квантовых чисел j. Коэффициенты преобразования можно представить в форме «$3(n-1)j$»-символов, обобщающих «$6j$»-символы, введенные при сложении трех моментов, «$3(n-1)j$»-символы являются суммами $2(n-1)$ коэффициентов К.—Г. по индексам m. Основные свойства «$9j$»-символов (символы для сложения четырех моментов) приведены в Дополнении В (раздел III).

Раздел VI. НЕПРИВОДИМЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ [1])

§ 30. Представление скалярных операторов

Если наблюдаемая инвариантна относительно вращений, то и подпространство, соответствующее каждому из ее собственных значений, инвариантно. Это важное свойство уже упоминалось в § 17. Там в качестве наблюдаемой рассматривался гамильтониан, но это свойство справедливо и для любой другой скалярной наблюдаемой.

В более общем случае, скалярная наблюдаемая, даже не будучи диагональной, в данном стандартном представлении задается, как мы увидим ниже, особенно простой матрицей.

Пусть $|\tau JM\rangle$ — базисные векторы стандартного представления $\{\boldsymbol{J}^2 J_z\}$ (обозначения § 6), а S — скалярный оператор (не обязательно наблюдаемая). По предположению,

$$[\boldsymbol{J}, S] = 0.$$

Отсюда следует, что вектор $S|\tau' J' M'\rangle$, так же как $|\tau' J' M'\rangle$, является вектором с моментом импульса $(J'M')$ и ортогонален к любому вектору с другим моментом. Следовательно, матричный элемент $\langle \tau JM|S|\tau' J' M'\rangle$ равен нулю, если $J \neq J'$ или $M \neq M'$. Более того, поскольку J_+ коммутирует с S, то при $J = J'$ и $M = M'$ имеем

$$\begin{aligned}
\langle \tau JM\,|S\,|\tau' JM\rangle = {} & \\
&= [J(J+1) - M(M-1)]^{-\frac{1}{2}} \langle \tau JM\,|SJ_+\,|\tau' JM-1\rangle = \\
&= [J(J+1) - M(M-1)]^{-\frac{1}{2}} \langle \tau JM|\,J_+ S\,|\tau' JM-1\rangle = \\
&= \langle \tau JM-1\,|S\,|\tau' JM-1\rangle,
\end{aligned}$$

---

[1]) Систематическое изложение алгебры неприводимых тензоров и ее приложений в теории момента импульса в квантовой механике содержится в книге: *U. Fano, G. Racah.* Irreducible tensorial sets. N. Y., Academic Press Inc. (1959).

и, значит, матричный элемент не зависит от M. Полученные свойства можно записать в виде равенства

$$\langle \tau JM \,|\, S \,|\, \tau' J' M' \rangle = \delta_{JJ'}\delta_{MM'} S^{(J)}_{\tau\tau'}, \tag{120}$$

где $S^{(J)}_{\tau\tau'}$ — величина, зависящая только от J, τ и τ'. В случае, когда S — наблюдаемая, матрица $S^{(J)}_{\tau\tau'}$ эрмитова и ее можно привести к диагональному виду.

§ 31. Неприводимые тензорные операторы. Определение

В этом параграфе мы обобщим равенство (120) на класс операторов, которые называются неприводимыми тензорными операторами. Они не инвариантны относительно вращений, но закон преобразования их при вращениях довольно простой.

Понятие тензорного оператора является обобщением понятия векторного оператора.

Начнем с определения *тензора*. Допустим, что нам дано n-мерное пространство $\mathscr{E}_n$ такое, что при вращении векторы из $\mathscr{E}_n$ линейно преобразуются в векторы из $\mathscr{E}_n$: с каждым вращением связан линейный оператор в $\mathscr{E}_n$. По определению, векторы $\mathscr{E}_n$ являются n-компонентными тензорами. Например, векторы в обычном пространстве и спиноры являются 3- и 2-компонентными тензорами соответственно; векторы из определенного в § 6 подпространства $\mathscr{E}(\tau J)$ являются $(2J+1)$-компонентными тензорами, а кет-векторы пространства состояний квантовой системы — тензорами с бесконечным числом компонент.

