ДОПОЛНЕНИЕ А
ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, «ФУНКЦИЯ» δ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Раздел I. КРАТКИЙ ОБЗОР ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ[1])

§ 1. Понятие функционала и строгий подход к проблеме непрерывного спектра

«Функция» δ Дирака, применение которой позволяет трактовать непрерывный спектр в полной аналогии с дискретным спектром, по существу не является строго определенным математическим объектом. Корректное теоретическое исследование наблюдаемых, обладающих непрерывным спектром, требует иной постановки проблемы собственных значений.

Собственные функции наблюдаемых в волновой механике встречаются только в форме скалярных произведений с волновыми функциями, т. е. в форме скалярных произведений с функциями, квадрат модуля которых интегрируем. Пусть F — одна из собственных функций, а ψ — произвольно выбранная волновая функция, тогда скалярное произведение $\langle\psi, F\rangle$ (обозначения гл. V) можно рассматривать как антилинейный функционал ψ или, лучше, как линейный функционал ψ^*. Обозначим последний символом $\hat{F}$, тогда по определению

$$\hat{F}[\psi] = \langle\psi^*, F\rangle.$$

Следовательно, теория оперирует не с собственными функциями как таковыми, а с некоторыми функционалами, сопоставленными каждой собственной функции.

Функционалы волновой механики принадлежат некоторому классу функционалов, называемых обобщенными функциями, относительно которых можно с некоторыми ограничениями определить те же операции алгебры и анализа, что и относительно обыкновенных функций. Поэтому можно строго формулировать волновую механику, рассматривая операторы теории как операторы, действующие на обобщенные функции; при этом собственные решения эрмитового оператора суть обобщенные функции частного вида; это линейные и непрерывные функционалы от ограниченных квадратично интегрируемых функций, которые удовлетворяют уравнению на собственные значения этого оператора.

Пусть X и Ξ — две наблюдаемые, спектр которых ради простоты будем предполагать всюду непрерывным и невырожденным, и пусть $\langle\xi|x\rangle$ есть матрица унитарного преобразования, связывающего представление $\{X\}$ и представление $\{\Xi\}$. В строгой формулировке квантовой теории $\langle\xi|x\rangle$ представляет одновременно:

---

[1]) См. *L. Schwartz*, Th'éorie des distributions, Hermann (Paris, 1950—1951); см. также того же автора, Les. Méthodes Mathematiques de Physique, Cours de Sorbonne (Paris, 1955); см. также *В. С. Владимиров*, Обобщенные функции в математической физике, «Наука», 1976; *В. С. Владимиров*, Уравнения математической физики, «Наука», 1971.

а) множество собственных решений X в представлении $\{\Xi\}$, т. е. некоторую последовательность функционалов от функций переменной ξ, отмечаемую непрерывным индексом x;

б) множество собственных решений Ξ в представлении $\{X\}$, т. е. некоторую последовательность функционалов от функций переменной x, отмечаемую непрерывным индексом ξ.

В этом разделе мы дадим точное определение обобщенных функций и укажем без доказательства их основные свойства.

§ 2. Определение обобщенных функций

Обозначим с помощью $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, или просто $\varphi(x)$, некоторую функцию n непрерывных переменных $x_1, \ldots, x_n$, отличные от нуля значения которой принадлежат ограниченной области изменения этих переменных и которая дифференцируема по этим переменным сколько угодно раз (бесконечно дифференцируемая функция с ограниченным носителем).

По определению *обобщенная функция* $T[\varphi]$ *есть линейный и непрерывный функционал функций* φ.

