ГЛАВА XV[1]

ИНВАРИАНТНОСТЬ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. ОБРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ

§ 1. Введение

В данной главе систематически исследуются свойства инвариантности уравнений движения физической системы относительно некоторых преобразований. Изучаются выводы, которые можно сделать о поведении физической системы на основании этих свойств инвариантности.

Вспомогательные математические сведения приведены в разделе I.

В разделе II изучаются общие свойства преобразований и групп преобразований. Каждому преобразованию $\mathcal{T}$ переменных и динамических состояний будет сопоставлен оператор T, действующий на кет-векторы, описывающие состояния. Оператор T — либо *линейный унитарный*, либо *антилинейный унитарный* и определен с точностью до произвольного фазового множителя законами преобразования основных наблюдаемых системы.

Как правило, в физических приложениях оператор T линеен за исключением оператора обращения времени. Различные преобразования, встречающиеся в физике, образуют определенные группы преобразований. Каждой такой группе $\mathcal{G}$ сопоставляется группа G операторов, реализующих эти преобразования[2]. После краткого обзора наиболее важных из этих групп мы продемонстрируем на простых примерах методы построения G в случае, когда группа $\mathcal{G}$ конечная, и в случае, когда $\mathcal{G}$ — непрерывная группа, конечные преобразования которой могут быть определены как последовательность инфинитезимальных преобразований.

Вопросы, специфически относящиеся к инвариантности, разбираются в разделе III. Преобразования этого раздела не за-

---

[1]) Четвертая часть (гл. XVI—XIX), за исключением нескольких специально отмеченных мест, которые могут быть опущены при первом чтении, не зависит от настоящей главы, и последующие главы при желании можно изучать в первую очередь.

[2]) Используемые в этой главе понятия, относящиеся к группам и их представлениям, приведены в разделах I и II Дополнения Г.

висят от времени и линейны, а полученные результаты являются простыми обобщениями тех, которые были получены ранее (гл. XIII) для вращений. Инвариантность уравнений движения динамических состояний относительно преобразований некоторой группы $\mathcal{G}$ эквивалентна предположению о том, что гамильтониан H коммутирует с операторами группы G. Таким образом, любая наблюдаемая, образованная из операторов группы G, является интегралом движения, так что из G-инвариантности следует существование законов сохранения. Учет свойств симметрии гамильтониана H позволяет упростить процедуру его диагонализации и сделать ряд предсказаний о наличии и характере вырождения его собственных значений.

Инвариантность относительно обращения времени выделяется как своим физическим значением, так и тем обстоятельством, что соответствующий ей оператор антилинеен. Эта инвариантность обсуждается в разделе IV. Изложенный в этой главе материал проясняет удивительную аналогию, имеющуюся между классической и квантовой механиками в определении преобразований, в связи свойств инвариантности уравнений движения, симметрий гамильтониана и в существовании законов сохранения.

Раздел I. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ. АНТИЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 2. Три полезные теоремы

Теорема I. Справедливость соотношения

$$\langle u | A | u \rangle = \langle u | B | u \rangle \text{ при всех } | u \rangle$$

является необходимым и достаточным условием равенства двух линейных операторов A и B.

Теорема II. Необходимое и достаточное условие совпадения с точностью до фазового множителя двух линейных операторов A и B

$$A = B e^{i\alpha} \tag{1}$$

состоит в справедливости равенства

$$| \langle u | A | v \rangle | = | \langle u | B | v \rangle | \text{ для всех } | u \rangle \text{ и } | v \rangle. \tag{2}$$

Теорема III. Если между векторами пространства $\mathcal{E}$ существует взаимно однозначное соответствие $\mathcal{T}$, определенное с точностью до произвольного постоянного фазового множителя и сохраняющее модуль скалярного произведения, то фазовые множители всегда можно выбрать таким образом, чтобы $\mathcal{T}$ было либо линейным унитарным, либо антилинейным унитарным.