Если выбрать набор базисных векторов в $\mathscr{E}_n$, то каждый из упомянутых выше тензоров будет задаваться n компонентами, а вращение — действием матрицы $n \times n$ на эти n компонент. Так, вращение вектора, заданного декартовыми координатами в обычном пространстве, осуществляется матрицей $\mathscr{R}$, определенной в § 10. Аналогично, если мы возьмем стандартное представление в $\mathscr{E}(\tau J)$, то любой тензор $|u\rangle$ подпространства $\mathscr{E}(\tau J)$ определяется $(2J+1)$ компонентами $u_M \equiv \langle \tau JM | u \rangle$, а компоненты u'_M его преобразования при вращении $\mathscr{R}(\alpha\beta\gamma)$ получаются применением к u_M матрицы вращения $R^{(J)}(\alpha\beta\gamma)$ (§ 16)

$$u'_M = \sum_{M'} R^{(J)}_{MM'}(\alpha\beta\gamma)\, u_{M'}. \tag{121}$$

В качестве другого примера рассмотрим девять величин $V_i W_j$ ($i, j = 1, 2, 3$), получающихся перемножением различных компонент векторов $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$. Они представляют собой девять компонент тензора, который мы обозначим $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$. Компоненты этого тензора после вращения $\mathscr{R}$ получаются следующим образом:

$$[\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}]'_{il} \equiv V'_i W'_l = \mathscr{R}_{ik}\mathscr{R}_{jl} V_k V_l = \mathscr{R}_{ik}\mathscr{R}_{jl}\,[\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}]_{kl}.$$

Среди множества тензоров, которые можно построить, привилегированное положение занимают *неприводимые тензоры*. По определению, тензор является неприводимым, если пространство $\mathscr{E}_n$, которому он принадлежит, неприводимо по отношению к вращениям.

Векторы обычного пространства, спиноры, векторы пространства $\mathscr{E}(\tau J)$ являются неприводимыми тензорами.

С другой стороны, тензор $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ — приводимый. Девятимерное пространство, в котором он определен, является прямой суммой трех неприводимых ин-

вариантных по отношению к вращениям подпространств, имеющих размерности 1, 3 и 5 соответственно. Следовательно, проекции тензора $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ на каждое из этих подпространства дают неприводимые тензоры; с точностью до константы они представляют собой: скалярное произведение $\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{W}$, векторное произведение $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W}$ и неприводимый 5-компонентный тензор, компоненты которого преобразуются при вращениях как гармонические полиномы второго порядка (см. § Б. 10) [1].

Точно так же векторы $(2j_1+1)(2j_2+1)$-мерного пространства из § 25 являются приводимыми тензорами с $(2j_1+1)(2j_2+1)$ компонентами, и теорема сложения дает их разбиение на неприводимые.

От понятия тензора переходят к понятию тензорного оператора точно так же, как от понятия вектора к векторному оператору.

Если n операторов преобразуются при вращениях линейно друг через друга, как n линейно независимых векторов пространства $\mathscr{E}_n$, то они являются компонентами n-мерного *тензорного оператора* [2]. Линейное преобразование этих n компонент даст n новых операторов, которые можно рассматривать как компоненты того же тензорного оператора в другом представлении. Если пространство $\mathscr{E}_n$ неприводимо, то и *тензорный оператор* называют *неприводимым*.

Векторные операторы образуют специальный класс неприводимых тензорных операторов.

Если $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ — два векторных оператора, то девять операторов $V_i W_j$ являются компонентами приводимого тензорного оператора, который может быть представлен в виде прямой суммы трех неприводимых тензорных операторов: скаляра $\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{W}$, вектора $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W}$ и тензорного оператора, который задается, например, пятью компонентами, приведенными в предыдущем примечании.

Тензорный оператор в заданном представлении однозначно определен законом преобразования его компонент при вращении.

По определению, $(2k+1)$ операторов $T_q^{(k)}$ $(q = -k, -k+1, \ldots, +k)$ являются стандартными компонентами неприводимого тензорного оператора k-го порядка $T^{(k)}$, *если они преобразуются при вращениях по закону*

$$R T_q^{(k)} R^{-1} = \sum_{q'} T_{q'}^{(k)} R_{q'q}^{(k)}. \tag{122}$$

Данный закон совпадает с законом преобразования базисных векторов $|kq\rangle$ стандартного представления для $(2k+1)$-

[1]) Матрицы вращения, конечно, зависят от выбранного для этого тензора представления. В представлении, где его компоненты равны

$$\frac{1}{2}(V_1W_2 + V_2W_1), \quad \frac{1}{2}(V_2W_3 + V_3W_2), \quad \frac{1}{2}(V_3W_1 + V_1W_3),$$

$$V_1W_1 - V_2W_2, \quad 2V_3W_3 - V_1W_1 - V_2W_2,$$

они преобразуются друг через друга как линейно независимые полиномы xy, yz, zx, $x^2 - y^2$, $2z^2 - x^2 - y^2$.