Линейность означает, что для всех линейных комбинаций $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ имеем

$$T[\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2] = \lambda_1 T[\varphi_1] + \lambda_2 T[\varphi_2].$$

Непрерывность же означает, что для всякой последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ $\ldots, \varphi_j, \ldots$ функций φ, такой что $\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j = \varphi$, имеем

$$\lim_{j\to\infty} T[\varphi_j] = T[\varphi].$$

Всякой *локально интегрируемой функции* f (т. е. функции, интеграл от которой [2]) по конечному интервалу существует) соответствует обобщенная функция $\hat{f}$, определяемая скалярным произведением

$$\hat{f}[\varphi] = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx = \langle\varphi^*, f\rangle. \tag{1}$$

Две локально интегрируемые функции определяют одну обобщенную функцию, если они равны почти всюду (т. е. всюду, кроме множества точек меры нуль). В частности, волновые функции волновой механики (квадратично интегрируемые функции) определяют обобщенные функции.

Функция $1/x$ не может соответствовать никакой обобщенной функции, так как эта функция не интегрируема в точке $x = 0$. Но можно определить обобщенную функцию

$$P\frac{1}{x}[\varphi] \equiv v.\,p. \int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \tag{2}$$

где символ $v.\,p.$ обозначает главное значение интеграла в смысле Коши:

$$v.\,p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right\}.$$

---

[2]) Интегралы, о которых идет речь, суть интегралы в смысле Лебега. Интеграл Лебега сводится к интегралу в обычном смысле, т. е. к интегралу Римана, каждый раз, когда последний имеет смысл, однако, интеграл Лебега может существовать и тогда, когда интеграл Римана не определен.

«Функция» Дирака δ определяет обобщенную функцию согласно равенству

$$\delta[\varphi] = \varphi(0). \tag{3}$$

Аналогичным образом «функция» $\delta(x - x_0)$ определяет обобщенную функцию

$$\delta_{x_0}[\varphi] = \varphi(x_0). \tag{4}$$

Замечание. Обобщенная функция может быть, вообще говоря, определена на более широком функциональном пространстве, чем пространство функций φ. Действительно, если $U[\psi]$ является линейным и непрерывным функционалом функций ψ из функционального пространства, более широкого, чем пространство функций φ, то функционал $U[\varphi]$ вполне определен, линеен и непрерывен в пространстве функций φ: следовательно, U есть обобщенная функция.

Примеры: δ_{x_0} определена на пространстве функций $\alpha(x)$, непрерывных в точке $x = x_0$:

$$\delta_{x_0}[\alpha] = \alpha(x_0).$$

Обобщенная функция $\widehat{\Psi}$, соответствующая квадратично интегрируемой функции, определена на пространстве квадратично интегрируемых функций:

$$\widehat{\Psi}[\psi] = \int \Psi\psi\, dx = \langle \psi^*, \Psi \rangle.$$

Линейные и непрерывные функционалы волновых функций волновой механики являются обобщенными функциями частного вида.

§ 3. Линейная комбинация обобщенных функций

$T = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ является обобщенной функцией, определяемой равенством

$$T[\varphi] = \lambda_1 T_1[\varphi] + \lambda_2 T_2[\varphi]$$

(λ_1, λ_2 — заданные комплексные постоянные).

§ 4. Произведение двух обобщенных функций

Если $\hat{f}$ есть обобщенная функция, соответствующая локально интегрируемой функции f, а T — некоторая обобщенная функция, то обобщенная функция

$$P = \hat{f}T$$

определена, если T есть линейный непрерывный функционал функций $f\varphi$ и по определению

$$P[\varphi] = T[f\varphi]. \tag{5}$$

Произведение двух обобщенных функций *существует не всегда*. Если f бесконечно дифференцируема, то $\hat{f}T$ существует при любых T. Если f непрерывна в точке x_0, то

$$(\hat{f}\delta_{x_0})[\varphi] = f(x_0)\,\varphi(x_0). \tag{6}$$

Если $\hat{f}$ и $\hat{g}$ обе являются квадратично интегрируемыми функциями, то произведение $\hat{f}\hat{g}$ определено. Напротив, $[\delta(x)]^2$ не имеет смысла, $\left(1/\sqrt{|x|}\right)^2$ — также.

В качестве частного случая уравнения (6) имеем соотношение

$$x\delta(x) = 0. \tag{7}$$

Обратно, если $xT = 0$, то T пропорционально δ: $T = c\delta$ (c — постоянная).

