В этом случае линейные операторы AK_Ξ и $K_\Xi A$, соответствующие в представлении $\{\Xi\}$ заданному антилинейному оператору, те же, что и операторы, соответствующие A в представлении $\{Q\}$.

Если это не так, то оператор AK отличен от AK_Q. Полезно найти способ построения матрицы $(AK_\Xi)_\Xi$, описывающей оператор AK_Ξ в представлении $\{\Xi\}$ по матрице $(AK_Q)_Q$, оператора AK_Q в представлении $\{Q\}$. Имеем

$$\begin{aligned}\langle\xi|(AK_\Xi)|\xi'\rangle &= \langle\xi|(AK_Q)(K_QK_\Xi)|\xi'\rangle = \\ &= \sum_{mn}\langle\xi|m\rangle\langle m|(AK_Q)|n\rangle\langle n|(K_QK_\Xi)|\xi'\rangle = \\ &= \sum_{mn}\langle\xi|m\rangle\langle m|(AK_Q)|n\rangle\langle n|\xi'\rangle^*,\end{aligned}$$

т. е.

$$(AK_\Xi)_\Xi = S(AK_Q)_Q\tilde{S}. \tag{30}$$

Аналогично

$$(K_\Xi A)_\Xi = (AK_\Xi)^*_\Xi = S^*(K_QA)_Q S^\dagger. \tag{31}$$

Раздел II. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 6. Преобразования динамических переменных и динамических состояний системы

Выше мы уже определили понятия «вращение физической системы» и «перестановка частиц физической системы».

В более общем случае, действие преобразования $\mathcal{T}$ на систему состоит в замене каждой из ее переменных на новую переменную, а каждого состояния — на новое состояние при сохранении физических характеристик системы.

Таким образом, преобразование $\mathcal{T}$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между динамическими переменными: заданная переменная B преобразуется в новую переменную

$$B' \equiv \mathcal{T}[B].$$

По предположению образ B' имеет тот же спектр, что и B, а собственные состояния для каждого собственного значения переменной B' являются образами собственных состояний, соответствующих тому же собственному значению переменной B. Эти два условия выражают требование сохранения физических свойств при преобразовании динамических переменных. Такое условие можно сформулировать без ссылки на методы измерения, однако преобразование $\mathcal{T}$ особенно легко описать как преобразование, применяемое к измерительной аппаратуре, предназначенной для определения B: образ этой аппаратуры есть

аппаратура, предназначенная для измерения переменной B'. Таким образом, определяются смещения динамических переменных (вращения, сдвиги), отражения динамических переменных (отражение в точке, в плоскости) и т. д.

От преобразования переменных легко перейти к преобразованию состояний. Пусть $|u\rangle$ — вектор, описывающий возможное динамическое состояние системы. Этот вектор можно рассматривать как общий собственный вектор полного набора коммутирующих наблюдаемых и считать, что он определен с точностью до фазы. Образ вектора $|u\rangle$ при преобразовании $\mathcal{T}$

$$|u'\rangle \equiv \mathcal{T}[|u\rangle]$$

является общим собственным вектором преобразованных наблюдаемых. Таким образом, $\mathcal{T}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между векторами состояния, определенными с точностью до фазы.

По определению, преобразование сохраняет физические свойства динамических состояний: для системы, находящейся в состоянии $|u'\rangle$, вероятность того, что при измерении будет получен результат, соответствующий состоянию $|v'\rangle$, т. е. образу состояния $|v\rangle$, равна вероятности того, что для системы, находящейся в состоянии $|u\rangle$, при том же измерении будет получен результат, соответствующий состоянию $|v\rangle$. Иными словами, $|\langle u'|v'\rangle|^2 = |\langle u|v\rangle|^2$ для всех $|u\rangle$ и $|v\rangle$. Таким образом, рассматриваемое взаимно-однозначное соответствие сохраняет модуль скалярного произведения. Согласно теореме III фазы преобразованных векторов всегда можно фиксировать так, чтобы преобразование стало унитарным или антиунитарным. Это позволяет записать