[2]) Этот закон преобразования не совпадает с законом преобразования векторов пространства $\mathscr{E}_n$, разложенных по n векторам базиса. Точно так же закон преобразования (54) компонент векторного оператора $\boldsymbol{K}$ не совпадает с законом (43) преобразования компонент вектора $\boldsymbol{V}$ в том же базисе. Отметим, в частности, различие в формулах (122) и (121).

мерного пространства, неприводимого по отношению к вращениям

$$R\,|\,kq\rangle = \sum_{q'} |\,kq'\rangle\, R^{(k)}_{q'q}.$$

Если равенство (122) выполнено для бесконечно малых вращений, то оно будет выполнено и для всех остальных вращений. Для бесконечно малых вращений оператор R определяется формулой (55), матрицы $R^{(k)}$ легко получаются из определения (64), и закон (122) в этом случае эквивалентен следующим коммутационным соотношениям операторов $T^{(k)}_q$ с компонентами полного момента импульса:

$$[J_\pm,\ T^{(k)}_q] = \sqrt{k(k+1) - q(q\pm 1)}\, T^{(k)}_{q\pm 1}, \tag{123а}$$

$$[J_z,\ T^{(k)}_q] = qT^{(k)}_q. \tag{123б}$$

Соотношения (123), которые можно сравнить с (23)—(25), позволяют дать другое определение неприводимого тензорного оператора $T^{(k)}$ (полностью эквивалентное приведенному выше).

Если операторы $T^{(k)}_q$ соответствуют физическим величинам, то они инвариантны относительно поворота на 2π (ср. § 15) и, следовательно, k — *целое число*. В дальнейшем мы будем рассматривать только неприводимые тензорные операторы целого порядка.

Легко показать, что $(2k+1)$ операторов

$$S^{(k)}_q \equiv (-1)^q T^{(k)\dagger}_{-q}$$

удовлетворяют соотношениям (123) (задача 16), и, следовательно, являются стандартными компонентами неприводимого тензорного оператора $\boldsymbol{S}^{(k)}$ порядка k. По определению, операторы $\boldsymbol{S}^{(k)}$ и $\boldsymbol{T}^{(k)}$ *эрмитово сопряжены друг другу*

$$\boldsymbol{S}^{(k)} = \boldsymbol{T}^{(k)\dagger}$$

(поскольку k — целое, ясно, что операция эрмитова сопряжения обратима).

Скаляры являются неприводимыми тензорными операторами нулевого порядка. Векторные операторы — неприводимыми тензорными операторами порядка 1: если K_x, K_y, K_z — декартовы компоненты векторного оператора, то его стандартными компонентами будут

$$K^{(1)}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(K_x + iK_y), \quad K^{(1)}_0 = K_z, \quad K^{(1)}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_x - iK_y). \tag{124}$$

(Отметим, что фигурирующие здесь коэффициенты отличны от встречающихся в соотношениях (94).)

Сферические функции $Y_k^q(\theta, \varphi)$ $(q = -k, \ldots, +k)$, рассматриваемые как операторы, представляют собой стандартные компоненты неприводимого тензорного оператора $\mathbf{Y}^{(k)}$ порядка k.

§ 32. Представление неприводимых тензорных операторов. Теорема Вигнера — Эккарта

Наиболее важное свойство неприводимых тензорных операторов отражено в теореме Вигнера — Эккарта:

В стандартном представлении $\{J^2 J_z\}$, базисные векторы которого обозначим $|\tau JM\rangle$, матричный элемент $\langle \tau JM | T_q^{(k)} | \tau' J' M' \rangle$ q-й стандартной компоненты данного неприводимого тензорного оператора k-го порядка, $T^{(k)}$ равен произведению коэффициента Клебша — Гордана

$$\langle J' k M' q \,|\, JM \rangle$$

на величину, не зависящую от M, M' и q.

Таким образом, справедлива формула

$$\langle \tau JM | T_q^{(k)} | \tau' J' M' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \langle \tau J \| T^{(k)} \| \tau' J' \rangle \langle J' k M' q \,|\, JM \rangle, \quad (125)$$

где величина $\langle \tau J \| T^{(k)} \| \tau' J' \rangle$, которая называется *приведенным матричным элементом*, зависит от индексов τ, J и τ', J' и характеризует данный тензорный оператор (множитель $1/\sqrt{2J+1}$ введен для удобства).

