Раздел I. **ПОСТУЛАТ СИММЕТРИЗАЦИИ**

§ 2. Подобные частицы и симметрическое представление

Рассмотрим N-частичную систему. Динамические переменные, описывающие i-ю частицу, являются функциями от ее координаты $\boldsymbol{r}^{(i)}$, импульса $\boldsymbol{p}^{(i)}$ и спина $\boldsymbol{s}^{(i)}$. Эти три вектора в дальнейшем будем обозначать одним символом $\xi^{(i)}$. Зная значение спина i-й частицы, мы можем построить пространство $\mathscr{F}^{(i)}$ ее динамических состояний. Пространство $\mathscr{E}$ динамических состояний всей системы является тензорным произведением

$$\mathscr{E} = \mathscr{F}^{(1)} \otimes \mathscr{F}^{(2)} \otimes \ldots \otimes \mathscr{F}^{(N)}. \tag{8}$$

По определению, две частицы называются *подобными*, если они имеют один и тот же спин (подобные частицы не обязаны быть тождественными). В этом случае наблюдаемые и векторы состояния одной из частиц находятся во взаимно однозначном соответствии с наблюдаемыми и векторами состояния другой частицы и, следовательно, имеется возможность заменить частицу подобной ей. В общем случае, если имеется n подобных частиц, то существует $n!$ перестановок этих частиц. Каждой перестановке соответствует некоторый оператор в пространстве $\mathscr{E}$. Перейдем теперь к построению этих операторов перестановок. Для простоты будем считать, что $n = N$.

Рассмотрим одну из N подобных частиц. Пусть ξ — множество основных наблюдаемых этой частицы, а $\mathscr{F}$ — пространство ее векторов состояния. Пусть q — полный набор коммутирующих наблюдаемых в $\mathscr{F}$, а $|q_\varkappa\rangle$ — базис собственных векторов набора q, с собственными значениями $q_\varkappa$ (индекс или ряд индексов $\varkappa$ служат для нумерации собственных значений этого набора наблюдаемых). Тогда

$$\langle q_\varkappa | q_\mu \rangle = \delta_{\varkappa\mu}. \tag{9}$$

В качестве q можно, например, выбрать три компоненты x, y, z вектора $\boldsymbol{r}$ и компоненту s_z спина по оси z. Каждая частица a ($a = 1, 2, \ldots, N$) нашей системы имеет собственный набор $q^{(a)}$ коммутирующих наблюдаемых. Ясно, что множество $Q \equiv (q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(N)})$ является полным набором коммутирующих наблюдаемых в пространстве $\mathscr{E}$. Векторы

$$|q_\alpha q_\beta^{(2)} \ldots q_\nu^{(N)}\rangle \equiv |q_\alpha\rangle^{(1)} |q_\beta\rangle^{(2)} \ldots |q_\nu\rangle^{(N)}, \tag{10}$$

полученные как тензорные произведения базисных векторов пространств $\mathscr{F}^{(1)}, \mathscr{F}^{(2)}, \ldots, \mathscr{F}^{(N)}$, образуют базис некоторой реализации векторов и операторов в $\mathscr{E}$, т. е. $\{Q\}$-представление. Мы будем называть *представление* такого типа *симметрическим*.

§ 3. Операторы перестановки

Очевидно, что в состоянии, описываемом вектором (10), частица 1 находится в состоянии $|q_\alpha\rangle$, частица 2 — в состоянии $|q_\beta\rangle$, ..., частица N — в состоянии $|q_\nu\rangle$. Перестановка частиц изменяет их распределение по состояниям $|q_\alpha\rangle$, $|q_\beta\rangle$, ..., $|q_\nu\rangle$ и, следовательно, вектор (10) переходит в новый, вообще говоря [1]), отличный от исходного, базисный вектор $\{Q\}$-представления. Таким образом, операция перестановки устанавливает взаимнооднозначное соответствие между векторами рассматриваемого ортонормированного базиса и, следовательно, определяет некоторый линейный унитарный оператор в пространстве векторов состояния. Указанная процедура сопоставляет каждой перестановке N частиц *оператор перестановки* P, удовлетворяющий условию унитарности

$$PP^\dagger = P^\dagger P = 1. \tag{11}$$

Так, при транспозиции (1 2) — перестановке частиц 1 и 2 — вектор (10) преобразуется в вектор, описывающий состояние, в котором частица 1 находится в состоянии $|q_\beta\rangle$, частица 2 — в $|q_\alpha\rangle$, тогда как каждая из остальных частиц находится в исходном состоянии. Соответствующий оператор перестановки $P_{(12)}$ определяется соотношением

$$P_{(12)}\,|q_\alpha^{(1)}q_\beta^{(2)}q_\gamma^{(3)}\ldots q_\nu^{(N)}\rangle = |q_\beta^{(1)}q_\alpha^{(2)}q_\gamma^{(3)}\ldots q_\nu^{(N)}\rangle.$$

Для упрощения обозначений, мы продолжим изучение перестановок в случае $N=3$. Устанавливаемые принципы будут, конечно, справедливы и для любого значения N. В качестве примера определим оператор $P_{(123)}$, соответствующий перестановке (1 2 3), при которой 1 переходит в 3; 2 — в 1; 3 — в 2:

$$P_{(123)}\,|q_\alpha^{(1)}q_\beta^{(2)}q_\gamma^{(3)}\rangle = |q_\gamma^{(1)}q_\alpha^{(2)}q_\beta^{(3)}\rangle. \tag{12}$$

Если $|\psi\rangle$ — вектор из $\mathscr{E}$, то

$$P_{(123)}\,|\psi\rangle = \sum_{\alpha\beta\gamma} P_{(123)}\,|q_\alpha^{(1)}q_\beta^{(2)}q_\gamma^{(3)}\rangle\langle q_\alpha^{(1)}q_\beta^{(2)}q_\gamma^{(3)}|\psi\rangle =$$
$$= \sum_{\alpha\beta\gamma} |q_\gamma^{(1)}q_\alpha^{(2)}q_\beta^{(3)}\rangle\langle q_\alpha^{(1)}q_\beta^{(2)}q_\gamma^{(3)}|\psi\rangle.$$

Переобозначив индексы суммирования в последней строчке, получаем

$$P_{(123)}\,|\psi\rangle = \sum_{\alpha\beta\gamma} |q_\alpha^{(1)}q_\beta^{(2)}q_\gamma^{(3)}\rangle\langle q_\beta^{(1)}q_\gamma^{(2)}q_\alpha^{(3)}|\psi\rangle. \tag{13}$$

---

[1]) В случае, когда среди N одночастичных состояний $|q_\alpha\rangle$, ..., $|q_\nu\rangle$ имеются одинаковые, некоторые из перестановок оставляют вектор (10) неизменным, если же все состояния совпадают, то ни одна из перестановок не изменяет вектора (10).

