

собственных функций \mathbf{L}^2 , \mathbf{S}^2 , L_z , S_z , и соответствующие собственные значения будут $(2L + 1)(2S + 1)$ -кратно вырождены и не будут зависеть от собственных значений L_z и S_z .

Если же V содержит также член вида (99в), то H будет все еще коммутировать с \mathbf{L}^2 и \mathbf{S}^2 , но перестанет быть инвариантным относительно независимых вращений пространственных координат и спинов. Собственные функции H в этом случае можно искать среди общих собственных функций \mathbf{L}^2 , \mathbf{S}^2 , J^2 и J_z , а его собственные значения будут иметь вращательное вырождение только кратности $(2J + 1)$.

Взаимодействие (99г) имеет наименьшую симметрию. Оператор S_{12} не коммутирует с \mathbf{L}^2 . Однако он еще коммутирует с \mathbf{S}^2 (из выражения (102') для тензорного оператора видно, что $[\mathbf{S}^2, S_{12}] = 0$). Если V содержит член вида (99г), то собственные функции H можно искать среди общих собственных функций операторов P , \mathbf{S}^2 , J^2 и J_z .

Раздел V. СЛОЖЕНИЕ МОМЕНТОВ ИМПУЛЬСА

§ 24. Задача сложения

Во многих задачах гамильтониан инвариантен относительно вращений и, следовательно, коммутирует с компонентами полного момента импульса. В этом случае мы ищем собственные функции H среди общих собственных функций J^2 и J_z . При этом важно уметь перечислять и строить векторы с определенным моментом (JM).

В простом случае бесспиновой частицы в центральном поле (гл. IX) полный момент импульса совпадает с орбитальным моментом \mathbf{l} и собственные функции полного момента имеют вид $\chi(r) Y_l^m(\theta, \phi)$. В общем случае \mathbf{J} есть сумма моментов отдельных частиц

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{j}_i,$$

т. е. орбитальных моментов импульса и спинов частиц системы.

Метод построения собственных векторов индивидуальных моментов известен. Так, для системы двух нуклонов, рассмотренной в § 13, имеем

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_2, \quad (103)$$

а собственные функции индивидуальных моментов импульса имеют вид $\psi(r) Y_l^m(\theta, \phi) |\mu_1\rangle |\mu_2\rangle$, где μ_1 и μ_2 могут принимать значения $+\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$, в зависимости от направления спинов

первого и второго нуклонов вверх или вниз соответственно. Задача *сложения* моментов импульса состоит в построении полной системы собственных векторов оператора \mathbf{J} из линейных комбинаций этих функций.

§ 25. Теорема сложения двух моментов импульса

Простейшей задачей является сложение *двух* моментов. Предположим, что

$$\mathbf{J} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2,$$

где j_1 и j_2 — моменты импульса систем 1 и 2, которые вместе образуют исследуемую систему, и предположим, что построена полная система общих собственных векторов

$$|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \quad (104)$$

операторов j_1^2 , j_2^2 , j_{1z} и j_{2z} . Параметр α обозначает дополнительные квантовые числа, которые необходимы для полного определения динамического состояния, или, если угодно, собственные значения наблюдаемых A , образующих с j_1^2 , j_2^2 , j_{1z} и j_{2z} полный набор коммутирующих наблюдаемых; A коммутируют также с компонентами j_1 и j_2 . Предположим к тому же, что векторы (104) образуют стандартный базис по отношению к моментам импульса 1 и 2. Каждому набору квантовых чисел $(\alpha j_1 j_2)$ соответствует столько векторов, сколько имеется различных пар $(m_1 m_2)$; эти векторы получаются один из другого последовательным применением операторов $j_{1\pm}$ и $j_{2\pm}$ по формулам § 6 и натягиваются подпространство $\mathcal{E}(\alpha j_1 j_2)$ размерности $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$.

Отметим, что A , j_1^2 и j_2^2 коммутируют с \mathbf{J} . Поэтому будем искать собственные векторы \mathbf{J}^2 и J_z среди общих собственных векторов этих операторов, а значит каждое из подпространств $\mathcal{E}(\alpha j_1 j_2)$ можно рассматривать независимо. Возьмем произвольное \mathcal{E} и для упрощения записи обозначим векторы $|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ этого подпространства $|m_1 m_2\rangle$, а собственные векторы полного момента импульса, находящиеся в этом подпространстве, $|JM\rangle$ (предполагая, что задание J и M достаточно для определения вектора $|JM\rangle$, в дальнейшем покажем, что это так).