Для доказательства теоремы рассмотрим $(2k+1)(2J'+1)$ векторов $T_q^{(k)} | \tau' J' M' \rangle$ $(q = -k, \ldots, +k;\ M' = -J', \ldots, +J')$. Образуем следующие линейные комбинации этих векторов:

$$| \sigma J'' M'' \rangle = \sum_{M' q} T_q^{(k)} | \tau' J' M' \rangle \langle J' k M' q \,|\, J'' M'' \rangle.$$

Используя соотношения ортогональности для коэффициентов К. — Г. (ур. (110б)), получаем

$$T_q^{(k)} | \tau' J' M' \rangle = \sum_{J'' M''} | \sigma J'' M'' \rangle \langle J' k M' q \,|\, J'' M'' \rangle. \quad (126)$$

Отметим, что векторы $T_q^{(k)} | \tau' J' M' \rangle$ могут и не быть линейно независимыми, поэтому некоторые из векторов $|\sigma J'' M''\rangle$ могут обратиться в нуль.

Из формул (123а) и (124) вытекает, что

$$J_+ T_q^{(k)} | \tau' J' M' \rangle = [J_+, T_q^{(k)}] | \tau' J' M' \rangle + T_q^{(k)} J_+ | \tau' J' M' \rangle =$$
$$= \sqrt{k(k+1) - q(q+1)}\, T_{q+1}^{(k)} | \tau' J' M' \rangle +$$
$$+ \sqrt{J'(J'+1) - M'(M+1)}\, T_q^{(k)} | \tau' J' M' + 1 \rangle,$$

и, следовательно,

$$J_+|\sigma J''M''\rangle =$$
$$= \sum_{M'q} T_q^{(k)}|\tau' J'M'\rangle \{\sqrt{k(k+1)-q(q-1)}\,\langle J'kM'q-1|J''M''\rangle +$$
$$+\sqrt{J'(J'+1)-M'(M'-1)}\,\langle J'kM'-1q|J''M''\rangle\}.$$

В силу рекуррентных соотношений (111) для коэффициентов К. — Г. выражение, стоящее в скобках, равно

$$\sqrt{J''(J''+1)-M''(M''+1)}\,\langle J'kM'q|J''M''+1\rangle,$$

и мы получаем в правой части вектор $|\sigma J''M''+1\rangle$ или, более точно,

$$J_+|\sigma J''M''\rangle = \sqrt{J''(J''+1)-M''(M''+1)}\,|\sigma J''M''+1\rangle.$$

Тем же методом можно показать, что

$$J_-|\sigma J''M''\rangle = \sqrt{J''(J''+1)-M''(M''-1)}\,|\sigma J''M-1\rangle$$
$$J_z|\sigma J''M''\rangle = M''\,|\sigma J''M''\rangle.$$

Из этих трех соотношений следует, что $(2J''+1)$ векторов $|\sigma J''M''\rangle$, соответствующих одному и тому же значению J'':

(i) либо все равны нулю;

(ii) либо являются (ненормированными) собственными векторами с моментом импульса $(J''M'')$ и получаются один из другого стандартным способом.

Следовательно, все скалярные произведения $\langle\tau JM|\sigma J''M''\rangle$ обращаются в нуль за исключением тех, для которых $J''=J$ и $M''=M$, т. е. $(2J+1)$ произведений $\langle\tau JM|\sigma JM\rangle$, причем они не зависят от M.

Отсюда следует приведенная выше теорема, поскольку матричный элемент $\langle\tau JM|T_q^{(k)}|\tau' J'M'\rangle$ с учетом (126) равен

$$\langle\tau JM|T_q^{(k)}|\tau' J'M'\rangle = \sum_{J''M''}\langle\tau JM|\sigma J''M''\rangle\langle J'kM'q|J''M''\rangle. \quad \blacksquare$$

Среди наиболее важных следствий теоремы Вигнера — Эккарта упомянем правила отбора для оператора $T_q^{(k)}$.

Для того, чтобы матричный элемент $\langle\tau JM|T_q^{(k)}|\tau' J'M'\rangle$ *был отличен от нуля, необходимо одновременное выполнение соотношений*:

$$q = M - M', \tag{127}$$
$$|J-J'| \leqslant k \leqslant J+J'. \tag{128}$$

Эти соотношения непосредственно следуют из того факта, что в правой части формулы (125) стоит коэффициент Клеб-

ша — Гордана. На практике чаще используется второе из этих соотношений. Оно обычно формулируется в виде следствия [1]).

Матричный элемент компоненты $A^{(k)}$ неприводимого тензорного оператора порядка k между двумя векторами с моментами J, J' обращается в нуль, если k не удовлетворяет неравенствам: $|J - J'| \leqslant k \leqslant J + J'$.