$$|u'\rangle = T|u\rangle, \tag{32}$$

где T — унитарный или антиунитарный оператор, соответствующий преобразованию. В обоих случаях имеем

$$TT^\dagger = T^\dagger T = 1. \tag{33}$$

Из закона (32) преобразования векторов легко получить закон преобразования оператора плотности

$$\rho' = T\rho T^\dagger. \tag{34}$$

Рассмотрим еще одно преобразование наблюдаемых. Поскольку физические свойства сохраняются при рассматриваемых преобразованиях, то сохраняются и средние значения. Таким образом, для наблюдаемой B для всех $|u\rangle$ имеем

$$\langle u'|B'|u'\rangle = \langle u|B|u\rangle$$

или[1])

$$\langle u \,|\, (T^\dagger B' T)\, u\rangle = \langle u \,|\, B \,|\, u\rangle.$$

Из теоремы I и соотношений (33) имеем

$$B' = TBT^\dagger, \quad B = T^\dagger B' T. \tag{35}$$

Из равенств (35) следует важное свойство неизменности алгебраических соотношений между наблюдаемыми системы в случае, когда преобразование описывается линейным оператором T. Если же T антилинеен, то эти соотношения заменяются на комплексно сопряженные соотношения.

Это приводит к весьма ограничительным условиям на законы преобразования наблюдаемых. Всякая наблюдаемая B является некоторой *вещественной* функцией $F(\xi)$ фундаментальных наблюдаемых $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ системы. Образ этой наблюдаемой есть $B' \equiv F(\xi')$ Итак, *преобразование $\mathcal{T}$ полностью определяется, если известны законы преобразования основных наблюдаемых*, т. е. если известны функции $f_1(\xi), \ldots, f_n(\xi), \ldots$, такие, что

$$\mathcal{T}[\xi_n] \equiv \xi'_n = f_n(\xi).$$

Последнее определяет также перестановочные соотношения для наблюдаемых ξ'. Так как преобразования обязаны сохранять алгебраические соотношения, то имеется всего две возможности: *либо преобразование сохраняет фундаментальные перестановочные соотношения, либо меняет их знак*[2]). В первом случае оператор T, соответствующий преобразованию, линеен, во втором — антилинеен (см. ур. (26а — 26б)).

Оператор T должен удовлетворять равенствам

$$\xi'_n = T\xi_n T^\dagger, \tag{36}$$

содержащим все физические свойства T. Однако этих равенств недостаточно для полного определения T. Пусть T_1 — другой

---

[1]) В случае, когда оператор T линеен, эти соотношения очевидны, они справедливы также и при антилинейном T, так как $\langle u|B|u\rangle$ вещественны.

[2]) Преобразованиями классической механики являются преобразования, сохраняющие скобки Пуассона

$$\{A_{\text{cl}}, B_{\text{cl}}\}$$

каждой пары $(A_{\text{cl}}, B_{\text{cl}})$ динамических переменных системы (канонические преобразования). Аналогично преобразованиями, сохраняющими физические свойства в квантовой механике, будут те преобразования, которые сохраняют соответствующие выражения

$$\frac{1}{i\hbar}[A, B].$$

унитарный (или антиунитарный) оператор, удовлетворяющий тем же соотношениям. Тогда имеем (опуская индекс n для упрощения записи)

$$T_1^\dagger \xi' T_1 = \xi$$

и, следовательно,

$$T_1^\dagger T \xi T^\dagger T_1 = \xi$$

или

$$[T_1^\dagger T, \xi] = 0 \text{ для всех } \xi. \tag{37}$$

Если предполагать *неприводимость* пространства состояний $\mathscr{E}$ по отношению к наблюдаемым ξ, т. е. что в $\mathscr{E}$ не содержится подпространств, инвариантных относительно ξ, то равенства (37) удовлетворяются тогда и только тогда, когда оператор $T_1^\dagger T$ пропорционален единичному.