В этом параграфе мы определим возможные значения пар (JM) и соответствующий им порядок вырождения. Построение собственных векторов будет обсуждаться в § 27.

Решение нашей задачи основано на следующих двух замечаниях:

(а) Каждый вектор $|m_1 m_2\rangle$ является собственным для J_z с собственным значением

$$M = m_1 + m_2.$$

Действительно, поскольку $J_z = j_{1z} + j_{2z}$, имеем $J_z |m_1 m_2\rangle = = (m_1 + m_2) |m_1 m_2\rangle$.

(б) Каждому значению J соответствует некоторое число $N(J)$ линейно независимых серий из $(2J+1)$ собственных векторов полного момента импульса; векторы данной серии получаются один из другого последовательным применением J_+ или J_- и соответствуют $(2J+1)$ возможным значениям $M: -J, -J+1, \dots, +J$.

Отсюда следует¹⁾, что если обозначить $n(M)$ кратность собственного значения M , то

$$n(M) = \sum_{J \geq |M|} N(J)$$

и

$$N(J) = n(J) - n(J+1). \quad (105)$$

Тем самым для определения $N(J)$ достаточно найти $n(M)$ для каждого возможного значения M . Согласно замечанию $n(M)$ равно числу пар $(m_1 m_2)$ таких, что

$$M = m_1 + m_2.$$

Для определения этого числа удобно использовать диаграмму рис. 3, на которой каждая пара $(m_1 + m_2)$ представлена точкой с абсциссой m_1 и ординатой m_2 . Число $n(M)$ равно числу точек, расположенных на прямой $x + y = M$. Пусть для определенности $j_1 > j_2$, тогда находим

$$n(M) = \begin{cases} 0, & \text{если } |M| > j_1 + j_2, \\ j_1 + j_2 + 1 - |M|, & \text{если } j_1 + j_2 \geq |M| \geq |j_1 - j_2|, \\ 2j_2 + 1, & \text{если } |j_1 - j_2| \geq |M| \geq 0. \end{cases}$$

Подставляя эти значения в (105), получаем

$$N(J) = 1 \quad \text{для } J = j_1 + j_2, \quad j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|.$$

Отсюда следует основная теорема сложения:

В $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ -мерном пространстве,натянутом на векторы $|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ ($\alpha, j_1 j_2$ фиксированы, m_1, m_2 меняются):

(i) *возможные значения J равны²⁾*

$$j_1 + j_2, \quad j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|;$$

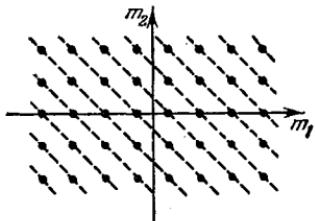


Рис. 3. Возможные значения $M = m_1 + m_2$ и их кратность $n(M)$ ($j_1 = 7/2, j_2 = 2$).

¹⁾ Такие же рассуждения уже использовались в задаче о трехмерном гармоническом осцилляторе (§ XII. 15).

²⁾ Другими словами, J принимает все значения, для которых $j_1 + j_2 + J$ — целое и j_1, j_2 и J могут рассматриваться как длины сторон треугольника.

(ii) каждому из этих значений отвечает одна и только одна серия из $(2J + 1)$ собственных векторов $|JM\rangle$ полного момента импульса.

§ 26. Приложения и примеры

Вначале отметим очевидное следствие теоремы сложения. Полный момент импульса, получающийся сложением произвольного числа моментов, будет целым или полуцелым в зависимости от того, четно или нечетно число полуцелых моментов импульса в сумме.

Мы увидим, что это свойство выполняется во всех нижеследующих примерах.

В качестве первого примера рассмотрим сложение двух спинов $\frac{1}{2}$.

Пространство состояний имеет размерность 4. Полный спин S может принимать два значения: 0 и 1.

Спину $S = 0$ соответствует только один вектор $|00\rangle$: говорят, что спин находится в *синглетном* состоянии.

Спину $S = 1$ соответствуют три вектора $|11\rangle$, $|10\rangle$, $|1-1\rangle$; это векторы *триплетного* состояния.