Если $\psi(q_\alpha q_\beta q_\gamma)$ — волновая функция состояния $|\psi\rangle$ в $\{Q\}$-представлении (т. е. $\psi(q_\alpha q_\beta q_\gamma)$ — амплитуда вероятности обнаружить частицу 1 в состоянии $|q_\alpha\rangle$, частицу 2 — в $|q_\beta\rangle$, частицу 3 — в $|q_\gamma\rangle$), то волновой функцией для $P_{(123)}|\psi\rangle$ является функция

$$P_{(123)}\psi(q_\alpha q_\beta q_\gamma) = \psi(q_\beta q_\gamma q_\alpha), \tag{14}$$

которая получена *действием на аргументы функции* $\psi(q_\alpha q_\beta q_\gamma)$ *перестановки обратной перестановке* (1 2 3).

Закон преобразования векторов при перестановке принимает особенно простую форму на векторах вида

$$|u^{(1)}v^{(2)}w^{(3)}\rangle \equiv |u\rangle^{(1)}|v\rangle^{(2)}|w\rangle^{(3)},$$

на которых он совпадает с законом преобразования базисных векторов $\{Q\}$-представления. Действие P на вектор такого вида дает вектор, который получается при перестановке p частиц 1, 2, 3, находящихся в одночастичных состояниях $|u\rangle$, $|v\rangle$, $|w\rangle$, т. е. (уравнение (12))

$$P_{(123)}|u^{(1)}v^{(2)}w^{(3)}\rangle = |w^{(1)}u^{(2)}v^{(3)}\rangle.$$

Доказательство несложно. Уравнение (13) в данном случае имеет вид

$$P_{(123)}|u^{(1)}v^{(2)}w^{(3)}\rangle = \sum_{\alpha\beta\gamma}|q_\alpha^{(1)}q_\beta^{(2)}q_\gamma^{(3)}\rangle\langle q_\alpha|w\rangle\langle q_\beta|u\rangle\langle q_\gamma|v\rangle,$$

где правая часть есть не что иное как разложение $|w^{(1)}u^{(2)}v^{(3)}\rangle$ по базисным векторам $\{Q\}$-представления.

Это свойство, доказанное только что для частного случая, имеет общий характер (задача 1). Из него следует, что оператор P, соответствующий заданной перестановке, не зависит от конкретного симметрического представления, выбранного для определения этого оператора.

Действие оператора P на вектор порождает вектор, который получается из исходного перестановкой p. Точно так же преобразование оператора $F(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(N)})$ в пространстве $\mathscr{E}$ под действием унитарного оператора P задает оператор, получающийся из данного применением перестановки p к аргументам оператора F. Если

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & N \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_N \end{pmatrix},$$

то

$$PF(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(N)})P^\dagger = F(\xi^{(\alpha_1)}, \xi^{(\alpha_2)}, \ldots, \xi^{(\alpha_N)}). \tag{15}$$

В частности

$$P_{(123)}F\left(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}\right)P^{\dagger}_{(123)} = F\left(\xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \xi^{(1)}\right) \tag{16}$$

($\xi^{(2)}$ переходит в $\xi^{(1)}$; $\xi^{(3)}$ — в $\xi^{(2)}$; $\xi^{(1)}$ — в $\xi^{(3)}$).

Для доказательства достаточно показать, что этот закон выполняется в случае, когда F — любая из основных наблюдаемых системы. Рассмотрим одну из них. Всегда можно построить симметрическое представление, в котором наблюдаемая диагональна. Предположим для примера, что выбрана одна из рассмотренных выше наблюдаемых $q^{(i)}$ $\{Q\}$-представления. Для того чтобы показать, что $Pq^{(i)}P^{\dagger} = q^{(\alpha_i)}$, достаточно показать, что выражения, стоящие в обеих частях этого равенства, одинаково действуют на любой из базисных векторов $\{Q\}$-представления. Доказательство несложно, и мы ограничимся проверкой этого утверждения в специальном случае $N = 3$, $i = 1$, $p = (1\,2\,3)$

$$P_{(123)}q^{(1)}P^{\dagger}_{(123)}\left|q^{(1)}_{\alpha}q^{(2)}_{\beta}q^{(3)}_{\gamma}\right\rangle = P_{(123)}q^{(1)}\left|q^{(1)}_{\beta}q^{(2)}_{\gamma}q^{(3)}_{\alpha}\right\rangle = q_{\beta}P_{(123)}\left|q^{(1)}_{\beta}q^{(2)}_{\gamma}q^{(3)}_{\alpha}\right\rangle =$$
$$= q_{\beta}\left|q^{(1)}_{\alpha}q^{(2)}_{\beta}q^{(3)}_{\gamma}\right\rangle = q^{(2)}\left|q^{(1)}_{\alpha}q^{(2)}_{\beta}q^{(3)}_{\gamma}\right\rangle.$$

В применении к наблюдаемым приведенное определение перестановок согласуется с интуитивным: наблюдаемая $PBP^{\dagger}$, полученная в результате применения перестановки p к наблюдаемой B, имеет тот же спектр собственных значений, что и B, а собственные векторы наблюдаемой $PBP^{\dagger}$ получаются действием оператора перестановки P на собственные векторы наблюдаемой B, соответствующие тому же собственному значению.

В частности наблюдаемая B инвариантна относительно перестановки N частиц, если $PBP^{\dagger} = B$ для каждой из $N!$ перестановок этих частиц, т. е. если

$$[P, B] = 0$$

для любого P. В этом случае говорят, что наблюдаемая B *симметрична* относительно перестановки N частиц.