§ 33. Приложения

Теорема Вигнера — Эккарта имеет много приложений в атомной и ядерной физике, а именно: в теории β-распада, электромагнитного излучения и, вообще, в задачах об угловых корреляциях.

Рассмотрим, например, электромагнитное излучение атомного ядра (γ-излучение). Предположим, что при переходе из возбужденного состояния $\mathcal{N}^*$ в основное $\mathcal{N}$ ядро испустило γ-квант

$$\mathcal{N}^* \to \mathcal{N} + \gamma.$$

Пусть J и J' обозначают спины (т. е. полный момент импульса) ядер $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}^*$ соответственно. В теории γ-излучения известно, что *амплитуда* вероятности излучения γ-кванта поляризации ν в направлении $\Omega = (\theta, \varphi)$ пропорциональна матричному элементу

$$\langle \tau J M \,|\, H(\Omega, \nu) \,|\, \tau' J' M' \rangle$$

некоторого оператора $H(\Omega, \nu)$ между векторами начального и конечного состояний (см. § XXI. 31). Оператор $H(\Omega, \nu)$ можно разложить по сферическим функциям. Не вдаваясь в детали [2]) заметим только, что тогда он принимает вид суммы неприводимых тензорных операторов двух типов (противоположной четности): электрических и магнитных мультипольных моментов. Электрический 2^l-польный момент $\boldsymbol{Q}^{(l)}$ является неприводимым тензорным оператором порядка l и четности $(-1)^l$; магнитный 2^l-польный момент $\boldsymbol{M}^{(l)}$ — неприводимым тензорным оператором порядка l и четности $(-1)^{l+1}$. Среди мультипольных моментов наиболее известны следующие:

(i) магнитный момент (в обычном смысле этого слова), т. е. дипольный магнитный момент $\boldsymbol{M}^{(1)}$;

(ii) квадрупольный момент (в обычном смысле этого слова), т. е. электрический квадрупольный момент $\boldsymbol{Q}^{(2)}$.

---

[1]) Компонента $A^{(k)}$ не обязательно стандартная; любые линейные комбинации стандартных компонент обладают этим свойством.

[2]) См. *Дж. Блатт, В. Вайскопф.* Теоретическая ядерная физика. М., ИЛ, 1954 (гл. XII и Дополнение Б).

В соответствии с правилами отбора для тензорных операторов, ненулевые вклады дают только моменты с мультипольностью l в пределах

$$|J-J'|\leqslant l\leqslant J+J' \tag{129}$$

(существует также правило отбора по четности, которое мы здесь не рассматриваем). В силу теоремы Вигнера — Эккарта, вклады компонент $Q_m^{(l)}$ моментов, удовлетворяющих неравенствам (129), пропорциональны коэффициенту Клебша — Гордана $\langle J'lM'm|JM\rangle$; для их вычисления достаточно определить коэффициент пропорциональности, т. е. приведенный матричный элемент $\langle\tau J\|\boldsymbol{Q}^{(l)}\|\tau'J'\rangle$.

Итак, вероятность перехода полностью известна, как только определены приведенные матричные элементы мультипольных моментов, удовлетворяющих правилам отбора. На практике, разложение в ряд по мультиполям сходится быстро и основной вклад дают один или два мультиполя низшего порядка.

Четные мультипольные моменты ($\boldsymbol{M}^{(1)}$, $\boldsymbol{Q}^{(2)}$, ...) появляются также при вычислении сдвигов энергетических уровней атомов или ядер в статическом электромагнитном поле. Так, взаимодействие ядра с постоянным магнитным полем позволяет измерить его магнитный момент, а взаимодействие с неоднородным электрическим полем — его квадрупольный момент. Действительно, при измерении получают среднее значение этих операторов в рассматриваемом состоянии ядра, т. е. матричные элементы

$$\langle\tau JM|M_m^{(1)}|\tau JM'\rangle,\quad \langle\tau JM|Q_m^{(2)}|\tau JM'\rangle$$

или приведенные диагональные матричные элементы

$$\langle\tau J\|\boldsymbol{M}^{(1)}\|\tau J\rangle,\quad \langle\tau J\|\boldsymbol{Q}^{(2)}\|\tau J\rangle.$$

Отметим, что магнитный момент обращается в нуль при $J_l=0$, а квадрупольный момент — при $J=0$ или $^1/_2$. Вообще, 2^l-польный момент ядра со спином J равен нулю при $2J<l$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Исходя из соотношений (24) и (25) между векторами

$$|\tau j\mu\rangle\quad(\mu=-j,\ -j+1,\ \ldots,\ +j),$$

доказать соотношения (26) и (27).

