Учитывая определения x и y, это можно записать в виде

$$\varphi(\xi) = e^{-\frac{\sigma}{2}\xi^2}, \tag{58}$$

где

$$\sigma = \gamma\gamma^* \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right). \tag{59}$$

Поскольку характеристическая функция распределения является гауссовой, само распределение также выражается законом Гаусса: это распределение со средним квадратичным отклонением σ, что и требовалось доказать.

Раздел III. ИЗОТРОПНЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

§ 13. Общее исследование изотропного осциллятора в p измерениях

Гармонический изотропный осциллятор в p измерениях есть p-мерная система с гамильтонианом

$$\mathscr{H} = \sum_{i=1}^{p} \mathscr{H}_i, \tag{60}$$

где

$$\mathscr{H}_i = \frac{1}{2m}\left(p_i^2 + m^2\omega^2 q_i^2\right). \tag{61}$$

Пусть $\mathscr{E}_1$ — пространство динамических состояний, относящееся к паре переменных (p_1, q_1), $\mathscr{E}_2$ — пространство состояний, относящееся к паре (p_2, q_2) и т. д. Пространство $\mathscr{E}$ динамических состояний рассматриваемой системы есть тензорное произведение пространств $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_p$:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2 \otimes \ldots \otimes \mathscr{E}_p. \tag{62}$$

Обозначим с помощью $|n_i\rangle$ (i фиксировано, $n_i = 0, 1, \ldots, \infty$) собственные векторы гамильтониана $\mathscr{H}_i$, рассматриваемого как оператор в пространстве $\mathscr{E}_i$; эти векторы образуют полную ортонормированную систему в $\mathscr{E}_i$. В дальнейшем будем предполагать, что фазы векторов выбраны так, что выполняются соотношения (17—20), где операторы рождения и уничтожения относятся к переменным типа i. Векторы

$$|n_1 n_2 \ldots n_p\rangle \equiv |n_1\rangle |n_2\rangle \ldots |n_p\rangle \tag{63}$$

$$(n_1 = 0, 1, \ldots, \infty; \quad n_2 = 0, 1, \ldots, \infty; \quad \ldots; n_p = 0, 1, \ldots, \infty),$$

образованные тензорным умножением векторов, принадлежащих соответственно пространствам $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_p$, образуют полную ортонормированную систему в $\mathscr{E}$ [2]). Ясно, что эти векторы являются собственными векторами $\mathscr{H}$. Далее, поскольку

$$\mathscr{H}_1 | n_1\rangle = (n_1 + 1/2)\,\hbar\omega\, | n_1\rangle,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathscr{H}_p | n_p\rangle = (n_p + 1/2)\,\hbar\omega\, | n_p\rangle,$$

имеем

$$\mathscr{H}\, |n_1 \dots n_p\rangle = (\mathscr{H}_1 + \dots + \mathscr{H}_p)\, | n_1 \dots n_p\rangle = \\ = (n_1 + \dots + n_p + p/2)\,\hbar\omega\, | n_1 \dots n_p\rangle.$$

Векторы базисной системы $\mathscr{H}$, которые мы построили, нумеруются p квантовыми числами $n_1, n_2, \dots, n_p$, которые могут принимать все целые значения от 0 до $+\infty$. Однако соответствующее собственное значение энергии

$$(n_1 + \dots + n_p + p/2)\,\hbar\omega$$

зависит только от суммы

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_p$$

этих p чисел. При заданном значении n ($\geqslant 0$) существует

$$C^n_{n+p-1} \equiv \frac{(n+p-1)!}{n!\,(p-1)!} \tag{64}$$

различных наборов чисел $n_1, n_2, \dots, n_p$. Собственное значение $(n + p/2)\,\hbar\omega$, таким образом, C^n_{n+p-1}-кратно вырождено.