§ 4. Алгебра операторов перестановки. Симметризаторы и антисимметризаторы

Последовательное действие двух перестановок p', p'' эквивалентно действию одной перестановки $p = p''p'$. Из определения оператора перестановки очевидно, что то же соотношение справедливо и для соответствующих операторов P, P', P''

$$P = P''P'. \tag{17}$$

Таким образом, операторы перестановок удовлетворяют тем же алгебраическим соотношениям, что и определяющие их перестановки [1]).

В частности, любой оператор P можно записать в виде произведения транспозиций. В общем случае такая факторизация не единственна. Однако все такие представления состоят либо из четного, либо из нечетного числа транспозиций. Четность перестановки обозначается $(-1)^p$ и равна $+$ или $-$ в соответствии с четностью или нечетностью числа транспозиций, образующих перестановку. Если P, P' и P'' связаны соотношением (17), то очевидно имеем: $(-1)^p = (-1)^{p'+p''}$.

Некоторые перестановки, в частности транспозиции, совпадают со своими обратными. В таких случаях (см. ур. (11)) соответствующий оператор является наблюдаемой, возможные собственные значения которой равны ± 1.

В качестве примера рассмотрим транспозицию (ij):

$$P^2_{(ij)} = 1. \tag{18}$$

Собственные векторы с собственным значением $+1$ инвариантны при транспозиции (ij). Они, по определению, являются *симметричными* по i и j. Проектор на подпространство векторов, симметричных по i и j, есть *оператор симметризации*

$$S_{[ij]} = \frac{1}{2}(1 + P_{(ij)}). \tag{19}$$

Собственные векторы с собственным значением -1 изменяют знак при транспозиции (ij). Эти векторы, по определению, антисимметричны по i и j. Проектором на подпространство векторов, антисимметричных по i и j, является *оператор антисимметризации*

$$A_{[ij]} = \frac{1}{2}(1 - P_{(ij)}). \tag{20}$$

---

[1]) В частности, $P_{(123)} = P_{(12)}P_{(23)}$. Проверим, что последовательное действие $P_{(23)}$ и $P_{(12)}$ на волновую функцию $\psi(q_\alpha q_\beta q_\gamma)$ снова дает результат (14). Обозначим

$$\psi_1(q_\alpha q_\beta q_\gamma) \equiv P_{(23)}\psi(q_\alpha q_\beta q_\gamma).$$

Тогда

$$\psi_1(q_\alpha q_\beta q_\gamma) = \psi(q_\alpha q_\gamma q_\beta)$$

и

$$P_{(123)}\psi(q_\alpha q_\beta q_\gamma) = P_{(12)}\psi_1(q_\alpha q_\beta q_\gamma) = \psi_1(q_\beta q_\alpha q_\gamma) = \psi(q_\beta q_\gamma q_\alpha).$$

Тот же результат будет получен и в том случае, когда на аргументы функции $\psi(q_\alpha q_\beta q_\gamma)$ действует сперва перестановка (1 2), а затем перестановка (2 3).

Очевидно, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} S_{[ij]} + A_{[ij]} &= 1, & P_{(ij)}S_{[ij]} &= S_{[ij]}P_{(ij)} = S_{[ij]}, \\ S_{[ij]} - A_{[ij]} &= P_{(ij)}, & P_{(ij)}A_{[ij]} &= A_{[ij]}P_{(ij)} = -A_{[ij]}. \end{aligned} \tag{21}$$

Каждый вектор является суммой вектора, антисимметричного по i и j, и вектора, симметричного по i и j. Разложения такого типа использовались при обсуждении рассеяния двух тождественных частиц в § 1.

Расширим понятия симметрии и антисимметрии динамических состояний, которое было определено выше лишь для перестановок $P_{(ij)}$, на общий случай $N!$ перестановок P.

Выберем вектор $|u\rangle$ в $\mathscr{E}$ и обозначим $\mathscr{E}_u$ — подпространство, натянутое на вектор $|u\rangle$ и на все векторы, которые могут быть получены из него перестановками. Размерность подпространства $\mathscr{E}_u$ равна $N!$, если $N!$ векторов $P|u\rangle$ линейно независимы и меньше $N!$, если эти векторы линейно зависимы.

Экстремальным случаем будет ситуация, когда все $P|u\rangle$ представляют одно и то же состояние

$$P|u\rangle = c_p|u\rangle \tag{22}$$

для любой перестановки p. Ниже будут приведены условия, ограничивающие произвол в выборе постоянных c_p. Если P — транспозиция, то, как мы знаем, c_p может принимать только значения ± 1. Далее, поскольку любая транспозиция (ij) равна произведению $(1i)(2j)(1\,2)(2j)(1i)$, то

$$P_{(ij)} = P_{(1i)}P_{(2j)}P_{(12)}P_{(2j)}P_{(1i)}$$

или

$$c_{(ij)} = c^2_{(1i)}c^2_{(2j)}c_{(12)} = c_{(12)}. \tag{23}$$

Следовательно, постоянная c совпадает для всех транспозиций: либо $c_{\text{tr}} = +1$, либо $c_{\text{tr}} = -1$, и так как всякая перестановка является произведением транспозиций, то соответствующая постоянная c_p имеет вид степени c_{tr} либо с четным, либо с нечетным натуральным показателем в соответствии с четностью или нечетностью перестановки p.

Таким образом, мы приходим к выводу, что уравнение (22) справедливо только в двух следующих случаях:

(а) для любого p, $c_p = 1$, $\quad P|u\rangle = |u\rangle$; (24)

(б) для любого p, $c_p = (-1)^p$, $\quad P|u\rangle = (-1)^p|u\rangle$. (25)

Вектор $|u\rangle$ называется *симметричным* или *антисимметричным* относительно перестановки N частиц в зависимости от того, какой случай (а) или (б) имеет место.