Теорема I доказана в главе VII (§ 5). Она приведена здесь только для полноты изложения.

В теореме II условие (2) очевидно следует из (1). Для доказательства обратного утверждения выберем конкретное представление, в котором обозначим A_{ij} и B_{ij} матричные элементы операторов A и B соответственно. Поскольку для базисных векторов представления условие (2) справедливо, то

$$|A_{ij}| = |B_{ij}| \text{ при всех } i \text{ и } j. \tag{3}$$

Считая, что $|u\rangle$ — i-й элемент базиса, а $|v\rangle$ — линейная комбинация j-го и k-го базисных векторов, мы получим аналогично

$$|A_{ij}x_j + A_{ik}x_k| = |B_{ij}x_j + B_{ik}x_k|$$

для всех значений комплексных коэффициентов x_j и x_k. Учитывая (3), можно переписать последнее равенство в виде

$$\mathrm{Re}\left[x_j x_k^* (A_{ij}A_{ik}^* - B_{ij}B_{ik}^*)\right] = 0.$$

Для справедливости этого равенства при всех $x_j x_k^*$, необходимо выполнение условия

$$A_{ij}A_{ik}^* - B_{ij}B_{ik}^* = 0.$$

Полученное соотношение с учетом (3) дает

$$\frac{A_{ij}}{B_{ij}} = \frac{A_{ik}}{B_{ik}}. \tag{4}$$

При заданном i те же рассуждения можно применить к различным индексам столбцов j и k, что показывает независимость отношения A_{ij}/B_{ij} от j. Переставив местами строки и столбцы, мы можем повторить доказательство и показать, что отношение не зависит также и от i. Поскольку (3) означает равенство матричных элементов A и B по абсолютной величине, то модуль рассматриваемого отношения должен быть равен единице и

$$\frac{A_{ij}}{B_{ij}} = e^{i\alpha} \text{ при всех } i \text{ и } j.$$

Иными словами, операторы A и B совпадают с точностью до фазы $e^{i\alpha}$. ■

Рассмотрим теперь теорему III. По предположению каждому вектору $|u\rangle$ из $\mathscr{E}$ отображение $\mathscr{T}$ сопоставляет вектор $|u'\rangle$. Этот вектор определен с точностью до фазового множителя. Осуществим конкретный выбор значения фазы у каждого из векторов $|u'\rangle$. Тогда отображение $\mathscr{T}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами из $\mathscr{E}$

$$|u'\rangle = \mathscr{T}[|u\rangle], \quad |u\rangle = \mathscr{T}^{-1}[|u'\rangle], \tag{I}$$

сохраняющее модуль скалярного произведения

$$|\langle u' | v' \rangle| = |\langle u | v \rangle|. \tag{II}$$

Пусть векторы

$$|1\rangle, |2\rangle, \ldots, |n\rangle, \ldots \tag{5}$$

образуют полное ортонормированное множество векторов в $\mathscr{E}$. Соответствующее ему множество

$$|1'\rangle, |2'\rangle, \ldots, |n'\rangle, \ldots \tag{5'}$$

также является полным и ортонормированным. Его ортонормированность следует из того, что в силу (II) $\mathscr{T}$ сохраняет нормировку и ортогональность. Полнота следует из того, что если существует вектор $|a'\rangle$, ортогональный всем векторам (5′), то вектор $|a\rangle \equiv \mathscr{T}^{-1}[|a'\rangle]$ будет ортогонален всем векторам (5), что противоречит предположению о полноте системы (5).

Обозначим

$$u_n \equiv \langle n | u \rangle, \quad u'_n \equiv \langle n' | u' \rangle. \tag{6}$$

Мы собираемся показать, что при соответствующем выборе фаз для «штрихованных» кет-векторов справедливо одно из приводимых ниже соотношений:

$$u'_n = u_n \quad \text{при всех } |u\rangle \text{ и } n, \tag{7а}$$

$$u'_n = u^*_n \quad \text{при всех } |u\rangle \text{ и } n. \tag{7б}$$

Заметим, что условие (II) означает

$$|u'_n| = |u_n| \quad \text{при всех } |u\rangle \text{ и } n.$$

Таким образом, нам следует изучить только фазовые соотношения между u'_n и u_n.

