнение (23) и соотношения (14), можно записать уравнения Гейзенберга для операторов a и $a^\dagger$:

$$i\hbar \frac{da}{dt} = [a, \mathscr{H}] = \hbar\omega a, \quad i\hbar \frac{da^\dagger}{dt} = [a^\dagger, \mathscr{H}] = -\hbar\omega a^\dagger.$$

Уравнения интегрируются без труда, что дает

$$a(t) = a_0 e^{-i\omega t}, \tag{31а}$$

$$a^\dagger(t) = a_0^\dagger e^{i\omega t}. \tag{31б}$$

Используя соотношения (24) и (25), выражающие q и p через a и $a^\dagger$, находим

$$q(t) = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} \left(a_0^\dagger e^{i\omega t} + a_0 e^{-i\omega t}\right), \tag{32}$$

$$p(t) = i\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{1/2} \left(a_0^\dagger e^{i\omega t} - a_0 e^{-i\omega t}\right). \tag{33}$$

Наконец, выражая a_0 и $a_0^\dagger$ через начальную координату q_0 и начальный импульс p_0, получаем

$$q(t) = q_0 \cos\omega t + \frac{1}{m\omega} p_0 \sin\omega t, \tag{34}$$

$$p(t) = p_0 \cos\omega t - m\omega q_0 \sin\omega t. \tag{35}$$

В этих операторных уравнениях появляются те же самые тригонометрические функции, что и в случае классического гармонического осциллятора. В частности, средние значения $\langle q\rangle_t$, $\langle p\rangle_t$ подчиняются классическим законам движения:

$$\langle q\rangle_t = \langle q\rangle_0 \cos\omega t + \frac{1}{m\omega} \langle p\rangle_0 \sin\omega t, \tag{36}$$

$$\langle p\rangle_t = \langle p_0\rangle \cos\omega t - m\omega \langle q\rangle_0 \sin\omega t. \tag{37}$$

Это свойство гармонического осциллятора уже отмечалось в гл. VI.

§ 10. Классический и квантовый осцилляторы

В целях иллюстрации соответствия между классической и квантовой механиками сравним в этом и следующем параграфах законы движения классического и квантового осцилляторов.

Общее решение уравнений движения классического гармонического осциллятора можно записать в виде:

$$q_{\text{кл}} = A\sin(\omega t + \varphi), \quad p_{\text{кл}} = m\omega A\cos(\omega t + \varphi).$$

Это чисто синусоидальное колебательное движение с (круговой) частотой ω. Закон движения зависит от двух параметров A и φ. Энергия осциллятора связана с амплитудой колебания A соотношением

$$E_{\text{кл}} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \tag{38}$$

Если фиксировать энергию $E_{\text{кл}}$, то различные возможные движения отличаются фазовым сдвигом φ.

Пусть $F_{\text{кл}}$ — некоторая динамическая переменная системы. Будучи функцией $q_{\text{кл}}$ и $p_{\text{кл}}$ она периодически (но не обязательно синусоидально) изменяется во времени с частотой ω. Закон изменения $F_{\text{кл}}$ для двух возможных движений с одной и той же энергией одинаков с точностью до фазового сдвига. Среднее $\bar{F}_{\text{кл}}$, взятое по всем возможным движениям с одинаковой энергией (микроканонический ансамбль), получается путем усреднения по сдвигам фаз; $\bar{F}_{\text{кл}}$ не зависит от времени и равно среднему по периоду $2\pi/\omega$ от значений, принимаемых $F_{\text{кл}}$ в течение одного периода. В частности, находим

$$\bar{q}_{\text{кл}} = \bar{p}_{\text{кл}} = 0, \tag{39}$$

$$\overline{q^2_{\text{кл}}} = \frac{A^2}{2} = \frac{E_{\text{кл}}}{m\omega^2}, \tag{40}$$

$$\overline{p^2_{\text{кл}}} = m^2\omega^2\overline{q^2_{\text{кл}}} = mE_{\text{кл}} \tag{41}$$

(средняя кинетическая и средняя потенциальная энергия осциллятора равны друг другу).

Сравним эти результаты с поведением квантового осциллятора в стационарном состоянии. В состоянии $|n\rangle$ квантовый осциллятор имеет определенную и постоянную во времени энергию: $(n + 1/2)\hbar\omega = E_n$. Напротив, наблюдаемые положения q и импульса p не имеют определенных значений; можно только определить статистическое распределение результатов измерения той или иной из этих величин. Поскольку состояние стационарно, эти статистические распределения постоянны во времени. В частности, средние значения q и p равны соответствующим диагональным элементам матриц представления $\{N\}$:

$$\langle n | q | n\rangle = \langle n | p | n\rangle = 0. \tag{42}$$

Средние значения q^2 и p^2 вычисляются без труда, если выразить эти операторы через a и a^+ (уравнения (24)—(25)) и использовать соотношения (17—19). Получаем

$$\langle n \mid q^2 \mid n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n \mid (a^+a + aa^+) \mid n \rangle = \frac{E_n}{m\omega^2}, \tag{43}$$

$$\langle n \mid p^2 \mid n \rangle = \frac{m\hbar\omega}{2} \langle n \mid (a^+a + aa^+) \mid n \rangle = mE_n. \tag{44}$$