Симметричные векторы образуют подпространство $\mathscr{E}^{(S)}$ в $\mathscr{E}$, а антисимметричные векторы образуют в $\mathscr{E}$ подпространство

$\mathscr{E}^{(A)}$, ортогональное к $\mathscr{E}^{(S)}$. Покажем, что проекторами на эти подпространства являются соответственно операторы

$$S=\frac{1}{N!}\sum_P P, \quad A=\frac{1}{N!}\sum_P (-1)^P P \tag{26}$$

($\sum_P$ распространяется на все $N!$ возможных перестановок). Рассмотрим последовательность, полученную произвольным упорядочением всех перестановок. Если каждый элемент умножить справа и слева на оператор P_1 некоторой перестановки, то в результате будет изменен только порядок расстановки элементов в рассматриваемой последовательности, так что

$$P_1S=SP_1=S, \quad P_1A=AP_1=(-1)^{P_1}A. \tag{27}$$

Замена каждого элемента P обратным $P^\dagger$ также сказывается лишь на порядке следования элементов, и так как перестановка и обратная к ней имеют одну и ту же четность, то

$$S=S^\dagger, \quad A=A^\dagger. \tag{28}$$

Из равенств (27) и определений (26) легко получить соотношения

$$S^2=S, \quad A^2=A \tag{29}$$

и

$$SA=AS=0. \tag{30}$$

Соотношения (28)—(30) показывают, что S и A являются ортогональными проекторами. Далее, если $|u\rangle$ содержится в $\mathscr{E}^{(S)}$, то из (24) имеем

$$S|u\rangle=\frac{1}{N!}\sum_P P|u\rangle=\left(\frac{1}{N!}\sum_P\right)|u\rangle=|u\rangle$$

и обратно, если $|\rangle$ — произвольный вектор, то согласно (27) получаем

$$PS|\rangle=S|\rangle.$$

Следовательно, S действительно является проектором на $\mathscr{E}^{(S)}$. Аналогичным образом можно показать, что A является проектором на $\mathscr{E}^{(A)}$.

В случае $N=3$ для S и A легко вывести явные формулы

$$S=\frac{1}{6}(1+P_{(12)}+P_{(23)}+P_{(31)}+P_{(123)}+P_{(321)}),$$

$$A=\frac{1}{6}(1-P_{(12)}-P_{(23)}-P_{(31)}+P_{(123)}+P_{(321)}).$$

Как видно из этого примера, $S+A \neq 1$ при $N>2$. Действительно, $S+A$ является проектором на пространство состояний, инвариантных относительно четной перестановки N частиц, которое при $N>2$ является подпространством в $\mathscr{E}$.

Вернемся к определенному выше пространству $\mathscr{E}_u$. Из соотношений (27) следует, что для любого P справедливы равенства $SP|u\rangle = S|u\rangle$, $AP|u\rangle = (-1)^p A|u\rangle$.

Таким образом, растягивающие $\mathscr{E}_u$ векторы $P|u\rangle$ имеют одну и ту же проекцию на $\mathscr{E}^{(S)}$ и с точностью до знака одинаковую проекцию на $\mathscr{E}^{(A)}$. Следовательно, в соответствии с тем, являются ли векторы $S|u\rangle$ отличными от нуля или нет, $\mathscr{E}_u$ содержит либо один и только один симметричный вектор, либо вовсе не содержит таковых и аналогично, в зависимости от того равен нулю или отличен от нуля вектор $A|u\rangle$, $\mathscr{E}_u$ содержит один и только один антисимметричный вектор либо не содержит ни одного [1]).

§ 5. Тождественные частицы и постулат симметризации

Если все N частиц рассмотренной выше системы будут не только подобны, но и тождественны, то ни одно из динамических свойств системы не изменится в результате любой перестановки этих частиц. Из этого свойства инвариантности можно вывести важные следствия относительно имеющихся законов движения и наблюдаемых системы.

Если $|\psi_0\rangle$ — состояние системы в начальный момент времени t_0, то ее состояние в более поздний момент времени t можно получить действием оператора эволюции $U(t, t_0)$: $|\psi_t\rangle = U(t, t_0)|\psi\rangle$. Если начальное состояние $P|\psi_0\rangle$, то эволюция системы отличается от исходной лишь перестановкой P, и в момент времени t система будет находится в состоянии $P|\psi_t\rangle$. Следовательно,

$$U(t, t_0)P|\psi_0\rangle = P|\psi_t\rangle = PU(t, t_0)|\psi_0\rangle$$

и так как эти равенства должны выполняться при любом выборе $|\psi_0\rangle$, то

$$[P, U(t, t_0)] = 0. \tag{31}$$

Пусть H — гамильтониан системы, тогда $U(t, t_0)$ является решением уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = HU(t, t_0),$$

удовлетворяющим начальному условию $U(t_0, t_0) = 1$. Из (31) и соотношения, получаемого из него дифференцированием по t,

[1]) Если $N!$ векторов $P|u\rangle$ линейно независимы, то конкретные линейные комбинации $S|u\rangle$ и $A|u\rangle$ этих векторов, конечно, отличны от нуля. В этом случае $\mathscr{E}_u$ содержит один симметричный и один антисимметричный вектор.

имеем

$$[P, H] = 0. \tag{32}$$

Обратно, если H и P коммутируют, то оператор $U(t, t_0)$ и его преобразование $PUP^\dagger$ при перестановке совпадают, так как удовлетворяют одному и тому же уравнению Шредингера с одним и тем же начальным условием. Следовательно, U и P коммутируют. Итак, условие (32) коммутации гамильтониана H со всеми операторами перестановок P является необходимым и достаточным для инвариантности уравнений движения относительно перестановок.