Вследствие этого, если $f(x)$ и $g(x)$ связаны соотношением

$$xf(x) = g(x),$$

то необходимо имеем

$$f(x) = P\frac{g(x)}{x} + c\delta(x), \tag{8}$$

где c — произвольная постоянная.

§ 5. Ряды и интегралы обобщенных функций

Если последовательность обобщенных функций $T_1, T_2, \ldots, T_j, \ldots$ такова, что при $j \to \infty$ при любой φ $T_j[\varphi]$ имеет предел, то этот предел является обобщенной функцией (т. е. линейным и непрерывным функционалом от φ):

$$T = \lim_{j\to\infty} T_j.$$

Эквивалентное утверждение: если бесконечный ряд $\sum_i T_i[\varphi]$ сходится при любой φ, то сумма ряда определяет обобщенную функцию; говорят, что *ряд* обобщенных функций $\sum_i T_i$ *сходится*.

Если $T(\lambda)$ — обобщенная функция, зависящая от параметра λ, изменяющегося непрерывно в некоторой области Λ, и если интеграл

$$I[\varphi] = \int_\Lambda T(\lambda)[\varphi]\, d\lambda$$

сходится при любой функции φ, то интеграл определяет обобщенную функцию

$$I = \int_\Lambda T(\lambda)\, d\lambda.$$

Аналогичное определение имеет место для многократных интегралов.

В частности, если $f(x, \lambda)$ интегрируема по x (локально) и по λ, то обобщенная функция $f(\lambda)$ интегрируема по λ и ее интеграл есть обобщенная функция $\hat{g}$, соответствующая функции

$$g(x) = \int f(x, \lambda)\, d\lambda.$$

Если функция $a(k)$ при $|k| \to \infty$ мажорируется некоторой положительной степенью $|k|$: $|a(k)| \leqslant A|k|^\alpha$ (A и α — положительные постоянные), то интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} a(k)\, dk$ является обобщенной функцией.

В частности,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\, dk = 2\pi\delta.$$

§ 6. Дифференцирование обобщенных функций

По определению производная $\partial T/\partial x_i$ обобщенной функции есть

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}[\varphi] = -T\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right]. \tag{9}$$

В частности, если локально интегрируемая функция дифференцируема, то производная соответствующей обобщенной функции есть обобщенная функция, соответствующая ее производной. Действительно, интегрируя по частям, имеем

$$\hat{f}'[\varphi] = \int f'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\hat{f}[\varphi'].$$

Все свойства производных обычных функций переносятся на производные обобщенных функций. Например, производная произведения $P = \hat{f}T$ есть

$$P' = \hat{f}'T + \hat{f}T'. \tag{10}$$

Но, кроме того, некоторые результаты, относящиеся к более или менее ограниченным классам функций, справедливы по отношению ко всем обобщенным функциям без ограничений. Именно:

1°. *Обобщенные функции бесконечно дифференцируемы.*

В частности, локально интегрируемые функции $\lg|x|$, $\frac{1}{r}$ $(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$ дифференцируемы как обобщенные функции произвольное число раз:

$$\frac{d}{dx}\lg|x| = P\frac{1}{x}, \tag{11}$$

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta \qquad (\delta \equiv \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)). \tag{12}$$

2°. *Дифференцирование является линейной непрерывной операцией в пространстве обобщенных функций*:

$$\text{если } \lim_{j\to\infty} T_j = T, \quad \text{то} \quad \lim_{j\to\infty} T_j' = T'.$$

Следовательно, если ряд сходится, то он дифференцируем почленно под знаком суммы. Аналогично, если $T(\lambda)$ интегрируема по параметру λ:

$$I = \int_\Lambda T(\lambda)\,d\lambda,$$

то $\partial T(\lambda)/\partial x_i$ обязательно интегрируема в той же области λ и ее интеграл равен $\partial I/\partial x_i$.

