ГЛАВА XIV

СИСТЕМЫ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ. ПРИНЦИП ЗАПРЕТА ПАУЛИ

§ 1. Тождественные частицы в квантовой теории

Две частицы называются тождественными, если все физические свойства этих частиц в точности совпадают, что исключает возможность экспериментально различать их. В классической механике это свойство *неразличимости тождественных частиц* играет второстепенную роль, тогда как в квантовой механике с ним связаны серьезные проблемы.

Рассмотрим в качестве примера столкновение двух тождественных частиц и выясним, в какой степени тождественность этих частиц влияет на результаты теории.

Если система подчиняется законам классической механики, то ее динамическое состояние определено в любой момент времени заданием величин: $\xi^{(1)} \equiv (\boldsymbol{r}^{(1)}, \boldsymbol{p}^{(1)})$ — координата и импульс частицы 1 и $\xi^{(2)} \equiv (\boldsymbol{r}^{(2)}, \boldsymbol{p}^{(2)})$ — координата и импульс частицы 2. Эволюция системы определяется функцией Гамильтона, зависящей от 12 переменных

$$H(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) \equiv H(\boldsymbol{r}^{(1)}, \boldsymbol{p}^{(1)}, \boldsymbol{r}^{(2)}, \boldsymbol{p}^{(2)}).$$

Если задан потенциал $V(r)$, зависящий только от расстояния между двумя рассматриваемыми частицами, и если m — масса этих частиц, то

$$H(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) = \frac{\boldsymbol{p}^{(1)\,2}}{2m} + \frac{\boldsymbol{p}^{(2)\,2}}{2m} + V(|\boldsymbol{r}^{(1)} - \boldsymbol{r}^{(2)}|). \tag{1}$$

Поскольку частицы тождественны, то их перестановка, т. е. приписывание динамического состояния частицы 1 частице 2 и *vice versa*, не должна влиять на динамические свойства системы. В частности, функция H инвариантна относительно такой перестановки:

$$H(\xi', \xi'') = H(\xi'', \xi'). \tag{2}$$

С другой стороны, состояние системы в любой момент времени можно определить лишь с точностью до перестановки индексов 1 и 2. Наблюдение системы в заданный момент времени показывает, что одна из частиц находится в некотором состоя-

нии ξ', а другая — в состоянии ξ'', однако при этом нельзя определить, в каком именно состоянии находится каждая из рассматриваемых частиц. На первый взгляд может показаться, что это обстоятельство вызывает затруднение, однако, как мы увидим ниже, это затруднение — кажущееся. Предположим, что в момент времени t_0 одна из частиц находится в состоянии ξ_0' а другая — в состоянии ξ_0''. Имеются две возможности: в состоянии 1 находится либо частица 1, либо частица 2. Однако оба варианта соответствуют одной и той же физической ситуации, ибо поскольку H обладает свойством симметрии (2), законы движения $\xi'(t)$ и $\xi''(t)$ частиц, находящихся в момент времени t_0 в состояниях ξ_0' и ξ_0'', одинаковы в обоих случаях, что соответствует одной и той же ситуации. Нужно только прийти к соглашению о том, следует ли частицу, которая в начальный момент времени находится в состоянии ξ_0', назвать частицей 1, а частицу, находящуюся первоначально в состоянии ξ_0'', — частицей 2, или же поменять нумерацию этих частиц.

Ситуация становится сложнее, если двухчастичная система подчиняется законам квантовой механики. Начало предыдущего анализа можно дословно повторить. В этом случае снова тождественность двух частиц выражается в инвариантности гамильтониана относительно перестановки динамических переменных частиц (ур. (2)) или, говоря точнее, в инвариантности относительно указанной перестановки всех физически наблюдаемых величин. Как и в классической механике, это вызывает произвол в определении состояния системы, однако теперь этот произвол более существен, а его следствия — более серьезны.

Предположим, что из наблюдения, осуществленного над системой до столкновения, следует, что одна из частиц находится в состоянии $\psi_0'(r)$, а другая — в $\psi_0''(r)$ [1]). На практике, эти функции представляют волновые пакеты, локализованные в различных областях пространства, так что функции

$$\psi_0(\boldsymbol{r}^{(1)}, \boldsymbol{r}^{(2)}) \equiv \psi_0'(\boldsymbol{r}^{(1)})\,\psi_0''(\boldsymbol{r}^{(2)}),$$
$$\bar{\psi}_0(\boldsymbol{r}^{(1)}, \boldsymbol{r}^{(2)}) \equiv \psi_0''(\boldsymbol{r}^{(1)})\,\psi_0'(\boldsymbol{r}^{(2)}) \tag{3}$$

линейно независимы. Начальное наблюдение не позволяет решить вопрос о том, находится ли система в состоянии ψ_0 или в $\bar{\psi}_0$. Более точно, наблюдение состоит в одновременном измерении определенного набора совместных переменных, а обе функции, ψ_0 и $\bar{\psi}_0$, являются собственными функциями, отвечающими одному и тому же набору собственных значений, полученных в результате измерения. Поскольку любая линейная

[1]) Будем предполагать, что рассматриваемые частицы не обладают спином, подчеркивая тем самым параллель между классической и квантовой теориями.

комбинация $\lambda\psi_0 + \mu\bar{\psi}_0$ этих функций также обладает указанным свойством, то рассматриваемое наблюдение не позволяет определить, какая из линейных комбинаций соответствует исходному состоянию системы. В такой ситуации говорят о наличии *обменного вырождения*.