Рассмотрим теперь физическую наблюдаемую [1]) B исследуемой системы и пусть $|u\rangle$ собственный вектор B, соответствующий собственному значению b. Если система находится в состоянии $|u\rangle$, то при измерении B результатом всегда будет b, а если система находится в состоянии $P|u\rangle$, полученным действием оператора перестановки P на вектор $|u\rangle$, то измерение B должно дать тот же результат

$$BP|u\rangle = bP|u\rangle$$

для любой перестановки P. Иными словами, каждый вектор из пространства $\mathscr{E}_u$, порождаемого действием всевозможных перестановок N частиц на состояние $|u\rangle$, в свою очередь должен быть собственным вектором оператора B, соответствующим тому же собственному значению b (обменное вырождение). Для справедливости этого утверждения при всех собственных значениях наблюдаемой B необходимо и достаточно (ср. § VII. 15), чтобы при всех P выполнялось равенство

$$[B, P] = 0. \tag{33}$$

Таким образом, *N частиц тождественны, если гамильтониан H и все физические наблюдаемые системы симметричны относительно перестановки этих частиц.*

Следовательно, при определении состояния системы одновременным измерением переменных q каждой отдельной частицы состояние будет определено, в лучшем случае, лишь с точностью до обменного вырождения [2]). Можно будет ут-

---

[1]) Выражению *физическая наблюдаемая* был придан смысл в § XIII. 15. Приводимый анализ инвариантности относительно перестановок можно сравнить с анализом инвариантности физической наблюдаемой относительно «вращений на 2π», приведенным в указанном параграфе.

[2]) $q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(N)}$ образуют полный набор коммутирующих наблюдаемых в пространстве $\mathscr{E}$, но только симметричные функции этих величин могут быть физическими наблюдаемыми, однако эти функции уже не образуют полного набора в $\mathscr{E}$. Постулат симметризации, который будет введен далее, состоит в ограничении пространства векторов состояния до некоторого подпространства в $\mathscr{E}$, в котором рассматриваемые физические наблюдаемые образуют полный набор (и из которого, следовательно, полностью устранено обменное вырождение).

верждать, что n_1 частиц из полного числа частиц N находятся в состоянии $|q_1\rangle$; n_2 — в состоянии $|q_2\rangle$, ...; $n_\varkappa$ — в состоянии $|q_\varkappa\rangle$, ... $(n_1+n_2+\ldots+n_\varkappa+\ldots=N)$; однако, наличность частиц в каждом из этих состояний останется неопределенной. В $\{Q\}$-представлении имеется $(N!/n_1!\,n_2!\ldots n_\varkappa!\ldots)$ базисных векторов, обладающих рассматриваемым свойством. Пусть $\mathscr{E}(n_1n_2\ldots n_\varkappa\ldots)$ — пространство, образованное этими векторами (порождаемыми действием $N!$ перестановок на одно из них, выбранное произвольно). Состояние системы описывается одним из векторов этого пространства, но рассмотренное выше измерение не позволяет определить, каким именно. Однако, как мы видели в примере, приведенном в § 1, предсказания теории существенно зависят от того, в каком состоянии находится система, и эта неопределенность является источником действительного затруднения. Она может быть устранена введением постулата симметризации: *состояния системы, содержащей N тождественных частиц, будут все либо симметричными, либо антисимметричными относительно перестановок этих N частиц.*

Какое из этих предписаний следует применять, зависит от природы рассматриваемых тождественных частиц. Частицы с симметричными состояниями называются *бозонами*, а с антисимметричными — *фермионами*. (Мотивировка этих наименований станет ясной из дальнейшего.) *Эксперимент показывает*, что встречающиеся в природе элементарные частицы спина $^1/_2$ (электроны, протоны, нейтроны и т. д.) являются фермионами, тогда как частицы с целым спином (фотоны, π-мезоны и т. д.) — бозонами.

Определенное выше пространство $\mathscr{E}(n_1n_2\ldots n_\varkappa\ldots)$ имеет не более чем один симметричный и не более чем один антисимметричный вектор. Таким образом, постулат симметризации полностью устраняет обменное вырождение. Остается только показать, что этот постулат не приводит к противоречиям с основными положениями квантовой механики, относящимися к эволюции физических систем и измерению физических величин.

Рассмотрим случай бозонов (фермионы можно рассмотреть тем же способом). В предыдущем параграфе мы определили проектор S на симметричные состояния. Он является комбинацией операторов перестановки (ур. (26)) и, следовательно, коммутирует с оператором эволюции $U(t, t_0)$ системы

$$[S, U(t, t_0)]=0 \tag{34}$$

и физическими наблюдаемыми

$$[S, B]=0. \tag{35}$$

Соотношение (34) показывает, что если система находилась первоначально в симметричном состоянии, то она будет оста-

ваться в симметричном состоянии до тех пор, пока не будет внешнего возмущения. Из соотношения (35) следует, что S и B имеют по крайней мере один общий набор базисных векторов. Если состояние системы симметрично, то разложение вектора состояния по этому базису содержит только симметричные собственные векторы оператора B. Таким образом, очевидно, что операция измерения наблюдаемой B оставит систему в симметричном состоянии.

§ 6. Бозоны и статистика Бозе—Эйнштейна

Рассмотрим систему N бозонов. Состояния системы образуют подпространство $\mathscr{E}^{(S)}$ пространства $\mathscr{E}$. Из векторов $\{Q\}$-представления можно построить базис в пространстве $\mathscr{E}^{(S)}$.

В каждом подпространстве $\mathscr{E}(n_1 n_2 \ldots n_\varkappa \ldots)$ мы можем построить один и только один нормированный симметричный вектор (определенный с точностью до фазового множителя)

$$\left[\frac{N!}{n_1!\, n_2! \ldots n_\varkappa! \ldots}\right]^{1/2} S \left| q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_\varkappa^{n_\varkappa} \ldots \right\rangle, \tag{36}$$

где $\left| q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_\varkappa^{n_\varkappa} \ldots \right\rangle$ — базисный вектор $\{Q\}$-представления, в котором первые n_1 частиц находятся в состоянии $|q_1\rangle$, следующие n_2 частиц — в состоянии $|q_2\rangle$, ..., следующие $n_\varkappa$ частиц — в состоянии $|q_\varkappa\rangle$, ...; S — определенный выше (ур. (26)) оператор симметризации, а в квадратных скобках стоит нормирующий множитель ($0! = 1$). Доказать это можно следующим образом.