2. Доказать, что в любом представлении, где J_x и J_z — вещественные (а значит и симметричные) матрицы, J_y будет чисто мнимой (а значит и антисимметричной) матрицей.

[*N. B.* Стандартное представление попадает в эту категорию.]

3. Доказать, что для коммутативности оператора со всеми компонентами момента импульса достаточно, чтобы он коммутировал с двумя его компонентами.

4. Пусть l — орбитальный момент частицы, θ и φ — полярные углы и P — «оператор четности». Оператор P соответствует отражению в начале координат, его действие на функцию $F(\theta, \varphi)$ определено равенством: $PF(\theta, \varphi) = F(\pi - \theta, \varphi + \pi)$. Показать, что $[P, l] = 0$. Вывести отсюда, что сферические функции обладают определенной зависящей от квантового числа l четностью, и найти ее.

5. Пусть r, r' — два вектора в обычном пространстве, $\Omega \equiv (\theta, \varphi)$ и $\Omega' \equiv (\theta', \varphi')$ — их полярные углы, l, l' — соответствующие операторы моментов импульса; пусть α $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$ — угол между векторами: $r \cdot r' = r \cdot r' \cos\alpha$. Полином Лежандра $P_l(\cos\alpha)$ является функцией полярных углов векторов r и r'. Показать, что он удовлетворяет уравнениям в частных производных

$$l^2 P_l(\cos\alpha) = l'^2 P_l(\cos\alpha) = l(l+1) P_l(\cos\alpha),$$

$$\left(l_i + l'_i\right) P_l(\cos\alpha) = 0 \qquad (i = x, y, z).$$

Вывести отсюда теорему сложения:

$$\frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\alpha) \equiv Y_l^0(\alpha) Y_l^0(0) = \sum_{m=-l}^{+l} (-1)^m Y_l^m(\Omega) Y_l^{-m}(\Omega').$$

6. Пусть u, v, w — три единичных вектора, образующих правую декартову систему. Показать, что бесконечно малое вращение

$$\hat{\mathcal{R}} \equiv \mathcal{R}_v^{-1}(\varepsilon)\, \mathcal{R}_u^{-1}(\varepsilon)\, \mathcal{R}_v(\varepsilon)\, \mathcal{R}_u(\varepsilon)$$

(обозначения раздела III) отличается от $\mathcal{R}_w(-\varepsilon^2)$ только членами порядка выше ε^2. Используя формулу (58), вычислить оператор бесконечно малого вращения $\hat{R}$ вплоть до членов порядка ε^2 и проверить соотношения коммутации $[J_u, J_v] = iJ_w$.

7. Используя коммутационные соотношения (56), показать, что скалярное произведение двух векторных операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{AB} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ коммутирует с компонентами полного момента импульса.

8. Показать, что

$$\exp(-i\beta J_y) = \exp\left(\frac{1}{2} i\pi J_x\right) \exp(-i\beta J_z) \exp\left(-\frac{1}{2} i\pi J_x\right).$$

Вывести отсюда, что матричные элементы $\langle JM|\exp(-i\beta J_y)|JM'\rangle$ являются полиномами степени $2J$ по переменным $\sin\frac{1}{2}\beta$ и $\cos\frac{1}{2}\beta$.

9. Доказать тождество $(\sigma A)(\sigma B) = (AB) + i\sigma(A \times B)$ $(\sigma \equiv (\sigma_x\sigma_y\sigma_z)$ — матрицы Паули, $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — векторные операторы, коммутирующие с σ, но не обязательно друг с другом).

10. Пусть s — внутренний момент частицы спина 1 $(s^2 = s(s+1) = 2)$.

(i) Показать, что для любой компоненты $s_u \equiv (su)$ имеем

$$s_u^3 = s_u, \quad \exp(-i\varphi s_u) = 1 - i\sin\varphi s_u - (1 - \cos\varphi) s_u^2,$$

и получить явное выражение для матрицы вращений $R^{(1)}(\alpha\beta\gamma)$.

(ii) Пусть $|z\rangle$ — нормированный вектор такой, что $s_z|z\rangle = 0$, а $|x\rangle$ и $|y\rangle$ — векторы, получающиеся из него вращением на $+{}^1/_2\pi$ вокруг Oy и на $-{}^1/_2\pi$ вокруг Ox соответственно. Доказать следующие соотношения и соотношения, получающиеся из них циклической перестановкой x, y и z:

$$s_x|x\rangle = 0, \quad s_x|y\rangle = i|z\rangle, \qquad s_x^2|y\rangle = |y\rangle,$$

$$s_x|z\rangle = -i|y\rangle, \quad s_x^2|z\rangle = |z\rangle.$$

Используя эти соотношения, показать, что $|x\rangle$, $|y\rangle$, $|z\rangle$ образуют ортонормированный базис, а матрицы, которые задают s_x, s_y и s_z в этом базисе, совпадают с приведенными в § 21.