Раздел II. СВОЙСТВА «ФУНКЦИИ» δ

§ 7. Определение $\delta(x)$

В физике принято использовать обозначение $\delta(x-x_0)$ вместо более корректного обозначения $\delta_{x_0}[\varphi]$. При этом не упоминают понятия обобщенной функции, а, соблюдая некоторые предосторожности, манипулируют с символом $\delta(x-x_0)$ как с обычной функцией. Это значительно упрощает все формулы.

По определению, если $f(x)$ определена в точке $x = x_0$, то

$$\int f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx \equiv \delta_{x_0}[f(x)] = f(x_0). \tag{13}$$

Таким образом, формально

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \neq x_0, \\ +\infty & \text{если } x = x_0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\,dx = 1. \tag{14}$$

Символ $\delta(x - x_0)$ является обобщением символа Кронекера

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 1, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

§ 8. Представление в виде предела ядра интегрального оператора

$\delta(x - x_0)$ можно рассматривать как предельную форму функции, принимающей отличные от нуля значения только в некоторой малой области около точки x_0, где она обнаруживает резкий положительный максимум, причем интеграл от функции по всему пространству остается все время равным 1. Например:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\pi} \lim_{L \to \infty} \frac{\sin L(x - x_0)}{x - x_0} = \tag{15а}$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\varkappa \to \infty} \frac{1 - \cos \varkappa (x - x_0)}{\varkappa (x - x_0)^2} = \tag{15б}$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varepsilon}{(x - x_0)^2 + \varepsilon^2} = \tag{15в}$$

$$= \lim_{\eta \to 0} \frac{E(x - x_0 + \eta) - E(x - x_0)}{\eta}. \tag{15г}$$

В последнем выражении $E(x)$ есть функция Хевисайда:

$$E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

(обобщенная функция δ есть производная обобщенной функции Хевисайда).

Отметим еще важное предельное свойство (формула Сохоцкого)

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{x - x_0 \pm i\varepsilon} = P\frac{1}{x - x_0} \mp i\pi\delta(x - x_0). \tag{15д}$$

§ 9. Основные свойства

Основные свойства «функции» δ таковы:

$$\delta(x) = \delta(-x), \tag{16}$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \qquad (a \neq 0), \tag{17}$$

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|} \quad (g(x_n) = 0,\ g'(x_n) \neq 0), \tag{18}$$

$$x\delta(x) = 0, \tag{19}$$

$$f(x)\,\delta(x - a) = f(a)\,\delta(x - a), \tag{20}$$

$$\int \delta(x - y)\,\delta(y - a)\,dy = \delta(x - a), \tag{21}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\,dk. \tag{22}$$

Смысл этих равенств состоит в том, что один из членов равенства может быть заменен другим, когда они фигурируют в качестве множителей в подынтегральном выражении некоторого интеграла по x. Все равенства могут быть строго доказаны в теории обобщенных функций (см. раздел I). Формальное (но не строгое) доказательство состоит в умножении обеих частей равенств на достаточно регулярную функцию $f(x)$ и интегрирование по x, тогда результаты должны быть одинаковы в левой и правой частях. Так, соотношения (16), (17) и (18) доказываются путем замены переменной в интеграле. В равенстве (18) суммирование идет по всем нулям функции $g(x)$; выражение имеет смысл только, если нули $g(x)$ и $g'(x)$ не совпадают; например, $\delta(x^2)$ смысла не имеет.

§ 10. Производные $\delta(x)$

«Функция» δ имеет производные всех порядков. При этом m-я производная определяется равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(x)\,f(x)\,dx = (-1)^m f^{(m)}(0), \tag{23}$$