Перестановка двух частиц, находящихся в одном и том же состоянии, не изменяет вектор $\left| q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_\varkappa^{n_\varkappa} \ldots \right\rangle$, тогда как перестановка двух частиц, находящихся в разных состояниях, порождает другой базисный вектор $\{Q\}$-представления. В общем случае, рассматриваемый вектор инвариантен относительно любой из $\prod n_\varkappa! \equiv n_1! n_2! \ldots n_\varkappa! \ldots$ перестановок, не изменяющих распределение частиц по состояниям $|q_1\rangle$, $|q_2\rangle$, ... $|q_\varkappa\rangle$, ...; любая из остальных перестановок переводит его в другой базисный вектор $\{Q\}$-представления. Применяя каждую из $N!$ перестановок к $\left| q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_\varkappa^{n_\varkappa} \ldots \right\rangle$, мы получим $[N!/\prod n_\varkappa!]$ базисных векторов пространства $\mathscr{E}(n_1 n_2 \ldots n_\varkappa \ldots)$, каждый из которых будет получен $(\prod n_\varkappa!)$ раз. Вектор (36) равен сумме этих базисных векторов, умноженной на $[\prod n_\varkappa!/N!]^{1/2}$ и, следовательно, симметричен и нормирован на единицу.

Итак, каждой последовательности $n_1, n_2, \ldots n_\varkappa, \ldots$ неотрицательных целых чисел такой, что

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_\varkappa + \ldots = N,$$

соответствует одно и только одно симметричное состояние системы, которое описывается вектором (36). Множество таких векторов образует ортонормированный базис в $\mathscr{E}^{(S)}$.

Покажем теперь, *что бозонный газ подчиняется статистике Бозе — Эйнштейна*. Бозонным газом называют систему, образованную очень большим числом N бозонов, взаимодействие между которыми достаточно слабое, так что в первом приближении им можно пренебречь. Гамильтониан H системы можно записать в виде суммы N одночастичных гамильтонианов

$$H = h^{(1)} + h^{(2)} + \ldots + h^{(i)} + \ldots + h^{(N)}. \tag{37}$$

Согласно теории Больцмана равновесное термодинамическое состояние реализуется, когда система находится в наиболее вероятном «макроскопическом состоянии». Данное «макроскопическое состояние» в действительности является набором квантовых состояний (или «микроскопических состояний»), близких друг другу, так что на макроскопическом уровне их невозможно различить. Согласно эргодической гипотезе микроскопические состояния с одинаковой энергией равновероятны. Вероятность заданного макроскопического состояния пропорциональна числу образующих его различных микроскопических состояний. Определение термодинамического равновесия системы существенно зависит от этого числа. Будем предполагать, что h содержится в множестве q динамических переменных, определяющих $\{Q\}$-представление. Каждое распределение

$$n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa, \ldots$$

N частиц по различным возможным одночастичным состояниям

$$|q_1\rangle, |q_2\rangle, \ldots, |q_\varkappa\rangle, \ldots$$

определяет одно и только одно микроскопическое состояние системы (описываемое вектором (36)). В этом как раз и состоит основное предположение статистики Бозе — Эйнштейна, в которой частицы считаются неразличимыми. Следовательно, в статистике Бозе — Эйнштейна состояния системы, отличающиеся друг от друга только различными расположениями тождественных частиц, заселяющих различные одночастичные состояния, рассматриваются как одно и то же микроскопическое состояние. С другой стороны, в статистике Максвелла — Больцмана, каждая частица предполагается различимой на микроскопическом уровне и $[N!/\prod n_\varkappa!]$ состояний системы, соответствующих одному и тому же распределению $n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa, \ldots$, рассматриваются как различные микроскопические состояния.

Важное замечание. Оператор плотности, описывающий состояние системы в термодинамическом равновесии, имеет вид

$$\rho = e^{-H/kT}/\mathrm{Tr}\, e^{-H/kT}. \tag{38}$$

Другие формы записи оператора ρ, полученные из этого выражения в § VIII. 25, сохраняют справедливость. Главное отличие, вводимое в теорию постулатом симметризации, заключается в том, что ρ ставится оператором в $\mathscr{E}^{(S)}$, а не во всем пространстве $\mathscr{E}$, и различные вычисления квантовой статистики, в частности нахождение следов, следует проводить именно в этом суженном пространстве. Итак, в случае, когда H имеет вид (37), оператор плотности ρ, рассматриваемый как оператор в пространстве $\mathscr{E}$, является тензорным произведением операторов, определенных на одночастичных пространствах $\mathscr{F}^{(1)}$, $\mathscr{F}^{(2)}$, ..., $\mathscr{F}^{(N)}$,

$$\rho = \prod_{i=1}^{N} \left[e^{-h^{(i)}/kT} / \mathrm{Tr}_i e^{-h^{(i)}/kT}\right].$$

Однако эта факторизация теряет смысл, если ρ является оператором в $\mathscr{E}^{(S)}$, ибо каждый из N множителей, взятый в отдельности, не является оператором в $\mathscr{E}^{(S)}$.

§ 7. Фермионы и статистика Ферми — Дирака. Принцип запрета

Анализ, подобный приведенному выше, можно провести и в случае системы N фермионов. Ее состояния образуют подпространство $\mathscr{E}^{(A)}$ в $\mathscr{E}$.

В $\{Q\}$-представлении мы получаем полный набор ортонормированных антисимметричных векторов, взяв по одному нормированному антисимметричному вектору (если таковые существуют) в каждом из подпространств $\mathscr{E}(n_1 n_2 \ldots n_\varkappa \ldots)$. Для существования такого вектора необходимо и достаточно, чтобы вектор $A\left|q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_\varkappa^{n_\varkappa} \ldots\right\rangle$ был отличен от нуля. Предположим, что среди целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa, \ldots$ по крайней мере одно превосходит 1. В этом случае в состоянии, описываемом вектором $\left|q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_\varkappa^{n_\varkappa} \ldots\right\rangle$, по крайней мере две частицы, скажем i-я и j-я, заселяют одно и то же одночастичное состояние, так что рассматриваемый вектор симметричен относительно обмена этих частиц, т. е.

$$\left|q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_\varkappa^{n_\varkappa} \ldots\right\rangle = \frac{1}{2}\left(1 + P_{(ij)}\right)\left|q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_\varkappa^{n_\varkappa} \ldots\right\rangle.$$

Но из (27) следует

$$A\left(1 + P_{(ij)}\right) = 0,$$

так что

$$A\left|q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_\varkappa^{n_\varkappa} \ldots\right\rangle = 0. \tag{39}$$

Другими словами, *два фермиона не могут занимать одно и то же одночастичное состояние одновременно.* Это утверждение известно как *принцип запрета Паули* [1]).