Введем операторы поглощения и рождения квантов типа i:

$$\begin{aligned} a_i &= \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} q_i + i\,(2m\hbar\omega)^{-1/2}\, p_i, \\ a_i^+ &= \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} q_i - i\,(2m\hbar\omega)^{-1/2}\, p_i. \end{aligned} \tag{65}$$

Они удовлетворяют коммутационным соотношениям (см. (10))

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0,$$
$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \dots, p). \tag{66}$$

Согласно определению векторов $|n_i\rangle$, данному выше, векторы $|n_1 \dots n_p\rangle$ удовлетворяют соотношениям, обобщающим (17—20). В частности, если обозначить символом $|0\rangle$ собственный вектор основного состояния

$$|0\rangle = |\underbrace{0 \dots 0}_{p\ \text{раз}}\rangle,$$

---

[2]) В представлении $\{q\} \equiv \{q_1\, q_2 \dots q_p\}$ вектор $|n_1\, n_2 \dots n_p\rangle$ выражается произведением

$$\langle q_1 | n_1\rangle \langle q_2 | n_2\rangle \dots \langle q_p | n_p\rangle \equiv \psi_{n_1}(q_1)\, \psi_{n_2}(q_2) \dots \psi_{n_p}(q_p).$$

то можно написать

$$a_1|0\rangle = a_2|0\rangle = \ldots = a_p|0\rangle = 0, \tag{67}$$

$$|n_1 \ldots n_p\rangle = (n_1! \ldots n_p!)^{-1/2} a_1^{\dagger n_1} \ldots a_p^{\dagger n_p}|0\rangle. \tag{68}$$

Спектр наблюдаемых

$$N_i \equiv a_i^\dagger a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{69}$$

состоит из целых неотрицательных чисел; эти наблюдаемые интерпретируются как число квантов типа 1, 2, ..., p соответственно. Сумма

$$N = \sum_{i=1}^{p} N_i$$

есть полное число квантов. Имеем

$$\mathcal{H} = (N + p/2)\,\hbar\omega.$$

Ясно, что $N_1, N_2, \ldots, N_p$ образуют полный набор коммутирующих наблюдаемых, причем их базисная система совпадает с базисной системой $\mathcal{H}$, которую мы построили.

Операторы N_i, очевидно, не являются единственными постоянными движения, образующими полный набор. Всякий оператор вида $a_i a_j^\dagger$ коммутирует с $\mathcal{H}$; с помощью линейных комбинаций операторов этого типа и им сопряженных можно построить p^2 независимых эрмитовых операторов. Среди функций от этих p^2 постоянных движения существует несколько полных наборов коммутирующих наблюдаемых. Проиллюстрируем это обстоятельство на примере двух частных случаев $p = 2$ и $p = 3$.

§ 14. Изотропный осциллятор в двух измерениях

Рассмотрим систему в двух измерениях с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + m^2\omega^2 q_1^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_2^2 + m^2\omega^2 q_2^2\right).$$

Исследование предшествующего параграфа полностью применимо к этому частному случаю. Следующая таблица дает собственные значения $\mathcal{H}$ (первый столбец), кратность вырождения (второй столбец) и последовательность общих собственных векторов N_1 и N_2, растягивающих соответствующие подпространства (третий столбец):

$$\begin{array}{lll} \hbar\omega & 1 & |00\rangle \\ 2\hbar\omega & 2 & |10\rangle,\ |01\rangle \\ 3\hbar\omega & 3 & |20\rangle,\ |11\rangle,\ |02\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n+1)\,\hbar\omega & (n+1) & |n0\rangle,\ |(n-1)\,1\rangle,\ \ldots,\ |(n-s)\,s\rangle,\ \ldots,\ |0n\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{70}$$

Оператор «момента импульса» L, определенный формулой

$$L = \frac{1}{\hbar}\left(q_1 p_2 - q_2 p_1\right) = i\left(a_1 a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2\right), \tag{71}$$

является постоянной движения. Покажем, что N и L образуют другой полный набор коммутирующих наблюдаемых. С этой целью введем операторы

$$\begin{aligned} A_\pm &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(a_1 \mp i a_2\right), \\ A_\pm^\dagger &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(a_1^\dagger \pm i a_2^\dagger\right). \end{aligned} \tag{72}$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям, тождественным (66):

$$\begin{aligned} &[A_r,\ A_s] = [A_r^\dagger,\ A_s^\dagger] = 0, \\ &[A_r,\ A_s^\dagger] = \delta_{rs} \qquad (r = + \text{ или } -,\ s = + \text{ или } -). \end{aligned} \tag{73}$$