Принцип соответствия требует (см. задачу 4), чтобы в пределе $n \to \infty$ выражения для средних значений (42)—(44) переходили соответственно в классические выражения (39)—(41) для того же значения энергии ($E_n = E_{\text{кл}}$). Тот факт, что искомое равенство осуществляется при любых значениях n, является свойством, характерным именно для гармонического осциллятора.

Заметим, между прочим, что в состоянии $|n\rangle$

$$\Delta p \cdot \Delta q = E_n/\omega = (n + 1/2)\,\hbar \tag{45}$$

в согласии с соотношениями неопределенности координата-импульс.

§ 11. Движение минимизирующего волнового пакета и классический предел

Рассмотрим волновой пакет в одном измерении:

$$f(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \langle p \rangle q - \frac{m\omega}{2\hbar} (q - \langle q \rangle)^2\right]. \tag{46}$$

Это минимизирующий волновой пакет (задача IV. 4): он представляет частицу, локализованную в конфигурационном пространстве около среднего положения $\langle q \rangle$ со среднеквадратичным отклонением $\Delta q = (\hbar/2m\omega)^{1/2}$ и локализованную в пространстве импульсов около среднего значения $\langle p \rangle$ со среднеквадратичным отклонением $\Delta p = (\hbar m\omega/2)^{1/2}$.

Если движение частицы определяется гамильтонианом $\mathcal{H}$, то можно показать (задача 6), что волновой пакет остается минимизирующим и осциллирует с частотой ω. Точнее говоря, статистическое распределение $\rho(q, t)$ величины q изменяется по закону

$$\rho(q,\ t) \equiv |\, f(q,\ t)\,|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar} (q - \langle q \rangle_t)^2\right].$$

Следовательно, оно осциллирует, не деформируясь, причем центр распределения $\langle q \rangle_t$ осуществляет гармоническое движение, предсказываемое классической теорией. Статистическое распределение p ведет себя аналогичным образом.

В противоположность этому статистическое распределение наблюдаемой $\mathscr{H}$ остается постоянным во времени. Вероятность найти систему в состоянии с энергией $(n+1/2)\hbar\omega$ в каждый момент времени равна (задача 6):

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{E_{\text{кл}}}{\hbar\omega}\right)^n e^{-\frac{E_{\text{кл}}}{\hbar\omega}},$$

где использовано обозначение

$$E_{\text{кл}}=\frac{1}{2m}\left(\langle p\rangle^2+m^2\omega^2\langle q\rangle^2\right).$$

Закон распределения вероятностей позволяет найти среднее значение энергии

$$\langle E\rangle=e^{-\frac{E_{\text{кл}}}{\hbar\omega}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,\frac{1}{n!}\left(\frac{E_{\text{кл}}}{\hbar\omega}\right)^n=E_{\text{кл}}+\frac{\hbar\omega}{2} \tag{47}$$

и среднее квадратичное отклонение

$$\Delta E=\sqrt{\langle\mathscr{H}^2\rangle-\langle\mathscr{H}\rangle^2}=\sqrt{\hbar\omega E_{\text{кл}}}. \tag{48}$$

Рассматриваемый волновой пакет хорошо иллюстрирует соотношения неопределенности. Он выбран таким образом, что произведение неопределенностей $\Delta p\cdot\Delta q$ постоянно равно своему минимальному значению $\hbar/2$.

Что же касается соотношения время-энергия, то ΔE можно сравнить с промежутком времени τ_q, характеризующим ритм эволюции статистического распределения q. Пусть τ_q есть время, необходимое для того, чтобы центр распределения $\langle q\rangle_t$ сместился на ширину распределения Δq. Поскольку скорость центра пакета равна $\langle p\rangle_t/m$, имеем

$$\tau_q=\frac{m}{\langle p\rangle_t}\Delta q=\frac{1}{\langle p\rangle_t}\left(\frac{\hbar m}{2\omega}\right)^{1/2}.$$

Величина τ_q периодически проходит через минимум, когда $\langle p_t\rangle$ достигает своего наибольшего значения $\sqrt{2mE_{\text{кл}}}$. В этом случае имеем

$$\tau_{q\min}=\frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{\hbar\omega E_{\text{кл}}}\right)^{1/2}.$$

Используя (48), получим

$$\tau_{q\min}\cdot\Delta E=\hbar/2 \tag{49}$$

в согласии с соотношением (VIII. 47) неопределенности время-энергия.