Предположим теперь, что каждое одночастичное состояние занято не более чем одной частицей ($n_\varkappa = 0$ или 1). Вектор

$$A\left|q_1^{n_1}q_2^{n_2}\ldots q_\varkappa^{n_\varkappa}\ldots\right\rangle \equiv \frac{1}{N!}\sum_P(-1)^P P\left|q_1^{n_1}q_2^{n_2}\ldots q_n^{n_\varkappa}\ldots\right\rangle$$

является суммой $N!$ взаимноортогональных векторов и, следовательно, отличен от нуля. Его норма равна $(1/N!)$. Если $|q_\alpha\rangle$, $|q_\beta\rangle$, ..., $|q_\nu\rangle$ есть N занятых одночастичных состояний, то соответствующее антисимметричное состояние описывается нормированным вектором $\sqrt{N!}A\left|q_\alpha^{(1)}q_\beta^{(2)}\ldots q_\nu^{(N)}\right\rangle$. Этот вектор можно представить в виде определителя $N\times N$-го порядка (*определитель Слэтера*)

$$\sqrt{N!}A\left|q_\alpha^{(1)}q_\beta^{(2)}\ldots q_\nu^{(N)}\right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix} |q_\alpha\rangle^{(1)} & |q_\alpha\rangle^{(2)} & \ldots & |q_\alpha\rangle^{(N)} \\ |q_\beta\rangle^{(1)} & |q_\beta\rangle^{(2)} & \ldots & |q_\beta\rangle^{(N)} \\ \vdots & & & \\ |q_\nu\rangle^{(1)} & |q_\nu\rangle^{(2)} & \ldots & |q_\nu\rangle^{(N)} \end{vmatrix}. \qquad (40)$$

Тождество (40) можно проверить непосредственно, разложив определитель, стоящий в правой части. Более того, соотношение (40) остается справедливым, когда некоторые из N одночастичных состояний тождественны, так как в этом случае две или большее число строк матрицы совпадают и определитель равен нулю, что соответствует принципу Паули.

Таким образом, каждому набору $|q_\alpha\rangle$, $|q_\beta\rangle$, ..., $|q_\nu\rangle$ из N различных состояний, выбранных из одночастичных состояний $|q_1\rangle$, $|q_2\rangle$, ..., $|q_\varkappa\rangle$, ..., *соответствует* одно и только одно антисимметричное состояние, описываемое вектором (40). Полученное в результате множество векторов образует ортонормированный базис в $\mathscr{E}^{(A)}$.

Фермионный газ подчиняется статистике Ферми — Дирака. Доказательство подобно доказательству аналогичного утверждения в бозонном случае. Единственное различие состоит в нумерации микроскопических состояний. Каждый набор из N различных одночастичных состояний определяет одно и только одно микроскопическое состояние системы фермионов, описываемое

[1]) Принцип запрета был сформулирован Паули в 1925 г. как общее свойство электронов, позволяющее объяснить структуру спектров сложных атомов (ср. § 12).

вектором (40). В этом и состоит основное положение статистики Ферми — Дирака, которая означает, что эти частицы неразличимы и что не более чем одна из них может находиться в каждом из одночастичных состояний.

Замечание, приведенное в конце предыдущего параграфа, применимо также и к фермионам. Оператор плотности для системы фермионов, находящихся в термодинамическом равновесии, определяется равенством (38), однако в этом случае он является оператором в $\mathscr{E}^{(A)}$.

Итак, различия между тремя типами статистик для тождественных частиц обусловлено различным определением пространства векторов состояния, как это указано в табл. I.

Таблица I

Статистика	Максвелла — Больцмана	Бозе — Эйнштейна	Ферми — Дирака
Тип частиц	Различимые	Неразличимые	Неразличимые + принцип запрета
Пространство векторов состояния	$\mathscr{E}$	$\mathscr{E}^{(S)}$	$\mathscr{E}^{(A)}$

§ 8. Всегда ли необходимо симметризовать волновую функцию?

Рассмотрим систему n тождественных частиц. Если частицами являются электроны, то состояние системы описывается антисимметричной волновой функцией. Однако во вселенной имеются не только эти электроны. Отказ от учета влияния других электронов и рассмотрение системы электронов в виде целого, отделенного от всего остального, предполагает, что динамические свойства рассматриваемых n электронов не влияет наличие других электронов. Возникает вопрос, является ли такое предположение хорошо обоснованным или существуют определенные корреляции между n электронами исследуемой системы и другими электронами, не входящими в нее, что означало бы несправедливость рассматриваемого предположения.

В практических приложениях все электроны системы содержатся внутри некоторой области D пространства, а интересующие нас динамические свойства соответствуют измерениям, которые следует проводить внутри этой области. Оказывается, что

наличие других электронов можно попросту не учитывать до тех пор, пока они остаются вне области D, и до тех пор, пока их взаимодействие с электронами системы остается пренебрежимо малым. Этот результат имеет общий характер и в одинаковой степени применим как к фермионам, так и к бозонам. Докажем его для специального случая системы, состоящей из двух фермионов.

Если пренебречь наличием всех остальных частиц, то динамическое состояние двух фермионов описывается нормированной антисимметричной волновой функцией $\varphi(1, 2)$, где 1 и 2 обозначают координаты и компоненты s_z спина частиц 1 и 2 соответственно. В общем случае, заданное состояние системы, скажем состояние χ, описывается антисимметричной нормированной волновой функцией $\chi(1, 2)$. Если в заданный момент времени система находится в состоянии φ, то ее динамические свойства в этот момент времени определяются набором вероятностей

$$w = |\langle\chi|\varphi\rangle|^2. \tag{41}$$

В реальной ситуации два рассматриваемых фермиона составляют часть системы из N фермионов. Рассмотрим вопрос о том, совпадают ли полученные динамические свойства с теми, которые могут быть найдены при учете существования остальных $(N-2)$ фермионов. Пусть $\Psi(3, 4, \ldots, N)$ — нормированная антисимметричная волновая функция, описывающая динамическое состояние остальных $(N-2)$ фермионов. Если фермионы 1 и 2 не тождественны с фермионами 3, 4, ..., N, то состояние всей системы описывается волновой функцией

$$\varphi(1, 2)\Psi(3, 4, \ldots, N)$$

и сохраняет это свойство факторизуемости до тех пор, пока взаимодействие между двумя выделенными фермионами и остальными фермионами системы остается пренебрежимо малым. В действительности же, вектор $|\Phi\rangle$, корректно описывающий состояние всей системы, пропорционален антисимметричному вектору $A|\varphi\Psi\rangle$, где A — оператор антисимметризации N частиц (определение (26)).