Операторы A_+ и $A_+^\dagger$ можно считать операторами уничтожения и рождения квантов типа $(+)$, операторы A_- и $A_-^\dagger$ — операторами уничтожения и рождения квантов типа $(-)$; согласно этой интерпретации операторы

$$N_+ = A_+^\dagger A_+ \quad \text{и} \quad N_- = A_-^\dagger A_- \tag{74}$$

представляют число квантов $(+)$ и число квантов $(-)$ соответственно. Поскольку соотношения коммутации (73) идентичны соотношениям (66) задача построения общих собственных векторов N_+ и N_- математически идентична задаче построения общих собственных векторов N_1 и N_2. Следовательно, наблюдаемые N_+ и N_- каждая имеют спектр собственных значений из целых неотрицательных чисел

$$n_+ = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\qquad n_- = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

и эти две наблюдаемые образуют полный набор коммутирующих наблюдаемых: каждой паре квантовых чисел (n_+, n_-) соответствует единственный общий собственный вектор (с точностью до постоянного множителя), Из соотношений (67) следует

$$A_+ |00\rangle = A_- |00\rangle = 0. \tag{75}$$

Следовательно, вектор $|00\rangle$ из таблицы (70) есть собственный вектор основного состояния ($n_+ = n_- = 0$). Векторы

$$|n_+n_-\rangle = (n_+! n_-!)^{-1/2} A_+^{\dagger n_+} A_-^{\dagger n_-} |00\rangle \tag{76}$$

образуют полную ортонормированную последовательность общих собственных векторов N_+ и N_-:

$$N_+ |n_+n_-\rangle = n_+ |n_+n_-\rangle,$$
$$N_- |n_+n_-\rangle = n_- |n_+n_-\rangle.$$

Однако если выразить N и L через A и $A^\dagger$, то можно показать, что

$$N = N_+ + N_-,$$
$$L = N_+ - N_-.$$

Ввиду того что наблюдаемые N_+ и N_- образуют полный набор коммутирующих наблюдаемых, их сумма N и их разность L также обладают этим свойством. Именно это мы и хотели показать.

Мы приходим к выводу, что обладаем другой полной ортонормированной последовательностью собственных векторов $\mathscr{H}$, а именно $|n_+n_-\rangle$. Они удовлетворяют уравнениям на собственные значения:

$$\mathscr{H} |n_+n_-\rangle = (n_+ + n_- + 1)\hbar\omega |n_+n_-\rangle, \tag{77}$$
$$L |n_+n_-\rangle = (n_+ - n_-) |n_+n_-\rangle. \tag{78}$$

Определим соотношения коммутации L с A и $A^\dagger$. Простое вычисление дает:

$$[L, A_\pm^\dagger] = \pm A_\pm^\dagger, \tag{79}$$
$$[L, A_\pm] = \mp A_\pm. \tag{80}$$

Отсюда следует, что при действии на собственный вектор оператора L операторы $A_+^\dagger$ и A_- увеличивают собственное значение L на единицу, а $A_-^\dagger$ и A_+ уменьшают L на единицу. Это можно истолковать разными способами. В квантовой теории заряженных полей, где поле представляется как последовательность изотропных осцилляторов в двух измерениях, N_+ выражает число положительных частиц, N_- — число отрицательных частиц, L — полный заряд (с точностью до постоянного множителя). Согласно этой интерпретации $A_+^\dagger$ порождает положительный заряд, A_- уничтожает отрицательный заряд, поэтому и тот и другой операторы изменяют заряд на плюс единицу; $A_-^\dagger$ и A_+ изменяют заряд на минус единицу.

В теории колебаний кристаллов движения решетки также представляются набором изотропных двумерных осцилляторов; кванты колебаний решетки называются фононами. Представление с фононами типа 1 и 2 дает классификацию по стационарным волнам; представление с фононами типа (+) и (—) соответствует бегущим волнам, «распространяющимся» в том или ином направлении. В задачах о рассеянии (нейтронов, рентгеновских лучей и т. д.) на кристаллической решетке представление с бегущими волнами приводит к более простым вычислениям.