Этот результат следует из леммы Шура (§ Г. 8). Ему можно дать прямое доказательство следующим образом. Пусть $|u\rangle$ — общий собственный вектор *полного* набора коммутирующих наблюдаемых. Поскольку $C \equiv T_1^\dagger T$ коммутирует с каждой из этих наблюдаемых, то $|u\rangle$ является собственным вектором C: $C|u\rangle = c|u\rangle$. Поскольку C коммутирует с каждой функцией $F(\xi)$ наблюдаемых системы, то имеем также и

$$CF(\xi)|u\rangle = cF(\xi)|u\rangle \text{ при всех } F(\xi).$$

Пространство, образованное векторами $F(\xi)|u\rangle$, является подпространством в $\mathscr{E}$, инвариантным относительно ξ, а так как $\mathscr{E}$, по предположению, неприводимо, то этим подпространством может быть лишь само $\mathscr{E}$. Следовательно $C = c$.

Если предполагать, как мы и делали до сих пор, что каждый вектор пространства состояний можно рассматривать как собственный вектор некоторого полного набора коммутирующих наблюдаемых, то свойство неприводимости выполняется автоматически (задача 1). Ясно, что приведенное выше обсуждение имеет смысл только в том случае, когда используемые наблюдаемые являются физическими наблюдаемыми. Мы всегда будем предполагать, что пространство $\mathscr{E}$ неприводимо по отношению к физическим наблюдаемым [1]). В этом предположении постоянная c равна единице по модулю, поскольку T и T_1 унитарны. Итак, имеем

$$T_1 = e^{i\alpha} T.$$

Вывод: *с каждым преобразованием $\mathscr{T}$ связан унитарный или антиунитарный оператор T, определенный с точностью до фазы законами преобразования фундаментальных переменных си-*

---

[1]) См. ссылку в § XIII. 14 на работу, в которой неприводимость не предполагается.

стемы (ур. (36)). *Оператор T унитарен, если преобразование сохраняет перестановочные соотношения, и антиунитарен, если преобразование изменяет знак перестановочных соотношений.*

Фаза оператора T может быть выбрана произвольно и не влияет ни на физические свойства преобразования, ни на законы преобразования наблюдаемых и операторов плотности, ни на различные алгебраические операции над операторами.

§ 7. Группы преобразований

Из различных имеющихся в нашем распоряжении преобразований мы можем образовать некоторое число *групп* преобразований, где термин группа используется в его математическом понимании (ср. § Г. 2).

Произведение $\mathcal{T}_{21} \equiv \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ преобразований $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ является преобразованием, которое состоит в применении $\mathcal{T}_2$ к результату действия $\mathcal{T}_1$. Преобразующий оператор T_{21} с точностью до фазового множителя равен произведению T_2T_1. Это произведение *ассоциативно*, но не обязательно должно быть коммутативным.

Тождественное преобразование $\mathcal{I}$ — преобразование, при котором каждая наблюдаемая переходит в себя. Соответствующий этому преобразованию оператор является оператором умножения на произвольный фазовый множитель.

Обратное преобразование $\mathcal{T}^{-1}$ определяется соотношением $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T} = \mathcal{T}\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{I}$. Поскольку $\mathcal{T}$ определяет взаимно однозначное соответствие, то обратное преобразование всегда существует.

Итак, каждое из преобразований, описанных в § 6, можно рассматривать как элемент некоторой группы $\mathcal{G}$.

Среди всевозможных групп *группа пространственных преобразований* (трансляций, вращений и отражений) *и ее разнообразные подгруппы* являются группами, физическое значение которых очевидно. Среди подгрупп этой группы следует упомянуть группу трансляций, группу вращений (вокруг точки), группу смещений (трансляций и вращений), группы отражений относительно точки и относительно плоскости, группу вращений и отражений (вращения вокруг точки и отражения относительно той же точки), группы симметрии кристаллов.

В предыдущей главе мы встретились с группами другого типа — *группами перестановок* подобных частиц. Мы также рассматривали перестановки, которые затрагивали только часть переменных, описывающих частицы. В частности, там была введена группа преобразований в зарядовом пространстве, с которой в случае системы нуклонов связана *группа изотопических вращений*, или группа вращений в зарядовом пространстве.