По предположению, волновые пакеты φ и Ψ не перекрываются, иначе говоря, с достоверностью известно, что два фермиона находятся внутри указанной области D пространства, тогда как остальные расположены вне D. Более того, нас интересуют только динамические свойства двух фермионов, находящихся внутри D.

Обозначим $\Theta(3, 4, \ldots, N)$ нормированную антисимметричную волновую функцию, обращающуюся в нуль в случае, когда какие-либо из $(N-2)$ координатных векторов $r^{(3)}, \ldots, r^{(N)}$ на-

ходятся внутри D. Волновая функция Ψ описывает состояние системы из $(N-2)$ фермионов, находящихся вне D. По предположению, Ψ является функцией такого типа. Если функции $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_i, \ldots$ образуют полный ортонормированный базис функций указанного вида, то

$$\Psi = \sum_i \Theta_i \langle \Theta_i | \Psi \rangle.$$

Обозначим $\chi(1, 2)$ произвольную нормированную антисимметричную волновую функцию частиц 1 и 2, обращающуюся в нуль, когда хотя бы один из векторов, $\boldsymbol{r}^{(1)}$ или $\boldsymbol{r}^{(2)}$, находится вне D. Следовательно, χ описывает два фермиона, находящихся внутри D. По предположению функция φ имеет такой вид.

Перестановки N частиц можно разбить на два класса в соответствии с их действием на вектор $|\chi\Theta\rangle$. Перестановки первого типа, обозначаемые F, изменяют только знак вектора $|\chi\Theta\rangle$. Имеется всего $2!(N-2)!$ перестановок, меняющих местами частицы 1 и 2 или переставляющих частицы 3, 4, ..., N друг с другом. Таким образом,

$$F|\chi\Theta\rangle = (-1)^f |\chi\Theta\rangle.$$

Все остальные перестановки G переставляют по крайней мере одну из частиц 1, 2 с одной из остальных $(N-2)$ частиц. Следовательно $G|\chi\Theta\rangle$ описывает состояние, в котором по крайней мере одна из частиц (1, 2) находится вне D, так что этот вектор ортогонален любому вектору $|\chi\Theta\rangle$

$$\langle \chi'\Theta' | G | \chi\Theta \rangle = 0.$$

Далее, получаем следующее тождество:

$$\begin{aligned}\langle \chi'\Theta' | A | \chi\Theta \rangle &= \frac{1}{N!} \sum_P (-1)^p \langle \chi'\Theta' | P | \chi\Theta \rangle = \\ &= \frac{1}{N!} \sum_F (-1)^f \langle \chi'\Theta' | F | \chi\Theta \rangle = \\ &= \frac{2!\,(N-2)!}{N!} \langle \chi'\Theta' | \chi\Theta \rangle. \end{aligned} \tag{42}$$

Заметим, что норма вектора $A|\chi\Theta\rangle$ равна $\langle \chi\Theta | A | \chi\Theta \rangle$, т. е. $2!(N-2)!/N!$.

Нам надо определить вероятность w того, что два фермиона, расположенные внутри D, находятся в состоянии χ. Если бы $(N-2)$ оставшихся фермиона были отличны от этих двух, то состояние системы описывалось бы вектором $|\varphi\Psi\rangle$, а искомая вероятность определялась бы по формуле

$$\sum_i |\langle \chi\Theta_i | \varphi\Psi \rangle|^2 = |\langle \chi | \varphi \rangle|^2 \left(\sum_i |\langle \Theta_i | \Psi \rangle|^2 \right) = |\langle \chi | \varphi \rangle|^2. \tag{43}$$

Поскольку все N фермионов тождественны, состояние системы имеет вид

$$|\Phi\rangle = \sqrt{C_N^2} A |\varphi\Psi\rangle \qquad \left(C_N^2 = \frac{N!}{2!\,(N-2)!}\right),$$

а искомая вероятность есть вероятность обнаружить систему в одном из состояний, описываемых ортонормированными антисимметричными векторами

$$|X_i\rangle = \sqrt{C_N^2}\, A\, |\chi\Theta_i\rangle,$$

т. е.

$$w = \sum_i |\langle X_i | \Phi\rangle|^2 = (C_N^2)^2 \sum_i |\langle \chi\Theta_i | A | \varphi\Psi\rangle|^2.$$

Из (42) и (43) следует

$$w = \sum_i |\langle \chi\Theta_i | \varphi\Psi\rangle|^2 = |\langle \chi | \varphi\rangle|^2,$$

что совпадает с (41).

Итак, результат, который получен в пренебрежении остальными $(N-2)$ фермионами, является корректным.

Раздел II. ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 9. Столкновение двух тождественных бесспиновых частиц

В этом параграфе мы подведем итоги обсуждению задачи о столкновении, рассмотренной в § 1.

Пусть $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{P})$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ — динамические переменные центра масс и относительного движения двух частиц

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^{(1)} + \boldsymbol{r}^{(2)}), \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^{(1)} - \boldsymbol{r}^{(2)}. \tag{44}$$

Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{4m} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} + V(\boldsymbol{r}), \tag{45}$$

а динамическое состояние системы в любой заданный момент времени описывается волновой функцией $\Psi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r})$, зависящей от $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{r}$.

При перестановке частиц $\boldsymbol{R}$ не меняется, а $\boldsymbol{r}$ переходит в $-\boldsymbol{r}$. Поскольку волновая функция обязана удовлетворять постулату