С этой целью зафиксируем фазу каждого из базисных кет-векторов $|n'\rangle$, требуя, чтобы вектору $|1'\rangle + |n'\rangle$ соответствовал вектор $|1\rangle + |n\rangle$.

Докажем сперва соотношения (7), предполагая, что $|u\rangle$ — «вещественный» кет-вектор, т. е. когда все u_n вещественны. Применив условие (II) к скалярному произведению векторов $|u\rangle$ и $|1\rangle + |n\rangle$, имеем

$$|u_1 + u_n| = |u'_1 + u'_n|.$$

Выбрав фазу вектора $|u'\rangle$ так, чтобы $u'_1 = u_1$, получим требуемый результат, $u'_n = u_n$. Приведенное рассуждение неприменимо к случаю, когда $u_1 = 0$. Однако можно изменить аргументацию так, чтобы включить в рассмотрение и этот случай. Поскольку такое расширение очевидно, мы не будем приводить его.

Рассмотрим теперь произвольный кет-вектор $|u\rangle$. Применив условие (II) к скалярному произведению $|u\rangle$ с «вещественным» кет-вектором $|j\rangle + |j+1\rangle + \ldots + |j+k\rangle$, получаем

$$\left|\sum_{s=0}^{k} u_{j+s}\right| = \left|\sum_{s=0}^{k} u'_{j+s}\right|, \tag{8}$$

что справедливо при любом выборе j и s. Для того чтобы этот результат стал более наглядным, удобно использовать следующую геометрическую интерпретацию векторов $|u\rangle$ и $|u'\rangle$. Сопоставим вектору $|u\rangle$ ломаную линию (Г), полученную путем совмещения концов векторов комплексной плоскости, описывающих последовательные компоненты $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Аналогично $|u'\rangle$ описывается ломаной линией (Г′), построенной из векторов, представляющих $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n, \ldots$. Соотношение (8) означает тогда, что расстояние между двумя любыми вершинами ломаной (Г) совпадает с расстоянием между двумя соответствующими вершинами ломаной (Г′). Как следствие: а) либо (Г) можно совместить с (Г′) поворотом; б) либо (Г) можно совместить с (Г′) поворотом и отражением относительно вещественной оси.

В случае а) выберем фазу $|u'\rangle$, требуя $u'_1 = u_1$. При таком выборе (Г) и (Г′) совпадают, т. е.

$$u'_n = u_n \text{ при всех } n.$$

В случае б) наш выбор фазы таков, что $u'_1 = u_1^*$. В этом случае (Г′) является зеркальным отражением ломаной (Г) относительно вещественной оси, т. е.

$$u'_n = u_n^* \text{ при всех } n.$$

Наконец, мы должны показать, что в действительности имеются лишь эти две возможности: либо все кет-векторы соответствуют случаю а), либо они все соответствуют случаю б).

Будем предполагать для конкретности, что заданный вектор $|j\rangle + e^{i\alpha}|k\rangle$ $(\alpha \neq n\pi)$ соответствует случаю а). Тогда всякий вектор $|u\rangle$, компоненты u_j и u_k которого не обращаются в нуль и имеют относительную фазу, отличную от $n\pi$, также соответствует случаю а), что легко получить применением условия (II) к скалярному произведению $|u\rangle$ с $|j\rangle + e^{i\alpha}|k\rangle$. Эти рассуждения могут быть применены и к векторам, компоненты u_j, u_k которых обращаются в нуль, либо имеют относительную фазу, равную $n\pi$. Те же аргументы переносятся и на случай б).