Преобразования, явно затрагивающие время, удобно рассмотреть отдельно. Среди них, в первую очередь, следует отметить преобразования Галилея, которые мы упоминаем здесь для полноты (задача 7). Они являются нерелятивистскими аналогами чисто лоренцевских преобразований. Последние вместе с пространственными вращениями образуют собственную группу Лоренца, которая будет обсуждена в пятой части. Имеется также группа временных сдвигов и, наконец, операция обращения времени. Временные трансляции и обращение времени будут изучаться в разделе IV. В оставшейся части настоящего раздела мы будем рассматривать только преобразования, не затрагивающие время явно.

§ 8. Группы операторов преобразований

Пусть $[\mathcal{T}]$ — множество преобразований $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_i, \ldots$. Каждому элементу $\mathcal{T}_i$ этого множества можно сопоставить оператор T_i, определяющий преобразование векторов и операторов в пространстве состояний. Оператор T задается своими физическими свойствами только с точностью до фазового множителя, который мы пока оставляем произвольным. Мы получим множество $[T]$ операторов преобразования, элементы которого находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами из $[\mathcal{T}]$.

Предположим теперь, что $[\mathcal{T}]$ является некоторой группой $\mathcal{G}$. Отсюда еще не следует, что множество $[T]$ является группой. Действительно, при указанном соответствии между $[\mathcal{T}]$ и $[T]$ произведения сохраняются только с точностью до фазового множителя. Для каждого произведения

$$\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_j \mathcal{T}_i$$

имеем

$$T_k = e^{i\alpha_{ji}^k} T_j T_i,$$

где α_{ij}^k — некоторая фаза, зависящая от выбора фазы у T_i, T_j и T_k. Для того чтобы $[T]$ было группой, надо чтобы все α_{ji} обращались в нуль. Тогда группа $[T]$ изоморфна группе $\mathcal{G}$.

Если фазы операторов T_i могут быть выбраны так, чтобы $[T]$ было группой, то такой выбор, очевидно, является наиболее удобным. Такая возможность имеется для ряда групп, но не для всех. В частности, это возможно для группы перестановок (гл. XIV), но невозможно для группы вращений (§ XIII. 5), если система содержит нечетное число частиц с полуцелым спином. В последнем случае операторы вращений $R(\alpha\beta\gamma)$, определяемые соотношением (XIII. 60), образуют группу, однако каждому вращению $\mathcal{R}$ соответствуют два оператора R, отличающиеся друг от друга знаком. Если мы выберем один из них в качестве

элемента множества $[R]$, то мы установим взаимно однозначное соответствие между вращениями и операторами вращений, однако произведение сохранится лишь с точностью до знака и множество $[R]$ не будет группой.

Для получения множества операторов преобразования может оказаться необходимым сопоставлять каждому преобразованию $\mathcal{T}_i$ не один оператор T_i, а набор (T_i) операторов, отличающихся друг от друга фазовым множителем. Если набор (T_i) выбран подходящим образом, то полученное множество $\{T\}$ операторов преобразования образует группу G, гомоморфную группе $\mathcal{G}$. Пусть (1) — множество операторов, каждый из которых соответствует тождественному преобразованию $\mathcal{J}$. Элементами множества (1) являются единичный оператор 1 и, возможно, другие операторы, получаемые из 1 умножением на фазовый множитель. Множество (1) является инвариантной подгруппой в группе G, а фактор-группа $G/(1)$ изоморфна $\mathcal{G}$ (ср. § Г. 5).

Таким образом, можно построить много множеств $\{T\}$, имеющих структуру группы [1]). Практически мы выбираем одно из них. Очевидно, что следует выбирать множество $\{T\}$ по возможности более простым. В результате мы получим группу операторов G, гомоморфную группе $\mathcal{G}$.