Легко выписать проекторы P_0 и P_1 на синглетное и триплетное состояния соответственно, как функции S^2 или $\sigma_1\sigma_2$. Поскольку $S^2 = S(S + 1)$, S^2 имеет собственное значение 0 в синглетном состоянии и 2 — в триплетном, отсюда (ср. с (100))

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 - \frac{1}{2} S^2 = \frac{1}{4} (1 - \sigma_1\sigma_2) \\ P_1 &= \frac{1}{2} S^2 = \frac{1}{4} (3 + \sigma_1\sigma_2). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sigma_1\sigma_2 = P_1 - 3P_0. \quad (106)$$

Второй пример — частица спина $\frac{1}{2}$. Ее орбитальный момент импульса и спин образуют полный момент j , который может принимать два значения

$$j = l + \frac{1}{2}, \quad j = l - \frac{1}{2},$$

за исключением случая $l = 0$ (*s*-состояние), когда j может принимать только одно значение $j = \frac{1}{2}$. Итак, j может принимать все полуцелые значения, от $\frac{1}{2}$ до ∞ , и каждому из них соответствует два терма (две серии из $(2j + 1)$ векторов) *противоположной четности*.

В качестве последнего примера рассмотрим двухнуклонную систему из § 23.

В этом случае необходимо связать три момента импульса — орбитальный момент и два спина (ур. (98)). Сложим вначале

спины, что дает полный спин S , который имеет два возможных значения 0 и 1. Затем свяжем S с моментом импульса L для относительной координаты, который может принимать все целые неотрицательные значения. Каждой паре значений (LS) отвечает $(2S + 1)(2L + 1)$ векторов, подходящие линейные комбинации которых дают собственные векторы полного момента. Согласно теореме сложения получаем следующие значения J :

синглетное состояние: $S = 0 \quad J = L;$

триплетное состояние: $S = 1 \quad \begin{cases} J = L - 1, L, L + 1, & \text{если } L \neq 0, \\ J = 1, & \text{если } L = 0. \end{cases}$

Для обозначения полученных термов используем следующие спектроскопические обозначения: заглавная буква отвечает значению L в соответствии с принятым в § IX.6 соглашением; индекс слева вверху дает значение $2S + 1$ (кратность полного спина), а индекс справа внизу равен J . Например, 3D_2 означает терм с $L = 2$, триплетное состояние спина и полный момент $J = 2$. Каждому значению J соответствуют 4 терма (т. е. всего $4(2J + 1)$ векторов), исключение — значение $J = 0$, которому соответствует только два терма. Ниже приводятся различные термы, соответствующие четырем первым значениям:

$J = 0$	3P_0	1S_0
$J = 1$	3S_1	3D_1
$J = 2$	3P_2	3F_2
$J = 3$	3D_3	3G_3

Те же обозначения часто используются и для рассмотренного выше случая частицы спина $1/2$. Орбитальный момент обозначается строчной буквой — заглавными будет обозначаться полный орбитальный момент системы многих частиц — индекс слева просто опускается. Приведем термы, отвечающие первым значениям j :

$$j = \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{7}{2}$$

$$\frac{s_1 p_{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \quad \frac{p_{\frac{3}{2}} d_{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \quad \frac{d_{\frac{5}{2}} f_{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \quad \frac{f_{\frac{7}{2}} g_{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}.$$

§ 27. Собственные векторы полного момента импульса. Коэффициенты Клебша — Гордана

Каждой паре (JM) , которая удовлетворяет условиям теоремы сложения, соответствует собственный вектор $|\alpha j_1 j_2 JM\rangle$ полного момента импульса. Для устранения произвола нормируем этот вектор на 1 и фиксируем его фазу подходящим условием, к обсуждению которого мы вернемся ниже. Векторы

$|\alpha j_1 j_2 JM\rangle$, так же как и $|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$, образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathcal{E}(\alpha j_1 j_2)$. Переход от одного базиса к другому совершается посредством унитарного преобразования

$$|aj_1 j_2 JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} |aj_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle aj_1 j_2 m_1 m_2| aj_1 j_2 JM\rangle. \quad (107)$$

Коэффициенты этого преобразования обладают очень важным свойством: они не зависят от α , а зависят только от величин j_1 , j_2 , J , m_1 , m_2 , M . Действительно, в подпространстве $\mathcal{E}(\alpha j_1 j_2)$ векторы $|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ образуют базис стандартного представления, в котором компоненты j_1 и j_2 задаются матрицами, не зависящими от α (см. ур. (28)); следовательно, матрицы, определяющие J^2 и J_z , также не зависят от α и компоненты $\langle aj_1 j_2 m_1 m_2| aj_1 j_2 JM\rangle$ их общих собственных векторов обладают тем же свойством. Тем самым, они имеют чисто геометрическое происхождение и зависят только от рассматриваемого момента импульса и его ориентации, тогда как физическая природа динамических переменных 1 и 2, из которых строятся моменты, не существенна. Эти компоненты называют *коэффициентами Клебша — Гордана* (К. — Г.) или коэффициентами векторного сложения. Мы будем обозначать их символом $\langle j_1 j_2 m_1 m_2| JM\rangle$. Используя это обозначение, соотношение (107) можно записать так:

$$|aj_1 j_2 JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} |aj_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2| JM\rangle. \quad (108)$$