В результате получаем две возможности:

Случай а). При подходящем выборе фаз применимо соотношение (7а). В этом случае соответствие $\mathcal{T}$ очевидно

является линейным. Более точно, справедливо равенство

$$\langle u' \mid v' \rangle = \langle u \mid v \rangle, \tag{9а}$$

означающее, что $\mathcal{T}$ — линейный унитарный оператор.

Случай б). При подходящем выборе фаз применимо соотношение (7б). Отображение $\mathcal{T}$, очевидно, антилинейно.

В этом случае имеем

$$\langle u' \mid v' \rangle = \langle u \mid v \rangle^*. \tag{9б}$$

В соответствии с определением понятия унитарности для антилинейных операторов, которое приведено ниже, $\mathcal{T}$ является унитарным антилинейным оператором. ■

§ 3. Антилинейные операторы в гильбертовом пространстве

Свойства антилинейных операторов в гильбертовом пространстве аналогичны свойствам линейных операторов. Мы кратко опишем их в том же порядке, в котором в главе VII приведены свойства линейных операторов.

Определение. Действие на кет-векторы. Если каждому кет-вектору $|u\rangle$ в гильбертовом пространстве сопоставлен некоторый кет-вектор $|v\rangle$ и если это соответствие антилинейно, то мы говорим, что $|v\rangle$ является результатом действия на $|u\rangle$ некоторого антилинейного оператора A

$$|v\rangle = A|u\rangle. \tag{10}$$

Свойство антилинейности можно записать в виде

$$A(\lambda_1|1\rangle + \lambda_2|2\rangle) = \lambda_1^*(A|1\rangle) + \lambda_2^*(A|2\rangle). \tag{11}$$

Антилинейный оператор определяется своим действием на каждый из векторов полного набора линейно независимых векторов в $\mathcal{E}$ и, в частности, своим действием на элементы базиса в $\mathcal{E}$.

Алгебраические операции. Алгебраические операции определяются так же, как и в случае линейных операторов.

(i) Умножение на константу c. Если $c \neq c^*$, то следует отметить, что $Ac \neq cA$; справедливо равенство

$$cA = Ac^*. \tag{12}$$

(ii) Сумма двух антилинейных операторов определяется точно так же, как и сумма линейных операторов.

(iii) Произведения: если A_1, A_2 — антилинейные операторы, то произведение A_1A_2, определенное формулой

$$(A_1A_2)|u\rangle = A_1(A_2|u\rangle),$$

является линейным оператором. Если A — антилинейный оператор, а B — линейный, то их произведение AB антилинейно. В более общем случае, если набор $A, B, \ldots, L$ содержит $p+q$ операторов, из которых p линейных, а q антилинейных, то произведение $(AB\ldots L)$ линейно или антилинейно в соответствии с четностью или нечетностью q.

Описанные произведения все ассоциативны, но в общем случае не коммутативны. Определение коммутаторов совпадает с их определением в случае линейных операторов, и справедливы все обычные алгебраические правила (V. 63)—(V. 66).

Обратный оператор. Если соответствие (10) между векторами $|u\rangle$ и $|v\rangle$ взаимно однозначно, то оно определяет также и оператор A^{-1}, обратный оператору A

$$|u\rangle = A^{-1}|v\rangle.$$

По определению, два антилинейных оператора A и B являются обратными друг к другу, если одновременно выполняются соотношения

$$AB = 1, \quad BA = 1. \tag{13}$$

Если каждый из операторов $A, B, C, \ldots, L$ является либо линейным, либо антилинейным и если каждый из этих операторов имеет обратный, то оператор, обратный их произведению, существует и определяется формулой

$$(ABC\ldots L)^{-1} = L^{-1}\ldots C^{-1}B^{-1}A^{-1}. \tag{14}$$

Действие на бра-векторы. Пусть A антилинейный оператор, а $\langle\chi|$ — бра-вектор. Величина, комплексно сопряженная к скалярному произведению $\langle\chi|(A|u\rangle)$, будучи линейной функцией от $|u\rangle$ определяет некоторый бра-вектор (ср. § VII. 3), который мы обозначим $\langle\eta|$. По определению,

$$\langle\eta| = \langle\chi|A. \tag{15}$$

Соответствие между $\langle\chi|$ и $\langle\eta|$ антилинейно

$$(\lambda_1\langle 1| + \lambda_2\langle 2|)A = \lambda_1^*(\langle 1|A) + \lambda_2^*(\langle 2|A). \tag{16}$$