справедливым для всякой функции $f(x)$, m раз дифференцируемой в точке $x = 0$. «Функция» $\delta^{(m)}(x - x_0)$ может рассматриваться как соответствующий предел m-х производных функций в правых частях уравнений (15а), (15б), (15в). Следующие свойства могут быть строго доказаны методами теории обобщенных функций:

$$\delta^{(m)}(x) = (-1)^m\,\delta^{(m)}(-x), \tag{24}$$

$$\int \delta^{(m)}(x - y)\,\delta^{(n)}(y - a)\,dy = \delta^{(m+n)}(x - a), \tag{25}$$

$$x^{m+1}\delta^{(m)}(x) = 0. \tag{26}$$

Первая производная $\delta'(x)$ обладает свойствами:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) f(x)\, dx = -f'(0), \tag{27}$$

$$\delta'(x) = -\delta'(-x), \tag{28}$$

$$\int \delta'(x-y)\,\delta(y-a)\, dy = \delta'(x-a), \tag{29}$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x), \tag{30}$$

$$x^2\delta'(x) = 0, \tag{31}$$

$$\delta'(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} k e^{ikx}\, dk. \tag{32}$$

Раздел III. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ[8])

§ 11. Преобразование Фурье. Определение

Если $f(x)$ есть функция (вещественная или комплексно-значная) переменной x, то ее пребразование Фурье, если оно существует, выражается формулой

$$F(u) \equiv \mathscr{F}[f] = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha ux} f(x)\, dx, \tag{33}$$

где α — некоторая постоянная (в волновой механике выбирают $\alpha = 1/\hbar$). При некоторых условиях сходимости, которые должны быть уточнены, $f(x)$ может быть получена из $F(u)$ в результате обратного преобразования Фурье

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}[F] = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha ux} F(u)\, du. \tag{33'}$$

В более общем случае, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция n переменных $x_1, \ldots, x_n$, то ее преобразование Фурье имеет вид

$$F(u_1, \ldots, u_n) \equiv \mathscr{F}[f] = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{n/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(u_1x_1+\ldots+u_nx_n)} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{34}$$

а обратное преобразование определяется формулой

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathscr{F}^{-1}[F] = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{n/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha(u_1x_1+\ldots+u_nx_n)} F(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n. \tag{34'}$$

---

[8]) См. сноску [1]; см. также *Е. Титчмарш*, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948 г.

При условии, что преобразование Фурье f существует, имеем

$$\mathcal{F}\left[f\left(cx_1, \ldots, cx_n\right)\right] = \frac{1}{|c|^n} F\left(\frac{u_1}{c}, \ldots, \frac{u_n}{c}\right) \tag{35}$$

(c — произвольная постоянная).

При тех же условиях

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F\left(cu_1, \ldots, cu_n\right)\right] = \frac{1}{|c|^n} f\left(\frac{x_1}{c}, \ldots, \frac{x_n}{c}\right). \tag{35'}$$

В дальнейшем мы без доказательства укажем основные свойства преобразований Фурье функций (или обобщенных функций) одной переменной. Все результаты без труда обобщаются на случай любого числа измерений.

§ 12. Абсолютно интегрируемые функции $f(x)$

Всякая абсолютно интегрируемая функция $f(x)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty,$$

обладает преобразованием Фурье

$$F(u) = \mathcal{F}[f].$$

Преобразование Фурье $F(u)$:

(а) непрерывно;

(б) ограничено: $|F(u)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ при любых u;

(в) обращается в нуль на бесконечности: $F(u) \xrightarrow[|u| \to \infty]{} 0$.

Если $f(x)$ m раз непрерывно дифференцируема и ее m производных абсолютно интегрируемы, то

$$\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right] = (i\alpha u)^m F(u). \tag{36}$$

Если $x^m f(x)$ абсолютно интегрируема, то $F(u)$ m раз непрерывно дифференцируема и

$$F^{(m)}(u) = \mathcal{F}\left[(-i\alpha x)^m f(x)\right]. \tag{37}$$

Свойства обратного преобразования $\mathcal{F}^{-1}$ получаются из предыдущих, если во всех формулах заменить i на $-i$.

§ 13. Функции χ (основные функции)

Символом $\chi(x)$ будем обозначать бесконечно дифференцируемую функцию, асимптотически стремящуюся к нулю вместе со всеми своими производными, быстрее любой степени $|x|$:

$$|x|^l \chi^{(m)}(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0 \text{ какими бы ни были } m \text{ и } l.$$

В общем случае $\chi(x_1, \ldots, x_n)$ обозначает функцию n переменных, бесконечно дифференцируемую и такую, что

$$R^l \frac{\partial^m \chi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \qquad \left(R \equiv \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{1/2}\right)$$

при любых l, m и любом выборе индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \ldots + \alpha_n = m)$.