Для полного определения коэффициентов К. — Г. остается фиксировать фазы векторов $|\alpha j_1 j_2 JM\rangle$. Для относительных фаз $(2J + 1)$ векторов, отвечающих данному J , мы примем то же соглашение, что и в § 6. Тогда эти векторы определены с точностью до фазы, зависящей от J . Мы устраним этот произвол требованием, чтобы компонента $|\alpha j_1 j_2 JJ\rangle$ вдоль $|aj_1 j_2 j_1 J - j_1\rangle$ была вещественной и положительной

$$\langle j_1 j_2 j_1 m_2| JJ\rangle \geqslant 0. \quad (109)$$

Многие свойства коэффициентов К. — Г. следуют непосредственно из их определения.

Согласно теореме сложения для отличия $\langle j_1 j_2 m_1 m_2| JM\rangle$ от нуля необходимо, чтобы выполнялись одновременно условия (*правила отбора*)

$$m_1 + m_2 = M, \quad |j_1 - j_2| \leqslant J \leqslant j_1 + j_2.$$

Ниже мы покажем, что все коэффициенты К. — Г., относящиеся к данному значению J , могут быть получены посредством рекуррентных соотношений с вещественными коэффициентами из коэффициента $\langle j_1 j_2 j_1 J - j_1| JJ\rangle$. Поскольку последний ве-

ственных, то и все остальные коэффициенты К.—Г. вещественны.

Более того, поскольку это коэффициенты унитарного преобразования, то они удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\sum_{m_1 m_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | J' M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'}, \quad (110a)$$

$$\sum_{JM} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle \langle j_1 j_2 m'_1 m'_2 | JM \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}. \quad (110b)$$

В простейших случаях линейные комбинации (108) можно найти непосредственно. Отметим, что для $J = j_1 + j_2$ и $M = J$ имеем

$$|aj_1 j_2 j_1 + j_2 j_1 + j_2\rangle = |aj_1 j_2 j_1 j_2\rangle.$$

Последовательное применение $J_- = j_{1-} + j_{2-}$ к обеим частям этого уравнения дает все векторы $|\alpha j_1 j_2 JM\rangle$, отвечающие $J = j_1 + j_2$. Затем можно построить векторы серии $J = j_1 + j_2 - 1$, используя оператор J_- и начиная с вектора, соответствующего $M = J$, который однозначно определяется условием на фазу (109) и свойством ортогональности к $|\alpha j_1 j_2 j_1 + j_2 j_1 + j_2 - 1\rangle$. Таким образом, можно построить все серии собственных векторов.

При сложении двух спинов $\frac{1}{2}$ собственные векторы полного спина можно построить таким же способом из собственных векторов $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|--+\rangle$ и $|--\rangle$ операторов спинов отдельных частиц

$$\begin{array}{ll} S=1 & S=0 \\ M=1 & |11\rangle = |++\rangle \\ M=0 & |10\rangle = \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} \quad |00\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}} \\ M=-1 & |1-1\rangle = |--\rangle. \end{array}$$

При сложении моментов импульса большей величины необходимо прибегнуть к более сложной технике. Можно установить различные рекуррентные соотношения (ур. (B. 18)—(B. 20)). Например, применяя J_+ или J_- к обеим частям уравнения (108), получаем (см. ур. (B. 19) и (B. 18))

$$\begin{aligned} \sqrt{J(J+1) - M(M+1)} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM + 1 \rangle = \\ = \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)} \langle j_1 j_2 m_1 - 1 m_2 | JM \rangle + \\ + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 - 1 | JM \rangle, \end{aligned} \quad (111)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{J(J+1) - M(M-1)} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM - 1 \rangle = \\ = \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)} \langle j_1 j_2 m_1 + 1 m_2 | JM \rangle + \\ + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 + 1 | JM \rangle. \end{aligned} \quad (112)$$

Если $M = J$, то левая часть (111) исчезает и видно, что все коэффициенты $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JJ \rangle$ пропорциональны одному из них, скажем $\langle j_1 j_2 j_1 J - j_1 | JJ \rangle$. Условие нормировки вектора $|aj_1 j_2 JJ\rangle$ ($\sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JJ \rangle^2 = 1$) и соглашение о фазе (109) определяет их полностью. Все другие коэффициенты К.—Г. можно затем получить, последовательно используя рекуррентные соотношения (112). Такой метод вычисления коэффициентов К.—Г. для записи их в компактной форме (B. 21)¹⁾ применялся Рака.