Из этого определения следует справедливость равенства

$$(\langle\chi|A)|u\rangle = [\langle\chi|(A|u\rangle)]^*. \tag{17}$$

Полученное соотношение полезно сравнить с аналогичным соотношением (VII. 17) для линейных операторов. Следует учесть, однако, что в антилинейном случае скобки опустить нельзя.

Для определения трех указанных выше алгебраических операций и действия обратного оператора на бра-векторы мы поступим точно так же, как и в случае линейных операторов.

Умножение на постоянную c имеет вид (ср. ур. (12)):

$$\langle\chi\,|\,(cA) = c^*(\langle\chi\,|\,A) = \langle\chi\,|\,(Ac^*). \tag{18}$$

Остальные определения переносятся без изменения.

Важное замечание. Соотношения (12) и (17) показывают различия в определении обычных линейных операций и операций, содержащих антилинейные операторы:

(i) рассматриваемая как оператор, действующий в кет-пространстве или бра-пространстве, постоянная c не коммутирует с антилинейными операторами, кроме случая, когда эта постоянная вещественна;

(ii) в скалярном произведении надо четко указывать, действует ли антилинейный оператор A на кет-вектор, стоящий справа от него, или на бра-вектор, стоящий слева.

В практических расчетах скобки используются в той степени, в которой они необходимы для исключения каких-либо сомнений, связанных со значением используемых символов. Рассмотрим, например, произведение A_1A_2 двух антилинейных операторов. Символ $\langle u|A_1A_2|v\rangle$ является неопределенным, тогда как символ

$$\begin{aligned}\langle u\,|\,(A_1A_2)\,|\,v\rangle &= (\langle u\,|\,A_1A_2)\,|\,v\rangle = [(\langle u\,|\,A_1)\,(A_2|\,v\rangle)]^* = \\ &= \langle u\,|\,(A_1A_2\,|\,v\rangle)\end{aligned} \tag{19}$$

не вызывает никаких недоразумений. Аналогично при рассмотрении произведения $(A|u\rangle\langle v|)$ линейного оператора $|u\rangle\langle v|$ и антилинейного оператора A запись $A|u\rangle\langle v|w\rangle$ и $\langle w|A|u\rangle\langle v|$ непонятна, тогда как без каких-либо недоразумений можно использовать запись

$$(A\,|\,u\rangle\langle v\,|)\,|\,w\rangle = A\,(|\,u\rangle\langle v\,|w\rangle) = (A\,|\,u\rangle)\,\langle v\,|w\rangle^* \tag{20}$$

и

$$\langle w\,|\,(A\,|u\rangle\langle v\,|) = (\langle w\,|\,A)\,|\,u\rangle\langle v\,| = [\langle w\,|\,(A\,|u\rangle)]^*\langle v\,|. \tag{21}$$

§ 4. Антиунитарные преобразования

Сопряжение (или эрмитово сопряжение) антилинейных операторов. Оператор $A^\dagger$ является, по определению, сопряженным оператором к антилинейному оператору A, если $A^\dagger|u\rangle$ является кет-вектором, сопряженным к $\langle u|A$ при любом $|u\rangle$. Этот оператор антилинеен.

Из сказанного следует, что для любых кет-векторов $|u\rangle$ и $|t\rangle$

$$\langle t\,|\,(A^\dagger\,|\,u\rangle) = \langle u\,|\,(A\,|t\rangle). \tag{22}$$

Это тождество следует сравнить с (VII. 20). Помимо этого равенства, все свойства, установленные в § VII. 7, могут быть перенесены на рассматриваемый случай без изменений.