(iii) Показать, что $\langle i|R(\alpha\beta\gamma)|j\rangle = \mathscr{R}_{ij}(\alpha\beta\gamma)$ ($i, j = x, y$ или z) (обозначения § 10 и § 14).

11. Пусть $\boldsymbol{S}$ — полный спин системы двух нуклонов. Показать, что оператор $Q \equiv (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{r})^2/r^2$ — проектор. Показать, что «тензорный» оператор $S_{12} \equiv 2[3Q - \boldsymbol{S}^2]$ удовлетворяет тождеству: $S_{12}^2 = 4\boldsymbol{S}^2 - 2S_{12}$, и возможные его собственные значения равны 0, 2 и —4. Определить действие операторов Q и S_{12} на введенные в § 28 функции от угловых переменных и спинов $\mathscr{Y}^M_{LSJ}$.

(Если принять сокращенные обозначения

$$\mathscr{Y}^{(0)} \equiv \mathscr{Y}^M_{J0J}, \quad \mathscr{Y}^{(1)}_0 \equiv \mathscr{Y}^M_{J1J}, \quad \mathscr{Y}^{(1)}_\pm \equiv \mathscr{Y}^M_{J\pm 1 1J},$$

то получим

$$Q\mathscr{Y}^{(0)} = 0, \qquad (2J+1)\,Q\mathscr{Y}^{(1)}_+ = J\mathscr{Y}^{(1)}_+ + \sqrt{J(J+1)}\,\mathscr{Y}^{(1)}_-,$$

$$Q\mathscr{Y}^{(1)}_0 = \mathscr{Y}^{(1)}_0, \quad (2J+1)\,Q\mathscr{Y}^{(1)}_- = \sqrt{J(J+1)}\,\mathscr{Y}^{(1)}_+ + (J+1)\,\mathscr{Y}^{(1)}_-.)$$

12. Рассмотрим частицу спина $1/2$. Показать, что в пространстве состояний с данным орбитальным моментом l операторы

$$\frac{l+1+\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2l+1} \quad \text{и} \quad \frac{l-\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2l+1}$$

являются проекторами на состояния с полным моментом импульса $j = l + \frac{1}{2}$ и $j = l - \frac{1}{2}$ соответственно.

13. Сложим два равных момента $j_1 = j_2 = j$. Не используя свойств симметрии коэффициентов К. — Г., показать, что при перестановке m_1 и m_2 собственные функции полного момента симметричны (инвариантны) или антисимметричны (умножаются на —1), и характер симметрии зависит только от J. Показать, что они симметричны или антисимметричны в зависимости от того $(-1)^{2j+J}$ равно $+1$ или -1.

14. Обозначим через $\boldsymbol{J}^2\{A\}$ следующую функцию оператора A и компонент момента импульса:

$$\boldsymbol{J}^2\{A\} \equiv [J_x, [J_x, A]] + [J_y, [J_y, A]] + [J_z, [J_z, A]].$$

Показать, что если $\boldsymbol{T}^{(k)}$ — неприводимый тензорный оператор k-го порядка, то его компоненты удовлетворяют соотношению

$$\boldsymbol{J}^2\{T^{(k)}_q\} = k(k+1)\,T^{(k)}_q.$$

15. Пусть a_r, $a_r^\dagger$ ($r = 1, 2$) — операторы рождения и уничтожения двумерного изотропного гармонического осциллятора:

$$[a_r, a_s] = [a_r^\dagger, a_s^\dagger] = 0, \quad [a_r, a_s^\dagger] = \delta_{rs}.$$

Обозначим

$$S = \frac{1}{2}[a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2],$$

$$J_1 = \frac{1}{2}[a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2], \quad J_2 = \frac{1}{2}i[a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2], \quad J_3 = \frac{1}{2}[a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2].$$

Тогда J_1, J_2, J_3 можно рассматривать как декартовы координаты некоторого векторного оператора $\boldsymbol{J}$ [*N. B.* в обозначениях § XII. 14, $L = 2J_2$].