Кроме уже упомянутых свойств, коэффициенты К.—Г. обладают важными *свойствами симметрии*, которые значительно упрощают табулирование. Вместе с основными свойствами коэффициентов К.—Г. эти свойства симметрии приведены в Дополнении В (раздел I), которое содержит также таблицу простейших коэффициентов.

§ 28. Приложение: система двух нуклонов

Для того чтобы рассмотреть применения теоремы сложения угловых моментов, вернемся к системе двух нуклонов из § 23. Мы будем исследовать уравнение Шредингера с различной формой зависимости потенциала от спина. Ограничимся рассмотрением потенциалов (99).

Допустим, что потенциал имеет вид

$$V = V_1(r) + V_2(r)(\sigma_1 \sigma_2).$$

В этом случае гамильтониан коммутирует с L и S и собственные функции являются произведениями спиновых функций $|S\mu\rangle$ и функций от r с определенным орбитальным моментом (lm). В силу тождества (106) потенциал имеет различный вид в зависимости от того, равно ли S нулю или единице. Таким образом, решение уравнения Шредингера эквивалентно решению двух уравнений Шредингера для бесспиновой частицы в центральных потенциалах, которые отвечают двум возможным значениям S . Если $S = 0$, то орбитальная часть собственной функции та же, что и для бесспиновой частицы в потенциале $V_1 - 3V_2$; если же $S = 1$, то она та же, что и для частицы в потенциале $V_1 + V_2$. Проблема определения собственных значе-

¹⁾ Для того чтобы провести это вычисление до конца, необходимо воспользоваться полученным Рака тождеством

$$\sum_s \frac{(a+s)!(b-s)!}{(c+s)!(d-s)!} = \frac{(a+b+1)!(a-c)!(b-d)!}{(c+d)!(a+b-c-d+1)!}$$

(a, b, c, d — целые числа и $a \geq c \geq 0, b \geq d \geq 0$; s принимает все целые значения от $-c$ до $+d$).

ний свелась к решению радиального уравнения для каждой пары значений (LS) .

Если потенциал имеет вид

$$V = V_1(r) + V_2(r)(\sigma_1\sigma_2) + V_3(r)(LS),$$

то гамильтониан не инвариантен относительно независимых вращений пространства и спинов, но поскольку он все еще коммутирует с L^2 и S^2 , можно искать общие собственные функции L^2 , S^2 , J^2 и J_z . Каждому набору (LSJ) отвечают такие функции, зависимость которых от углов θ , φ и от спиновых переменных полностью определена и явно выражается с помощью коэффициентов K . — Γ .

$$\begin{aligned} \Psi_{LSJ}^M &\equiv F(r) \mathcal{Y}_{LSJ}^M, \\ \mathcal{Y}_{LSJ}^M &= \sum Y_L^m(\theta, \varphi) |S\mu\rangle \langle LS m\mu| JM \rangle. \end{aligned} \quad (113)$$

Так, три функции состояния P_1 имеют следующую «угловую зависимость»: $\mathcal{Y}_{101}^M = Y_1^M|00\rangle (M=0, \pm 1)$. Пять функций состояния 3D_2 имеют вид

$$\mathcal{Y}_{212}^M = \sum_{m\mu} Y_2^m|1\mu\rangle \langle 21m\mu|2M\rangle \quad (M=0, \pm 1, \pm 2).$$

Действуя гамильтонианом на функции такого типа и используя тождества (100) и (101), получаем

$$H\Psi_{LSJ}^M = \left[-\frac{\hbar^2}{M_0} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2}{M_0} \frac{L(L+1)}{r^2} + V_{LSJ} \right] \Psi_{LSJ}^M,$$

где

$$\begin{aligned} V_{LSJ}(r) &= V_1(r) + [2S(S+1) - 3] V_2(r) + \\ &+ \frac{1}{2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)] V_3(r). \end{aligned}$$

Таким образом, задача о решении уравнения Шредингера свелась к решению радиального уравнения

$$\left[-\frac{\hbar^2}{M_0} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2}{M_0} \frac{L(L+1)}{r^2} + V_{LSJ}(r) \right] F(r) = EF(r).$$

Мы получили такую же задачу, как и в случае бесспиновой частицы в центральном потенциале с единственным отличием, что «эффективный центральный потенциал» $V_{LSJ}(r)$ зависит от тройплета (LSJ) ¹⁾.