Функцнн φ из раздела I являются частным случаем функций χ; напротив, функции χ не являются обязательно функцнями φ (пример: e^{-R^2}).

Поскольку функции χ являются абсолютно интегрируемыми, то к ним применимы все результаты предшествующего параграфа. Но, кроме того, имеем следующнй результат:

Преобразование Фурье $\mathcal{F}\chi$ и обратное преобразование Фурье $\mathcal{F}^{-1}\chi$ функции χ также являются функциями χ (переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$). Кроме того, преобразование Фурье обладает *свойством взаимности*:

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\chi = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\chi = \chi$$

($\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\chi$ означает преобразование Фурье от $\mathcal{F}^{-1}\chi$).

§ 14. Преобразование Фурье обобщенных функций. Определение

Если T — обобщенная функция, то преобразование Фурье $\mathcal{F}T$ есть функционал, определяемый формулой

$$\mathcal{F}T\,[\varphi] = T\,[\mathcal{F}\varphi],$$

а обратное преобразованне Фурье есть фуикционал

$$\mathcal{F}^{-1}T\,[\varphi] = T\left[\mathcal{F}^{-1}\varphi\right].$$

Поскольку $\mathcal{F}\varphi$, $\mathcal{F}^{-1}\varphi$ не обязательно являются функциями типа φ, может случиться, что функционалы $T[\mathcal{F}\varphi]$, $T[\mathcal{F}^{-1}\varphi]$ не существуют; в этом случае T ие обладает преобразованием Фурье или обратиым преобразованием Фурье.

Если $\mathring{f}$ — обобщенная функция, соответствующая функции $f(x)$, и если $F(u)$, в предположении, что оно существует, есть преобразование Фурье функции $f(x)$, то

$$\mathcal{F}\mathring{f}\,[\varphi] = \mathring{f}\,[\mathcal{F}\varphi] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left\{\left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iaux}\,\varphi(u)\,du\right\}dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\left\{\left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iaux}\,f(x)\,dx\right\}du = \widehat{F}\,[\varphi].$$

Следовательно, преобразование Фурье обобщенной функции $\mathring{f}$ есть обобщенная функция $\mathring{F}$, соответствующая преобразованию Фурье функции f.

§ 15. Обобщенные функции медленного роста

Обобщенные фуикции медленного роста (или умеренные обобщенные функции) по определению являются линейными и непрерывными функционалами от функций χ, т. е. основных функций.

Все свойства обобщенных функций, указанные в разделе I, распространяются на обобщенные функции медленного роста. Достаточно всюду вместо функций φ подставить функции χ. В частности, обобщенные функции медленного роста бесконечно дифференцируемы и все их производные являются обобщенными функциями медленного роста.

Квадратично интегрируемые функции, функции, ограниченные во всем пространстве, и вообще все локально интегрируемые *медленно растущие* функции $f(x)$ (для которых можно найти два таких положительных числа A и α, что $|f(x)| \leqslant A|x|^{\alpha}$ при $|x| \to \infty$) определяют обобщенные функции медленного роста; δ, δ_{x_0} и все их производные являются обобщенными функциями медленного роста.

Решения задач волновой механики на собственные значения являются линейными и непрерывными функционалами волновых функций, т. е. квадратично интегрируемых функций $\psi(q_1, \ldots, q_R)$. Следовательно, это суть линейные и непрерывные функционалы функций χ, т. е. обобщенные функции медленного роста.

Интерес к обобщенным функциям медленного роста связан с замечательными свойствами их преобразований Фурье.