§ 15. Изотропный осциллятор в трех измерениях

Изотропный гармонический осциллятор в трех измерениях есть частица в поле центрально-симметричного потенциала, пропорционального квадрату расстояния от центра. Гамильтониан выражается формулой

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2, \tag{81}$$

он является суммой трех членов

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_x + \mathscr{H}_y + \mathscr{H}_z,$$

где

$$\mathscr{H}_i = \frac{1}{2m}\left(p_i^2 + m^2\omega^2 r_i^2\right) \qquad (i = x,\ y,\ z). \tag{82}$$

Согласно результатам § 13 собственные значения оператора $\mathscr{H}$ выражаются формулой

$$(n + 3/2)\,\hbar\omega \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty); \tag{83}$$

порядок вырождения собственных значений равен $(n+1)\times$ $\times(n+2)/2$. Наблюдаемые N_x, N_y, N_z образуют полный набор постоянных движения, и собственные векторы $|n_x n_y n_z\rangle$ их базисной системы нумеруются тремя собственными значениями n_x, n_y и n_z. Все эти векторы получаются по формуле

$$|n_x n_y n_z\rangle = \left(n_x!\, n_y!\, n_z!\right)^{-1/2} a_x^{+n_x} a_y^{+n_y} a_z^{+n_z} |000\rangle \tag{84}$$

из вектора основного состояния $|000\rangle$, который с точностью до постоянного множителя определяется тремя уравнениями

$$a_x|000\rangle = a_y|000\rangle = a_z|000\rangle = 0. \tag{85}$$

Введем момент импульса

$$\boldsymbol{l} \equiv [\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}].$$

По хорошо известным свойствам (гл. IX) гамильтониана с центрально-симметричным потенциалом операторы $\mathcal{H}$, l^2 и l_z также образуют полный набор коммутирующих наблюдаемых: общие этим трем наблюдаемым собственные векторы $|nlm\rangle$ отмечаются тремя квантовыми числами n, l, m, причем собственные значения $\mathcal{H}$, l^2, l_z соответственно равны: $(n+3/2)\hbar\omega$, $l(l+1)\hbar^2$ и $m\hbar$. Векторы $|nlm\rangle$ составляют полную ортонормированную систему собственных векторов $\mathcal{H}$; они получаются из векторов $|n_x n_y n_z\rangle$ с помощью унитарного преобразования. Мы не будем проводить здесь явного вычисления этих векторов[3]). Ограничимся тем, что найдем значения, которые могут принимать квантовые числа l и m при заданном n, иначе говоря, найдем различные возможные состояния момента импульса для каждого уровня энергии.

Большое сходство между оператором l_z и оператором L, введенным в предыдущем параграфе, наводит на мысль об аналогичной замене переменных. Вводим операторы A_m $(m=1,\ 0,\ -1)$ по формулам

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}[a_x - ia_y], \\ A_0 &= a_z, \\ A_{-1} &= \frac{\sqrt{2}}{2}[a_x + ia_y] \end{aligned} \tag{86}$$

и соответствующие эрмитово сопряженные операторы $A_m^\dagger$. Операторы A_m и $A_m^\dagger$ удовлетворяют коммутационным соотношениям, аналогичным (73), и могут быть истолкованы как операторы уничтожения и рождения квантов типа m. Число квантов типа m представляется оператором $N_m = A_m^\dagger A_m$. Очевидно, что N_1, N_0 и N_{-1} составляют полный набор коммутирующих наблюдаемых и что

$$\mathcal{H} = (N_1 + N_0 + N_{-1} + 3/2)\hbar\omega,$$
$$N = N_1 + N_0 + N_{-1}.$$

---

[3]) В представлении $\{r\}$ состоянию $|n_x n_y n_z\rangle$ соответствует волновая функция $\psi_{n_x}(x)\,\psi_{n_y}(y)\,\psi_{n_z}(z)$, состояние же $|nlm\rangle$ представляется функцией

$$\psi_{nlm}(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{y_{nl}(r)}{r}\, Y_l^m(\theta,\ \varphi),$$

где y_{nl} есть решение, обращающееся в нуль в начале координат и регулярное на бесконечности следующего дифференциального уравнения:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right] y_{nl} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega y_{nl}.$$

Каждой тройке собственных значений (n_1, n_0, n_{-1}) соответствует общий собственный вектор трех наблюдаемых, а именно, вектор

$$|n_1 n_0 n_{-1}\rangle = (n_1!\, n_0!\, n_{-1}!)^{-1/2} A_1^{+n_1} A_0^{+n_0} A_{-1}^{+n_{-1}} |000\rangle.$$