(i) Показать, что компоненты $\boldsymbol{J}$ удовлетворяют соотношениям коммутации $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{J} = i\boldsymbol{J}$, характеризующим момент импульса, и справедливо равенство

$$\boldsymbol{J}^2 = S(S+1) \quad \text{(следовательно, } [S, \boldsymbol{J}] = 0\text{)}.$$

(ii) Будем рассматривать $\boldsymbol{J}$ как оператор момента импульса системы и обозначим $j(j+1)$ и m — собственные значения $\boldsymbol{J}^2$ и J_3 соответственно. Показать, что $\boldsymbol{J}^2$ и J_3 образуют полный набор коммутирующих наблюдаемых, а j может принимать все целые и полуцелые значения $\geqslant 0$. т. е.

$$j = 0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \ldots, \infty.$$

Показать, что векторы $[(j+m)!\,(j-m)!]^{-\frac{1}{2}} a_1^{\dagger j+m} a_2^{\dagger j-m} |0\rangle$ образуют базис стандартного представления $\{\boldsymbol{J}^2 J_3\}$.

(iii) Показать, что $a_1^\dagger$ и $a_2^\dagger$ являются соответственно $+1/2$ и $-1/2$ компонентами неприводимого тензорного оператора порядка $1/2$ и, как следствие, выражения $Ra_r^\dagger R^{-1}$ $(r = 1, 2)$, где R означает оператор вращения

$$R = \exp(-i\alpha J_3) \exp(-i\beta J_2) \exp(-i\gamma J_3),$$

являются линейными комбинациями $a_1^\dagger$ и $a_2^\dagger$. Определить коэффициенты в этих выражениях.

(iv) Используя предыдущие результаты, доказать формулу Вигнера (B. 72) и основные свойства матриц $R^{(j)}$, приведенные в Дополнении B (за исключением формул композиции и приведения).

16. Показать, что если $(2k+1)$ операторов $T_q^{(k)}$ $(q = -k, \ldots, +k)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (123), то и $(2k+1)$ операторов $S_q^{(k)} \equiv (-1)^q T_{-q}^{(k)\dagger}$ обладают тем же свойством.

17. Показать, что интеграл

$$\int Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi)\, Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi)\, Y_{l_3}^{m_3}(\theta, \varphi)\, d\Omega$$

пропорционален $(-1)^{m_3} \langle l_1 l_2 m_1 m_2 | l_3 - m_3 \rangle$, а коэффициент пропорциональности не зависит от m_1, m_2 и m_3. Определить этот коэффициент. (Использовать теорему сложения, доказанную в задаче 5.)

18. Показать, что «тензорный» оператор

$$S_{12} \equiv 2\left[3\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{r})^2}{r^2} - \boldsymbol{S}^2\right],$$

рассматриваемый как функция $\boldsymbol{r}$, зависит только от углов θ и φ, и эта зависимость выражается *сферическими функциями порядка* 2. (Получаем:

$$S_{12} = \left(\frac{24\pi}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ S_-^2 Y_2^2 - (S_- S_z + S_z S_-) Y_2^1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\left(3S_z^2 - \boldsymbol{S}^2\right) Y_2^0 + \right.$$

$$\left. + (S_+ S_z + S_z S_+) Y_2^{-1} + S_+^2 Y_2^{-2} \right\} =$$

$$= \left(\frac{24\pi}{5}\right)^{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{S}^{(2)} \cdot \boldsymbol{Y}^{(2)}).$$

Оператор S_{12} является скалярным произведением (в смысле определения (B.87)) неприводимых тензорных операторов порядка 2, $\boldsymbol{S}^{(2)}$ и $\boldsymbol{Y}^{(2)}$, которые зависят от спина и угловых переменных соответственно).

19. Пусть K_u будет компонентой векторного оператора $\boldsymbol{K}$ в данном направлении, J_u — компонентой полного углового момента $\boldsymbol{J}$ в том же направлении, а $|\tau Ja\rangle$, $|\tau Jb\rangle$ — два кет-вектора, принадлежащие одному и тому же подпространству $\mathscr{E}(\tau J)$ (определения § 16). Показать, что:

$$\langle \tau Ja \,|\, K_u \,|\, \tau Jb\rangle = \langle \tau Ja \,|\, J_u \,|\, \tau Jb\rangle \frac{\langle \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{K}\rangle}{J(J+1)},$$

где $\langle \boldsymbol{JK}\rangle$ означает среднее значение скалярного оператора $\boldsymbol{JK}$ в этом подпространстве

$$\langle \boldsymbol{JK}\rangle = \langle \tau Ja \,|\, \boldsymbol{JK} \,|\, \tau Ja\rangle$$

(Другими словами, элементы матрицы $\boldsymbol{K}$ в $\mathscr{E}(\tau J)$ совпадают с матричными элементами ее «проекции» $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{JK})/J(J+1)$.)