В частности, если каждый из операторов $A, B, C, \ldots, L$ является либо линейным, либо антилинейным, то (ср. ур. (14))

$$(ABC \ldots L)^{\dagger} = L^{\dagger} \ldots C^{\dagger} B^{\dagger} A^{\dagger}. \tag{23}$$

Антиунитарный оператор. Оператор A называется антиунитарным, если он антилинеен и если $A^{-1} = A^{\dagger}$

$$AA^{\dagger} = A^{\dagger}A = 1.$$

Если в наборе $A, B, C, \ldots, L$ $(p+q)$ операторов имеется p унитарных и q антиунитарных, то произведение $ABC \ldots L$ унитарно или антиунитарно в соответствии с четностью или нечетностью q.

Антиунитарные преобразования линейных операторов и векторов. Антиунитарный оператор K определяет антиунитарное преобразование векторов и линейных операторов в $\mathscr{E}$, при котором:

любой кет-вектор $|u\rangle$ переходит в $|\hat{u}\rangle \equiv K|u\rangle$;

любой линейный оператор B переходит в $\hat{B} \equiv KBK^{\dagger}$;

любой бра-вектор $\langle v|$ переходит в $\langle \hat{v}| \equiv \langle v|K^{\dagger}$.

При таком преобразовании;

(i) сохраняется отношение сопряженности бра- и кет-векторов и отношение эрмитовой сопряженности операторов. Если B является наблюдаемой, то $\hat{B}$ — также наблюдаемая с тем же спектром собственных значений, а подпространство, соответствующее каждому из собственных значений оператора B, переходит в подпространство, соответствующее тому же собственному значению оператора $\hat{B}$;

(ii) скалярные произведения переходят в комплексно сопряженные

$$\langle \hat{u} | \hat{B} | \hat{v} \rangle = \langle u | B | v \rangle^{*}; \tag{24}$$

(iii) любая постоянная c, рассматриваемая как оператор, преобразуется в комплексно сопряженную величину

$$KcK^{\dagger} = c^{*}; \tag{25}$$

(iv) любое соотношение между векторами и (или) операторами справедливо также и для преобразованных величин при замене всех коэффициентов на комплексно сопряженные. Другими словами, преобразование K сохраняет все равенства между векторами и (или) операторами, если условиться рассматривать все постоянные, фигурирующие в равенстве, как операторы. Например, перестановочные соотношения

$$[q, p] = i\hbar, \quad [J_x, J_y] = i\hbar J_z \tag{26а}$$

переходят соответственно в

$$[\hat{q}, \hat{p}] = -i\hbar, \quad [\hat{J}_x, \hat{J}_y] = -i\hbar \hat{J}_z. \tag{26б}$$

§ 5. Антилинейные операторы и представления

Оператор K_Q комплексного сопряжения, связанный с представлением $\{Q\}$. По определению, K_Q является оператором, переводящим волновые функции представления $\{Q\}$ в комплексно сопряженные функции. *Действие оператора K_Q зависит от рассматриваемого представления и в особенности от выбора фаз базисных векторов.*

Пусть $|1\rangle$, $|2\rangle$, ..., $|n\rangle$, ... — базисные векторы представления $\{Q\}$. Тогда K_Q — антилинейный оператор, оставляющий эти векторы инвариантными,

$$K_Q|n\rangle = |n\rangle. \tag{27}$$

Следовательно, K_Q полностью определен. Очевидно, что выполнены соотношения

$$K_Q^\dagger = K_Q, \quad K_Q^2 = 1, \tag{28}$$

так что K_Q — антиунитарен. Ясно, что для K выполняется упомянутое выше свойство, а именно: *при антиунитарном преобразовании K_Q матрицы представления $\{Q\}$ переходят в комплексно-сопряженные*, таким образом, мы имеем

$$\langle n|(K_Q|u\rangle) = \langle n|u\rangle^*, \quad (\langle v|K_Q)|n\rangle = \langle v|n\rangle^*,$$
$$\langle m|(K_Q B K_Q)|n\rangle = \langle m|B|n\rangle^* \quad (B \text{ — линейный оператор}).$$