¹⁾ Для $S=0$ спин-орбитальные силы отсутствуют и при любых L и J имеем

$$V_{LOL} = V_1 - 3V_2.$$

Аналогично, если $S=1$ и $L=J$, то «эффективный потенциал» не зависит от L

$$V_{L1L} = V_1 + V_2 - V_3.$$

В качестве последнего примера рассмотрим потенциал вида

$$V = V_C(r) + V_T(r) S_{12}.$$

Из-за присутствия «тензорных» сил гамильтониан не коммутирует с \mathbf{L}^2 , но продолжает коммутировать с \mathbf{S}^2 и оператором «четности» P , введенным в § 23. Следовательно, собственные функции H можно искать среди общих собственных функций P , \mathbf{S}^2 , \mathbf{J}^2 , J_z , т. е. среди функций с определенными значениями полного момента (JM), четности и спина S .

Если $S = 0$, то обязательно $L = J$ (а значит $P = (-1)^J$) и собственная функция имеет вид $F(r) \Psi_{J0J}^M$. Так как $\mathbf{S}|00\rangle = 0$, то из (102') имеем

$$S_{12} \Psi_{J0J}^M \equiv S_{12} Y_J^M(\theta, \varphi)|00\rangle = 0.$$

Следовательно, $F(r)$ удовлетворяет радиальному уравнению для частицы с моментом J в потенциале $V_C(r)$.

Если $S = 1$ и $P = (-1)^J$, то обязательно $L = J$ и «угловая зависимость» собственной функции, как и ранее, полностью определена

$$\Psi_{J1J}^M = F(r) \Psi_{J1J}^M.$$

Можно показать (задача 11), что $S_{12} \Psi_{J1J}^M = 2 \Psi_{J1J}^M$ и функция $F(r)$ удовлетворяет радиальному уравнению для частицы с моментом импульса J в потенциале $V_C(r) + 2V_T(r)$.

Если $S = 1$ и $P = (-1)^{J+1}$, то возможными значениями L будут только $J+1$ и $J-1$ (если же $J=0$, то имеется только одно значение $L=1$) и собственная функция имеет вид

$$\Psi = F_{J-1}(r) \Psi_- + F_{J+1}(r) \Psi_+,$$

где для упрощения записи мы использовали обозначения $\Psi_{\pm} = \Psi_{J\pm 1J}^M$. Теперь S_{12} , действуя на Ψ_+ или на Ψ_- , дает комбинацию этих функций (задача 11), следовательно, выражение $(H - E)\Psi$ также будет линейной комбинацией этих функций с коэффициентами, зависящими от r . Как следствие уравнения $(H - E)\Psi = 0$, эти два коэффициента равны нулю, что приводит к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для $F_{J-1}(r)$ и $F_{J+1}(r)$.

Выпишем в качестве примера систему связных радиальных уравнений для $J = 1$. Этот случай встречается при изучении дейтранона. Волновая функция является смесью состояний 3S_1 и 3D_1 и может быть представлена в виде

$$\Psi \equiv \frac{1}{r} u_S(r) \Psi_{011}^M + \frac{1}{r} u_D(r) \Psi_{211}^M.$$

Поскольку (задача 11)

$$\begin{aligned} S_{12}\mathcal{Y}_{011}^M &= \sqrt{8}\mathcal{Y}_{211}, & S_{12}\mathcal{Y}_{211}^M &= \sqrt{8}\mathcal{Y}_{011}^M - 2\mathcal{Y}_{211}^M, \\ L^2\mathcal{Y}_{011}^M &= 0, & L^2\mathcal{Y}_{211}^M &= 6\mathcal{Y}_{211}^M \end{aligned} \quad (114)$$

и

$$H = -\frac{\hbar^2}{M_0} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2 L^2}{M_0 r^2} + V_C(r) + V_T(r) S_{12},$$

уравнение $(H - E)\Psi = 0$ эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\hbar^2}{M_0} \frac{d^2}{dr^2} + E - V_C(r) \right] u_S &= \sqrt{8} V_T(r) u_D, \\ \left[\frac{\hbar^2}{M_0} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{6}{r^2} \right) + E + 2V_T(r) - V_C(r) \right] u_D &= \sqrt{8} V_T(r) u_S. \end{aligned} \quad (115)$$

§ 29. Сложение трех и более моментов импульса. Коэффициенты Рака. «3sj»-символы

Двухнуклонная система, рассмотренная в § 28, представляет собой пример системы, где полный момент импульса является суммой трех индивидуальных моментов (ур. (103)). Мы смогли разобрать этот простой пример без обращения к уточненным методам. Исследуем теперь сложение трех моментов в общем случае.