Если U_x есть обобщенная функция медленного роста (определенная на функциях типа $\chi(x)$), то:

1°. Ее преобразование Фурье V_u и обратное преобразование Фурье V_u^{-1} существуют всегда и являются обобщенными функциями медленного роста (определенными на функциях $\chi(u)$). Они определяются формулами:

$$V_u[\chi] \equiv \mathcal{F}U_x[\chi] = U_x[\mathcal{F}\chi], \tag{38}$$

$$V_u^{-1}[\chi] \equiv \mathcal{F}^{-1}U_x[\chi] = U_x[\mathcal{F}^{-1}\chi]. \tag{38'}$$

2°. Преобразования $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ взаимны:

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}U \equiv \mathcal{F}^{-1}V = U, \tag{39}$$

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}U \equiv \mathcal{F}V^{-1} = U. \tag{40}$$

3°. Производные преобразуются согласно закону:

$$\mathcal{F}\left(U_x^{(m)}\right) = (i\alpha u)^m V_u, \tag{41}$$

$$\mathcal{F}\left((-i\alpha x)^m U_x\right) = V_u^{(m)}. \tag{42}$$

§ 16. Квадратично интегрируемые функции

Квадратично интегрируемые функции определяют обобщенные функции медленного роста.

Если условиться не считать различными две функции, равные почти всюду (т. е. всюду, кроме множества точек меры нуль), то свойства преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста распространяются на квадратично интегрируемые функции. Но к этим свойствам добавляются еще и свойства, специфические для квадратично интегрируемых функций. Основные теоремы таковы:

Теорема I. *Если $f(x)$ — квадратично интегрируемая функция, то интеграл*

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\xi}^{+\xi} e^{-i\alpha u x} f(x)\, dx$$

сходится в смысле среднего квадратичного[4]) *к квадратично интегрируемой функции:*

$$F(u) \equiv \mathscr{F} f(x) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \underset{\xi \to \infty}{\mathrm{lmq}} \int_{-\xi}^{+\xi} e^{-i\alpha u x} f(x)\, dx. \tag{43}$$

Теорема II. *Соответствие между $f(x)$ и $F(u)$ взаимно в том смысле, что*

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1} F(u) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \underset{\lambda \to \infty}{\mathrm{lmq}} \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{i\alpha u x} F(u)\, du. \tag{43$'$}$$

Для всякого значения x, в окрестности которого $f(x)$ имеет ограниченную вариацию,

$$\mathscr{F}^{-1} F(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon)}{2}. \tag{44}$$

Теорема III. *Пусть квадратично интегрируемые функции $f(x)$ и $F(u)$ являются фурье-преобразованиями друг друга. Если производная $f'(x)$ есть квадратично интегрируемая функция, то ее преобразование Фурье $i\alpha u F(u)$ есть квадратично интегрируемая функция и, наоборот, если $i\alpha u F(u)$ есть квадратично интегрируемая функция, то $f(x)$ дифференцируема и $f'(x)$ есть обратное преобразование Фурье от $i\alpha u F(u)$.* Аналогичное соответствие связывает пару $xf(x)$ и $(1/\alpha)F'(u)$.

Замечание. Даже если $f(x)$ как функция не всюду дифференцируема, обобщенная функция (медленного роста) $\hat{f}'_x$ существует всегда; ее преобразование Фурье есть обобщенная функция (медленного роста) $i\alpha u \hat{F}(u)$; как функция, эта последняя может не быть квадратично интегрируемой функцией.

Преобразование Фурье сохраняет скалярное произведение квадратично интегрируемых функций (Парсеваль).