Амплитуда A колебаний центра волнового пакета выражается классическим соотношением (38)

$$A=\left(\frac{2E_{\text{кл}}}{m\omega^2}\right)^{1/2}.$$

В пределе, когда эта амплитуда велика по сравнению с протяженностью пакета $(\hbar/2m\omega)^{1/2}$ и в той мере, в какой можно пренебречь длинами порядка $(\hbar/2m\omega)^{1/2}$, классический образ точечной частицы, осциллирующей по закону $\langle q\rangle_t$ дает удовлетворительное описание явления. Этот предел является пределом достаточно больших квантовых чисел в согласии с общим принципом соответствия. Действительно, он реализуется при $E_{\text{кл}} \gg \hbar\omega$, но число квантованных уровней энергии, дающих заметный вклад при образовании волнового пакета, по порядку величины равно отношению ΔE к расстоянию между уровнями, т. е.

$$\frac{\Delta E}{\hbar\omega}=\left(\frac{E_{\text{кл}}}{\hbar\omega}\right)^{1/2}\gg 1.$$

Конечно, указанный классический образ предполагает также, что дисперсия по импульсам $\Delta p=(\hbar m\omega/2)^{1/2}$ и дисперсия по энергии $\Delta E=(\hbar\omega E_{\text{кл}})^{1/2}$ рассматриваются как пренебрежимо малые величины.

Что касается энергии, то с указанной выше точностью $\langle E\rangle\approx E_{\text{кл}}$; действительно

$$\langle E\rangle-E_{\text{кл}}=\hbar\omega/2\ll\Delta E.$$

Поэтому мы можем приписать системе энергию $E_{\text{кл}}$ соответствующей классической частицы.

§ 12. Гармонические осцилляторы в термодинамическом равновесии

Рассмотрим гармонический осциллятор, находящийся в термодинамическом равновесии с термостатом при температуре T. Его динамическое состояние является смешанным и согласно закону Больцмана описывается матрицей плотности

$$\rho=\frac{e^{-\mathcal{H}/kT}}{\operatorname{Sp} e^{-\mathcal{H}/kT}}. \tag{50}$$

Изучим свойства такого смешанного состояния.

Вычислим сначала *статистическую сумму*

$$Z(\mu)=\operatorname{Sp} e^{-\mu\mathcal{H}}.$$

Вычисление следа легко производится в представлении, где диагональна наблюдаемая $\mathscr{H}$:

$$Z(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu(n+1/2)\hbar\omega} = e^{-\mu\hbar\omega/2} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\mu\hbar\omega})^n,$$

откуда, суммируя геометрическую прогрессию в правой части уравнения, находим

$$Z(\mu) = \frac{e^{-\mu\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\mu\hbar\omega}}. \tag{51}$$

Средняя энергия

$$\langle E \rangle = \mathrm{Sp}\, \rho \mathscr{H}$$

получается из статистической суммы с учетом уравнения (VIII. 84). Имеем

$$\ln Z = -\frac{\mu\hbar\omega}{2} - \ln(1 - e^{-\mu\hbar\omega}),$$

откуда

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}\bigg|_{\mu=1/kT} = \frac{\hbar\omega}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2kT} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \tag{52}$$

Следовательно, для средней энергии квантового осциллятора получаем формулу Планка (с точностью до слагаемого $\hbar\omega/2$).

При очень низких температурах ($kT \ll \hbar\omega$) осциллятор почти с полной достоверностью находится в своем основном состоянии

$$\langle E \rangle \approx \hbar\omega/2.$$

При очень высоких температурах ($kT \gg \hbar\omega$) средняя энергия стремится к значению, определяемому классической статистикой Максвелла — Больцмана:

$$\langle E \rangle \approx kT.$$

В качестве важного свойства квантового осциллятора в термодинамическом равновесии отметим следующую теорему Блоха.

Т е о р е м а. *Распределение вероятности заданной комбинации $\alpha q + \beta p$ координаты и импульса выражается законом Гаусса.*

Чтобы доказать эту теорему, вычислим характеристическую функцию $\varphi(\xi)$ этого распределения. Функция $\varphi(\xi)$, по определению, есть среднее значение $\exp[i\xi(\alpha q + \beta p)]$:

$$\varphi(\xi) = \mathrm{Sp}\, \rho e^{i\xi(\alpha q + \beta p)}. \tag{53}$$

Вычислим этот след в представлении $\{N\}$, где оператор ρ диагонален.