Множество всех этих векторов образует полную систему собственных векторов $\mathscr{H}$. Находим

$$\mathscr{H} | n_1 n_0 n_{-1}\rangle = (n + 3/2)\hbar\omega\, | n_1 n_0 n_{-1}\rangle, \qquad n = n_1 + n_0 + n_{-1}.$$

Построенные нами векторы в общем случае не являются собственными векторами l^2, но это собственные векторы l_z, так как

$$l_z = (N_1 - N_{-1})\hbar \tag{87}$$

и, следовательно,

$$m = n_1 - n_{-1}. \tag{88}$$

Рассмотрим подпространство собственных векторов $\mathscr{H}$, принадлежащих собственному значению $(n + 3/2)\hbar\omega$. Оно натянуто на $(n+1)(n+2)/2$ векторов $|n_1 n_0 n_{-1}\rangle$ (при этом $n_1 + n_0 + n_{-1} = n$), которые образуют полную ортонормированную последовательность собственных векторов l_z. Согласно уравнению

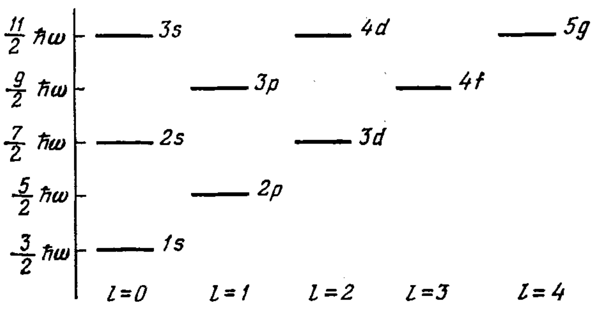

Рис. 37. Спектр трехмерного гармонического осциллятора.

(88), квантовое число m может принимать все целые значения между $-n$ и $+n$. Нетрудно найти число c_m линейно независимых векторов, принадлежащих каждому значению m; результат приведен в следующей таблице:

$$\begin{array}{llllllll} |m| = n & n-1 & n-2 & \ldots & n-2s & n-(2s+1) & n-(2s+2) & \ldots \\ c_m = 1 & 1 & 2 & \ldots & s+1 & s+1 & s+2 & \ldots \end{array} \tag{89}$$

Однако по свойствам момента импульса каждому собственному значению l^2, т. е. каждому значению l, соответствует некоторое число серий из $2l + 1$ векторов с заданными (lm), при этом в каждой серии число m принимает $2l+1$ целых значений от $-l$ до $+l$. Пусть d_l это число серий. Очевидно, что

$$c_m = \sum_{l \geqslant m} d_l$$

и поэтому

$$d_l = c_l - c_{l+1}.$$

Обращаясь к таблице (89), мы видим, что $d_l = 1$ для $l = n$, $n-2$, ..., $n-2s$, ..., т. е. для всех целых значений l четности $(-1)^n$, заключенных между 0 и n (включая крайние значения) и что $d_l = 0$ для всех остальных значений l.

В заключение отметим, что каждому собственному значению $(n+3/2)\hbar\omega$ энергии соответствует $(n+1)(n+2)/2$ состояний момента импульса (lm). Для каждого возможного значения l существует $2l+1$ собственных состояний, соответствующих $2l+1$ значениям m от $-l$ до $+l$. Значения, которые может принимать квантовое число l, таковы:

$$n,\ n-2,\ \ldots,\ 0,\ \text{если}\ (-1)^n = 1 \quad \left(\frac{n+2}{2}\ \text{различных значений}\right),$$

$$n,\ n-2,\ \ldots,\ 1,\ \text{если}\ (-1)^n = -1 \quad \left(\frac{n+1}{2}\ \text{различных значений}\right).$$

Спектроскопическая диаграмма на рис. 37 представляет основное и первые возбужденные состояния трехмерного изотропного гармонического осциллятора. Полезно сравнить эту диаграмму с соответствующей диаграммой для атома водорода (рис. 36).

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть a и $a^\dagger$ — два эрмитово сопряженных оператора, причем $[a, a^\dagger] = 1$. Полагаем $N = a^\dagger a$. Показать, что:

а) $[N, a^p] = -pa^p$; $\quad [N, a^{\dagger p}] = +pa^{\dagger p}$ $\quad$ (p целое > 0);

б) единственными алгебраическими функциями от a и $a^\dagger$, коммутирующими с N, являются функции от N.