Теорема IV. *Если $F(u)$ и $G(u)$ являются преобразованиями Фурье квадратично интегрируемых функций $f(x)$ и $g(x)$, то*

$$\langle g, f \rangle = \langle G, F \rangle, \tag{45}$$

иначе говоря:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^*(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(u) F(u)\, du.$$

---

[4]) Сходимость в смысле среднего квадратичного (менее строгая, чем просто сходимость) функции $\varphi(u, \xi)$ к $\varphi(u)$ при $\xi \to X$ означает, что

$$\lim_{\xi \to X} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(u, \xi) - \varphi(u)|^2\, du = 0;$$

иначе говоря, $\varphi(u, \xi)$ стремится к $\varphi(u)$ почти всюду. Эту сходимость обычно обозначают символом:

$$\underset{\xi \to X}{\mathrm{lmq}}\, \varphi(u, \xi) = \varphi(u).$$

Таблица преобразований Фурье

$f(x)=\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha ux}F(u)\,du$	$F(u)=\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha ux}f(x)\,dx$
$f\left(\frac{x}{c}\right)$	$\lvert c\rvert F(cu)$
$f(-x)$	$F(-u)$
$f^*(x)$	$F^*(-u)$
$F(x)$	$f(-u)$
$xf(x)$	$\frac{i}{\alpha}F'(u)$
$f'(x)$	$i\alpha uF(u)$
$f(x-x_0)$	$e^{-i\alpha ux_0}F(u)$
$e^{i\alpha u_0x}f(x)$	$F(u-u_0)$
$\delta(x)$	$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2}$
$\delta(x-x_0)$	$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2}e^{-i\alpha ux_0}$
$E(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x<0\end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\left[\pi\delta(u)-iP\frac{1}{u}\right]$
$\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2x^2}$	$\left(\frac{\alpha}{\varkappa\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}e^{-\frac{\alpha^2u^2}{2\varkappa^2}}$ ($\mathrm{Re}\,\varkappa>0$, $\mathrm{Re}\,\varkappa^2>0$)
$\frac{E(x+a)-E(x-a)}{\sqrt{2a}}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2a}}, & \lvert x\rvert<a;\\ 0, & \lvert x\rvert>a\end{cases}$	$\left(\frac{\alpha a}{\pi}\right)^{1/2}\frac{\sin\alpha au}{\alpha au}$ (a действ. >0)
$\sqrt{\gamma}\,e^{-\gamma\lvert x\rvert}$	$\left(\frac{2\alpha\gamma^3}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{\gamma^2+\alpha^2u^2}$ ($\mathrm{Re}\,\gamma>0$)
$i\sqrt{2\gamma}\,e^{-\gamma x}E(x)=\begin{cases}i\sqrt{2\gamma}\,e^{-\gamma x}, & x>0;\\ 0, & x<0\end{cases}$	$\left(\frac{\alpha\gamma}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{\alpha u-i\gamma}$ ($\mathrm{Re}\,\gamma>0$)

Замечание. Функции четырех последних примеров нормированы на единицу:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lvert f(x)\rvert^2\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lvert F(u)\rvert^2\,du=1.$$

Частным случаем ($f = g$) этой теоремы является сохранение нормы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(u)|^2\, du. \tag{46}$$

§ 17. Преобразование свертки

По определению сверткой двух функций называется выражение (если оно существует):

$$f * g \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt. \tag{47}$$

Можно также определить[1]) свертку двух обобщенных функций. В частности,

$$\delta * T = T \quad (T \text{ — некоторая обобщенная функция}),$$

$$\delta * f = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-t)\, f(t)\, dt = f(x) \quad (f \text{ — некоторая функция}).$$

Образование свертки является коммутативной операцией: $f * g = g * f$.

Имеет место следующая теорема:

Теорема V. *Свертка двух функций $f(x)$ и $g(x)$ (при условии, что она существует) имеет преобразованием Фурье выражение*

$$\sqrt{2\pi/\alpha}\; F(u)\, G(u),$$

где $F(u)$ и $G(u)$ являются преобразованиями Фурье $f(x)$ и $g(x)$ соответственно; это преобразование взаимно. В частности, имеем:

Теорема V′. *Если $f(x)$ — квадратично интегрируемая функция, $g(x)$ — абсолютно интегрируемая функция, $F(u)$ и $G(u)$ — их преобразования Фурье, то свертка $f * g$ и произведение $\sqrt{\dfrac{2\pi}{\alpha}}\, FG$ являются квадратично интегрируемыми функциями, причем второе является преобразованием Фурье первого,*