Найдем сначала величины

$$g_n(\xi) = \langle n \mid e^{i\xi(\alpha q + \beta p)} \mid n \rangle. \tag{54}$$

Имеем, учитывая (24—25),

$$\alpha q + \beta p = \gamma a + \gamma^* a^\dagger,$$

где

$$\gamma = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (\alpha - im\omega\beta).$$

Согласно тождеству (29)

$$e^{i\xi(\alpha q + \beta p)} = e^{i\xi(\gamma a + \gamma^* a^\dagger)} = e^{\xi^2\gamma\gamma^*/2} e^{i\xi\gamma a} e^{i\xi\gamma^* a^\dagger},$$

откуда

$$g_n(\xi) = e^{\xi^2\gamma\gamma^*/2} \left\langle n \,\middle|\, e^{i\xi\gamma a} e^{i\xi\gamma^* a^\dagger} \,\middle|\, n \right\rangle.$$

Разлагая в ряд экспоненты и учитывая соотношение (20), получаем

$$e^{i\xi\gamma^* a^\dagger} \mid n\rangle = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{(n+t)!}{n!}\right)^{1/2} \cdot \frac{(i\xi\gamma^*)^t}{t!} \mid n+t\rangle,$$

$$\langle n \mid e^{i\xi\gamma a} = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(n+s)!}{n!}\right)^{1/2} \cdot \frac{(i\xi\gamma)^s}{s!} \langle n+s \mid.$$

В скалярном произведении этих двух векторов недиагональные члены ($s \neq t$) двойной суммы все равны нулю по условиям ортогональности, так что остается

$$g_n(\xi) = e^{\xi^2\gamma\gamma^*/2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\xi^2\gamma\gamma^*)^s}{(s!)^2} \cdot \frac{(n+s)!}{n!}. \tag{55}$$

Обозначим

$$x = -\xi^2\gamma\gamma^*, \qquad y = e^{-\hbar\omega/kT}. \tag{56}$$

В представлении $\{N\}$ оператор ρ диагонален и n-й элемент его матрицы равен

$$\rho_n \equiv \langle n \mid \rho \mid n\rangle = \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar\omega}{kT}}}{Z\left(\frac{1}{kT}\right)} = (1-y)\, y^n. \tag{57}$$

Из уравнений (53—57) находим

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n g_n(\xi) = (1-y)\, e^{-x/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+s)!}{n!\,(s!)^2}\, x^s y^n.$$

Эта двойная сумма может быть вычислена точно. Суммирование по n производится с помощью разложения в ряд

$$\frac{1}{(1-y)^{s+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s+n)!}{s!\,n!}\, y^n,$$

$$\varphi(\xi) = e^{-x/2} \sum_{s} \frac{1}{s!} \left(\frac{x}{1-y}\right)^s = \exp\left[x\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{2}\right)\right].$$

Учитывая определения x и y, это можно записать в виде

$$\varphi(\xi) = e^{-\frac{\sigma}{2}\xi^2}, \tag{58}$$

где

$$\sigma = \gamma\gamma^* \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right). \tag{59}$$

Поскольку характеристическая функция распределения является гауссовой, само распределение также выражается законом Гаусса: это распределение со средним квадратичным отклонением σ, что и требовалось доказать.

Раздел III. ИЗОТРОПНЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

§ 13. Общее исследование изотропного осциллятора в p измерениях

Гармонический изотропный осциллятор в p измерениях есть p-мерная система с гамильтонианом

$$\mathscr{H} = \sum_{i=1}^{p} \mathscr{H}_i, \tag{60}$$

где

$$\mathscr{H}_i = \frac{1}{2m}\left(p_i^2 + m^2\omega^2 q_i^2\right). \tag{61}$$

Пусть $\mathscr{E}_1$ — пространство динамических состояний, относящееся к паре переменных (p_1, q_1), $\mathscr{E}_2$ — пространство состояний, относящееся к паре (p_2, q_2) и т. д. Пространство $\mathscr{E}$ динамических состояний рассматриваемой системы есть тензорное произведение пространств $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_p$:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2 \otimes \ldots \otimes \mathscr{E}_p. \tag{62}$$

Обозначим с помощью $|n_i\rangle$ (i фиксировано, $n_i = 0, 1, \ldots, \infty$) собственные векторы гамильтониана $\mathscr{H}_i$, рассматриваемого как оператор в пространстве $\mathscr{E}_i$; эти векторы образуют полную ортонормированную систему в $\mathscr{E}_i$. В дальнейшем будем предполагать, что фазы векторов выбраны так, что выполняются соотношения (17—20), где операторы рождения и уничтожения относятся к переменным типа i. Векторы

$$|n_1 n_2 \ldots n_p\rangle \equiv |n_1\rangle |n_2\rangle \ldots |n_p\rangle \tag{63}$$

$$(n_1 = 0, 1, \ldots, \infty; \quad n_2 = 0, 1, \ldots, \infty; \quad \ldots; n_p = 0, 1, \ldots, \infty),$$

образованные тензорным умножением векторов, принадлежащих соответственно пространствам $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_p$, образуют