Исследуем теперь развитие системы во времени. Пусть $\psi(\boldsymbol{r}^{(1)}, \boldsymbol{r}^{(2)}, t)$ и $\bar{\psi}(\boldsymbol{r}^{(1)}, \boldsymbol{r}^{(2)}, t)$ — решения уравнения Шредингера, отвечающие соответственно начальным условиям ψ_0 и $\bar{\psi}_0$. Из свойства симметрии (2) гамильтониана следует, что эти решения получаются одно из другого перестановкой аргументов $\boldsymbol{r}^{(1)}$ и $\boldsymbol{r}^{(2)}$. Удобно ввести функции симметричные и антисимметричные относительно такой перестановки

$$\psi^{(S)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \bar{\psi}), \quad \psi^{(A)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \bar{\psi}).$$

Они являются решениями уравнения Шредингера, соответствующими начальным данным

$$\psi_0^{(S)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0 + \bar{\psi}_0), \quad \psi_0^{(A)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0 - \bar{\psi}_0).$$

Если система в начальный момент времени находится в состоянии

$$\Psi_0 = \alpha\psi_0^{(A)} + \beta\psi_0^{(S)} \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1),$$

то в момент времени t она будет находиться в состоянии

$$\Psi(\boldsymbol{r}^{(1)}, \boldsymbol{r}^{(2)}, t) = \alpha\psi^{(A)} + \beta\psi^{(S)}. \tag{4}$$

Плотность $P(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'')$ вероятности обнаружить одну из частиц в точке $\boldsymbol{r}'$, а другую — в $\boldsymbol{r}''$ определяется равенством [1])

$$P(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'') = |\Psi(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'')|^2 + |\Psi(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}')|^2 = \tag{5}$$

$$= 2[|\alpha|^2 |\psi^{(A)}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'')|^2 + |\beta|^2 |\psi^{(S)}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'')|^2]. \tag{6}$$

Для того чтобы это выражение не зависело от α и β, следует потребовать, чтобы выполнялось равенство

$$|\psi^{(A)}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'')| = |\psi^{(S)}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'')|.$$

Это равенство справедливо при всех $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ до тех пор, пока частицы не взаимодействуют, а описывающие их волновые пакеты $\psi'(\boldsymbol{r})$ и $\psi''(\boldsymbol{r})$ не перекрываются, и, вообще говоря, перестает быть справедливым, когда одно из этих условий не выполняется. В этом несложно убедиться, рассмотрев несколько конкретных ситуаций. Предположим, например, что две рассматриваемые частицы не взаимодействуют ($V(|\boldsymbol{r}^{(1)} - \boldsymbol{r}^{(2)}|) = 0$) и свободно

---

[1]) Во втором равенстве учтено свойство симметрии функций $\psi^{(A)}$ и $\psi^{(S)}$: $\Psi(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}') = -\alpha\psi^{(A)}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'') + \beta\psi^{(S)}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'')$.

перемещаются навстречу друг другу. В этом случае ψ является произведением двух свободных волновых пакетов $\psi = \psi'(\boldsymbol{r}^{(1)}, t)\psi''(\boldsymbol{r}^{(2)}, t)$. В течение некоторого промежутка времени волновые пакеты будут перекрываться, т. е. существует область пространства, в которой обе функции $\psi'(\boldsymbol{r})$ и $\psi''(\boldsymbol{r})$ отличны от нуля. Если $\boldsymbol{r}$ — точка из этой области, то

$$|\psi^{(S)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r})| = \sqrt{2}\,|\psi'(\boldsymbol{r})\psi''(\boldsymbol{r})| \neq 0,$$

тогда как

$$|\psi^{(A)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r})| = 0 \tag{7}$$

при всех $\boldsymbol{r}$. Другой интересный пример дает задача рассеяния на центральном потенциале. Она будет рассмотрена в § 9, где мы покажем, что амплитуда рассеяния для $\psi^{(A)}$ является суперпозицией сферических парциальных волн нечетного порядка, а для $\psi^{(S)}$ — суперпозицией волн четного порядка. В общем случае эти амплитуды различаются по абсолютной величине и, следовательно, дифференциальное сечение рассеяния будет существенно зависеть от отношения $|\alpha|^2/|\beta|^2$.

Итак, существование обменного вырождения служит источником серьезных затруднений ибо препятствует получению точных теоретических предсказаний о статистическом распределении результатов измерений, осуществляемых над системой после столкновения.

Эта трудность может быть преодолена введением следующего *постулата симметризации*, фиксирующего коэффициенты α и β в линейной комбинации (3) и, таким образом, легко допускающего экспериментальную проверку.

Динамические состояния системы двух тождественных частиц либо все симметричны ($\alpha = 0$, $\beta = 1$), *либо все антисимметричны* ($\alpha = 1$, $\beta = 0$) *относительно перестановки двух частиц.*

Какая из двух указанных возможностей реализуется в действительности, зависит от физических свойств рассматриваемых частиц. Этот постулат несложно распространить на системы, содержащие любое число тождественных частиц. В общем виде он будет приведен в разделе I настоящей главы, где будут проанализированы также основные следствия этого постулата. Раздел II посвящен приложениям.

При изложении будут использоваться некоторые элементарные свойства перестановок. Все они приведены в § 14 Дополнения Г[1]).

---

[1]) Элементы теории групп, собранные в Дополнении Г, не являются необходимыми для понимания материала настоящей главы. Содержание § 14 этого Дополнения не зависимо от его остальных частей. В § 14 используются лишь несколько определений, относящихся к теории групп (группа, класс, инвариантная подгруппа и т. п.), которые приведены в § 2 Дополнения Г.