2. Показать, что операторы a и $a^\dagger$ задачи 1 не имеют обратных.

3. Построить матрицы, представляющие операторы q и p в представлении $\{N\}$ (обозначения § 5). Проверить, что они являются эрмитовыми и удовлетворяют условиям коммутации (2). Рассмотреть проблему собственных значений q в этом представлении, проверить, что спектр q является простым, непрерывным и распространяется от $-\infty$ до $+\infty$, выписать в явном виде собственный вектор, принадлежащий собственному значению 0.

4. Сравниваются свойства квантового осциллятора в состоянии $|n\rangle$ и микроканонического ансамбля классических осцилляторов при той же энергии (§ 10). Показать, что статистическое распределение переменной q в этом квантовом состоянии обнаруживает осцилляции, тем более частые, чем больше квантовое число n, и в пределе $n \to \infty$ его среднее значение на нескольких периодах стремится к соответствующему распределению для ансамбля классических осцилляторов (использовать метод ВКБ).

5. Пусть χ_0, ω_0, η_0 — начальные значения следующих средних величин:

$$\chi = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2,$$
$$\omega = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2,$$
$$\eta = \langle pq + qp \rangle - 2 \langle p \rangle \langle q \rangle,$$

относящихся к волновому пакету гармонического осциллятора. Установить закон эволюции во времени этих средних величин. Показать, что он выражается функциями вида $A + B \cos 2\omega t + C \sin 2\omega t$ и что χ и ω остаются постоянными во времени в том и только в том случае, если

$$\eta_0 = 0, \quad \omega_0 = m^2\omega^2\chi_0.$$

6. Состояние гармонического осциллятора в начальный момент времени 0 представляется минимизирующим волновым пакетом

$$f(q) = (2\pi\sigma)^{-1/4} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \langle p \rangle q - \frac{(q - \langle q \rangle)^2}{4\sigma}\right].$$

Показать, что этот пакет остается минимизирующим в том и только в том случае, если $\sigma = \hbar/2m\omega$ (см. задачу 5).

Пусть это условие выполнено. Показать, что в этом случае $f(q)$ есть волновая функция, представляющая состояние

$$| f \rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \langle p \rangle q\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \langle q \rangle p\right) | 0 \rangle.$$

Вывести отсюда (пользуясь тождеством (29)), что функция $f(q, t)$ получается с точностью до фазового множителя, если подставить в $f(q)$, вместо значений $\langle q \rangle$ и $\langle p \rangle$ в момент времени 0, их значения в момент времени t. Определить коэффициенты c_n разложения $| f \rangle$ в ряд по собственным векторам гамильтониана и показать, что

$$| c_n |^2 = e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!},$$
$$\alpha = \frac{E_{\text{кл}}}{\hbar\omega};$$
$$E_{\text{кл}} = \frac{1}{2m} (\langle p \rangle^2 + m^2\omega^2 \langle q \rangle^2).$$

7. Проверить, что теорема Блоха (§ 12) применима также и к классическому гармоническому осциллятору и что статистическое распределение величины $\alpha q + \beta p$ для квантового гармонического осциллятора в термодинамическом равновесии стремится к классическому распределению при достаточно больших температурах $kT \gg \hbar\omega$.

8. Показать, что гамильтониан частицы с массой m и зарядом e в постоянном магнитном поле $\mathcal{H}$, направленном по оси Oz, имеет вид

$$H = \frac{p_z^2}{2m} + H_\rho,$$

где

$$H_\rho = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) - \frac{e}{2mc}\mathcal{H}l_z + \frac{e^2}{8mc^2}\mathcal{H}^2\left(x^2 + y^2\right).$$

Показать, что операторы p_z, l_z, H_ρ образуют полный набор коммутирующих постоянных движения и что их общие собственные функции в цилиндрических координатах (z, ρ, θ) могут быть представлены в виде $\exp(ikz) \times \times \exp(i\lambda\theta) \cdot v_{\lambda n}(\rho)$. Здесь k — некоторое вещественное число; $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $\ldots, \pm\infty$; $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. Соответствующими собственными значениями являются

$$\hbar k, \quad \hbar\lambda, \quad (2n+1)\frac{e\hbar}{2mc}\mathcal{H}.$$

Сравнить эти результаты с выводами задачи II. 4.