Предположим, что рассматриваемая система состоит из трех различных систем, 1, 2 и 3 с моментами импульса j_1 , j_2 и j_3 соответственно. Полный момент импульса тогда равен

$$J = j_1 + j_2 + j_3.$$

Проблема сложения заключается в построении собственных векторов полного момента в подпространстве, натянутом на $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2j_3 + 1)$ собственных векторов

$$| \alpha j_1 j_2 j_3 m_1 m_2 m_3 \rangle$$

отдельных моментов импульса, отвечающих определенным значениям квантовых чисел α , j_1 , j_2 и j_3 . Квантовое число α , определяемое здесь так же, как и в § 25, в последующем изложении несущественно и будет опускаться.

Существует несколько способов построения векторов с моментом импульса (JM):

(i) Можно связать j_1 и j_2 (рис. 4, a), образуя момент $J_{12} = j_1 + j_2$, а затем связать J_{12} и j_3 , образуя J . Таким образом,

получаем собственные векторы

$$|(j_1 j_2) J_{12}, j_3; JM\rangle =$$

$$= \sum_{\substack{m_1 m_2 \\ M_{12} m_3}} |j_1 j_2 j_3 m_1 m_2 m_3\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 |J_{12} M_{12}\rangle \langle J_{12} j_3 M_{12} m_3 |JM\rangle, \quad (116)$$

общие для операторов $j_1^2, j_2^2, j_3^2, J_{12}^2, J^2$ и J_z .

(ii) Можно связать j_2 и j_3 (рис. 4, б), образуя момент $J_{23} = j_2 + j_3$, а затем связать j_1 и J_{23} , образуя J . Таким образом, получаем собственные векторы

$$|j_1, (j_2 j_3) J_{23}; JM\rangle =$$

$$= \sum_{\substack{m_1 m_3 \\ m_1 m_2 \\ M_{13} M_{23}}} |j_1 j_2 j_3 m_1 m_2 m_3\rangle \langle j_2 j_3 m_2 m_3 |J_{23} M_{23}\rangle \langle j_1 J_{23} m_1 M_{23} |JM\rangle, \quad (117)$$

общие для операторов $j_1^2, j_2^2, j_3^2, J_{23}^2, J^2$ и J_z .

(iii) Можно связать j_1 и j_3 , образуя J_{13} , а затем и j_2 , образуя J .

Итак, у нас имеется выбор между тремя различными наборами базисных векторов полного момента. В большинстве задач



$$a) j_1 + j_2 = J_{12} \\ J_{12} + j_3 = J$$

$$b) j_2 + j_3 = J_{23} \\ j_1 + J_{23} = J$$

Рис. 4. Способы сложения трех моментов импульса.

важно уметь переходить от одного базиса к другому. Преобразование, которое осуществляет этот переход, является унитарным. Например, имеем

$$|j_1, (j_2 j_3) J_{23}; JM\rangle =$$

$$= \sum_{J_{12}} |(j_1 j_2) J_{12}, j_3; JM\rangle \langle (j_1 j_2) J_{12}, j_3 J |j_1, (j_2 j_3) J_{23} J\rangle. \quad (118)$$

Очевидно, коэффициенты этого унитарного преобразования не зависят от α по тем же самым причинам, что и коэффициенты К.—Г. Действуя операторами J_+ или J_- на обе части (118), легко видеть, что они не зависят также от M , а зависят только от шести моментов: $j_1, j_2, j_3, J_{12}, J_{23}$ и J .

Вместо непосредственного использования этих коэффициентов более удобно использовать коэффициенты Рака W , или

« $6j$ »-символы Вигнера, которые пропорциональны им в соответствии с определениями

$$\begin{aligned} \langle (j_1 j_2) J_{12}, j_3 J | j_1, (j_2 j_3) J_{23} J \rangle &= \\ &= \sqrt{(2J_{12} + 1)(2J_{23} + 1)} W(j_1 j_2 J_3; J_{12} J_{23}) = \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j_3+J} \sqrt{(2J_{12} + 1)(2J_{23} + 1)} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & J & J_{23} \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Из определения W ясно, что эти коэффициенты являются суммами по индексам m четырех коэффициентов К. — Г. Исключая случай наиболее простых аргументов, непосредственное вычисление коэффициентов W чрезвычайно затруднительно; оно заключается в вычислении большого числа коэффициентов К. — Г., а затем в вычислении сложного выражения, построенного из этих коэффициентов. Рака удалось получить обозримое и приемлемое для работы выражение для W (формула (B.36)). Существуют таблицы коэффициентов W для наиболее часто встречающихся аргументов.