Таким образом, в представлении $\{Q\}$ действие оператора K_Q состоит исключительно в переходе к комплексно сопряженным величинам. Действие любого другого антилинейного оператора A можно легко определить, заметив, что A является произведением K_Q и линейного оператора, т. е. A всегда можно представить в виде

$$A = (AK_Q)K_Q = K_Q(K_Q A), \tag{29}$$

где (AK_Q) и $(K_Q A)$ — линейные операторы, переходящие друг в друга при преобразовании K_Q

$$K_Q A = K_Q(AK_Q)K_Q$$

(если A антиунитарен, то $(K_Q A)$ и (AK_Q) унитарны).

Изменение представления. Рассмотрим другое представление $\{\Xi\}$. Обозначим K_Ξ оператор комплексного сопряжения, связанный с этим представлением, в остальном будем следовать обозначениям § VII. 21. В частности, матрицей преобразования векторов и *линейных* операторов служит унитарная матрица $S(\xi; n) \equiv \langle\xi|n\rangle$.

Если эта матрица вещественна, то векторы нового базиса инвариантны относительно действия оператора K_Q, иными словами,

$$\text{если } S = S^*, \text{ то } K_\Xi = K_Q.$$

В этом случае линейные операторы AK_Ξ и $K_\Xi A$, соответствующие в представлении $\{\Xi\}$ заданному антилинейному оператору, те же, что и операторы, соответствующие A в представлении $\{Q\}$.

Если это не так, то оператор AK отличен от AK_Q. Полезно найти способ построения матрицы $(AK_\Xi)_\Xi$, описывающей оператор AK_Ξ в представлении $\{\Xi\}$ по матрице $(AK_Q)_Q$, оператора AK_Q в представлении $\{Q\}$. Имеем

$$\begin{aligned}\langle\xi|(AK_\Xi)|\xi'\rangle &= \langle\xi|(AK_Q)(K_QK_\Xi)|\xi'\rangle = \\ &= \sum_{mn}\langle\xi|m\rangle\langle m|(AK_Q)|n\rangle\langle n|(K_QK_\Xi)|\xi'\rangle = \\ &= \sum_{mn}\langle\xi|m\rangle\langle m|(AK_Q)|n\rangle\langle n|\xi'\rangle^*,\end{aligned}$$

т. е.

$$(AK_\Xi)_\Xi = S(AK_Q)_Q\tilde{S}. \tag{30}$$

Аналогично

$$(K_\Xi A)_\Xi = (AK_\Xi)^*_\Xi = S^*(K_QA)_Q S^\dagger. \tag{31}$$

Раздел II. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 6. Преобразования динамических переменных и динамических состояний системы

Выше мы уже определили понятия «вращение физической системы» и «перестановка частиц физической системы».

В более общем случае, действие преобразования $\mathcal{T}$ на систему состоит в замене каждой из ее переменных на новую переменную, а каждого состояния — на новое состояние при сохранении физических характеристик системы.

Таким образом, преобразование $\mathcal{T}$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между динамическими переменными: заданная переменная B преобразуется в новую переменную

$$B' \equiv \mathcal{T}[B].$$

По предположению образ B' имеет тот же спектр, что и B, а собственные состояния для каждого собственного значения переменной B' являются образами собственных состояний, соответствующих тому же собственному значению переменной B. Эти два условия выражают требование сохранения физических свойств при преобразовании динамических переменных. Такое условие можно сформулировать без ссылки на методы измерения, однако преобразование $\mathcal{T}$ особенно легко описать как преобразование, применяемое к измерительной аппаратуре, предназначенной для определения B: образ этой аппаратуры есть