« bj »-символы отличаются от W только знаком. Они интересны в основном благодаря их замечательным свойствам симметрии. Основные свойства коэффициентов W и « bj »-символов приведены в Дополнении В (раздел II).

Рассмотренный выше способ сложения трех моментов импульса может быть перенесен и на случай сложения большего числа моментов

$$J = j_1 + j_2 + \dots + j_n. \quad (119)$$

Складывая два любых момента: $j_i + j_k = J_{ik}$, мы сводим задачу к сложению $(n - 1)$ момента, заменяя векторы j_i и j_k в правой части (119) их суммой J_{ik} . Повторяя эту операцию, приходим к сложению $(n - 2)$ моментов и т. д. Таким образом, нам удается сложить n угловых моментов, вводя $(n - 2)$ промежуточных момента. Так же строится и система базисных векторов полного момента импульса.

Выбирая различные промежуточные моменты, можно построить несколько различных наборов базисных векторов. Мы видели, что при $n = 3$ существует три набора. Можно показать, что в общем случае существует $1/2n!$ наборов. Переход от одного набора к другому осуществляется посредством унитарного преобразования (с вещественными коэффициентами). Легко убедиться в том, что коэффициенты преобразования не зависят от α и от M — собственного значения компоненты J_z оператора J , а зависят только от квантовых чисел J, j_1, j_2, \dots, j_n и двух наборов из $(n - 2)$ квантовых чисел, таких как J_{ik} , которые определяют длину промежуточных моментов, характеризующих каждый набор базисных векторов: всего $1 + n + 2(n - 2) = 3(n - 1)$.

квантовых чисел j . Коэффициенты преобразования можно представить в форме « $3(n-1)j$ »-символов, обобщающих « $6j$ »-символы, введенные при сложении трех моментов, « $3(n-1)j$ »-символы являются суммами $2(n-1)$ коэффициентов К.—Г. по индексам t . Основные свойства « $9j$ »-символов (символы для сложения четырех моментов) приведены в Дополнении В (раздел III).

Раздел VI. НЕПРИВОДИМЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ¹⁾

§ 30. Представление скалярных операторов

Если наблюдаемая инвариантна относительно вращений, то и подпространство, соответствующее каждому из ее собственных значений, инвариантно. Это важное свойство уже упоминалось в § 17. Там в качестве наблюдаемой рассматривался гамильтониан, но это свойство справедливо и для любой другой скалярной наблюдаемой.

В более общем случае, скалярная наблюдаемая, даже не будучи диагональной, в данном стандартном представлении задается, как мы увидим ниже, особенно простой матрицей.

Пусть $|\tau JM\rangle$ — базисные векторы стандартного представления $\{J^2 J_z\}$ (обозначения § 6), а S — скалярный оператор (не обязательно наблюдаемая). По предположению,

$$[J, S] = 0.$$

Отсюда следует, что вектор $S|\tau' J' M'\rangle$, так же как $|\tau' J' M'\rangle$, является вектором с моментом импульса $(J' M')$ и ортогонален к любому вектору с другим моментом. Следовательно, матричный элемент $\langle \tau JM | S | \tau' J' M' \rangle$ равен нулю, если $J \neq J'$ или $M \neq M'$. Более того, поскольку J_+ коммутирует с S , то при $J = J'$ и $M = M'$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \tau JM | S | \tau' JM \rangle &= \\ &= [J(J+1) - M(M-1)]^{-\frac{1}{2}} \langle \tau JM | SJ_+ | \tau' JM - 1 \rangle = \\ &= [J(J+1) - M(M-1)]^{-\frac{1}{2}} \langle \tau JM | J_+ S | \tau' JM - 1 \rangle = \\ &= \langle \tau JM - 1 | S | \tau' JM - 1 \rangle, \end{aligned}$$

¹⁾ Систематическое изложение алгебры неприводимых тензоров и ее приложений в теории момента импульса в квантовой механике содержится в книге: U. Fano, G. Racah. Irreducible tensorial sets. N. Y., Academic Press Inc. (1959).