Во всех случаях, встретившихся к настоящему времени в квантовой теории, всегда удается выбрать G так, чтобы каждому элементу группы $\mathcal{G}$ соответствовал *либо один оператор из* G (изоморфизм), *либо, если это не так, два оператора из* G, *различающихся знаком*. Первый вариант всегда осуществляется в случае системы, содержащей четное число полуцелых спинов. Выше мы уже имели пример реализации второго варианта при рассмотрении вращений полуцелых спинов. Мы встретимся со вторым вариантом также при рассмотрении обращения времени. Более того, второй вариант всегда реализуется, когда система имеет нечетное число частиц с полуцелым спином.

§ 9. Непрерывные группы и инфинитезимальные преобразования. Трансляции. Вращения

В качестве иллюстрации общей теории построим группы операторов G для некоторых групп $\mathcal{G}$. Сперва рассмотрим непрерывные группы, которые имеют бесконечное число элемен-

---

[1]) Наиболее сложное из этих множеств получается при сопоставлении каждому преобразованию $\mathcal{T}_i$ всех операторов, удовлетворяющих (36): в этом случае все элементы из (T_i) получаются домножением одного из них на фазовый множитель. Практически всегда можно наложить на T_i условие вещественности, фиксирующее фазовый множитель с точностью до знака без нарушения группового свойства. Множество (T_i) тогда состоит точно из двух элементов, отличающихся друг от друга знаком (см. сноску к § XV. 17).

тов, зависящих от одного или нескольких непрерывно меняющихся параметров, точнее, те группы, у которых все конечные преобразования могут быть представлены рядами инфинитезимальных. Это справедливо для группы вращений и группы пространственных трансляций. В этом случае для получения преобразования наблюдаемых под действием любого элемента группы оказывается достаточным установить лишь преобразование наблюдаемых под действием инфинитезимальных операций. Каждому инфинитезимальному преобразованию группы можно сопоставить инфинитезимальный оператор преобразования, т. е. унитарный оператор, бесконечно мало отличающийся от 1 [1]).

Предположим для простоты, что элемент группы зависит лишь от одного непрерывного параметра α и что последний выбран так, что

$$\mathscr{T}(\alpha) \xrightarrow[\alpha \to 0]{} \mathscr{I}.$$

В первом порядке по $\delta\alpha$ оператор, соответствующий $\mathscr{T}(\delta\alpha)$, имеет вид

$$T(\delta\alpha) = 1 - i\Theta\delta\alpha,$$

где Θ — эрмитов оператор (так как T унитарен).

Если наблюдаемая ξ преобразуется в $\xi + \delta\xi$ при преобразовании $\mathscr{T}(\delta\alpha)$, то мы имеем (ур. (VII. 96))

$$\delta\xi = -i\delta\alpha[\Theta, \xi],$$

т. е.

$$[\Theta, \xi] = i\frac{\delta\xi}{\delta\alpha}. \tag{38}$$

При заданном преобразовании $\mathscr{T}(\delta\alpha)$ величины $\delta\xi/\delta\alpha$ известны и соотношения (38) определяют Θ с точностью до постоянной [2]).

---

[1]) Этот оператор не может быть антиунитарным. Рассмотрим две некоммутирующие наблюдаемые. При инфинитезимальном преобразовании они изменятся только инфинитезимально, так что их коммутатор не может претерпеть конечного изменения и, в частности, не может изменить знак.

[2]) В классической механике вариация $\delta\alpha\,\partial\xi/\partial\alpha$ каждой наблюдаемой ξ при инфинитезимальном смещении $\mathscr{T}(\delta\alpha)$ определяется скобкой Пуассона

$$\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} = \{\tau, \xi\},$$

где τ — сопряженный импульс, соответствующий α. Наблюдаемая $\hbar\Theta$ является квантовым аналогом τ. (При бесконечно малом вращении вокруг $\boldsymbol{u}$ τ — компонента момента импульса вдоль $\boldsymbol{u}$; при трансляции вдоль $\boldsymbol{u}$ τ является компонентой импульса вдоль $\boldsymbol{u}$.)

Рассмотрим, для примера, смещение частицы вдоль оси Ox. Пусть $\boldsymbol{r} \equiv (x, y, z)$ — координата, $\boldsymbol{p} \equiv (p_x, p_y, p_z)$ — импульс, а $\boldsymbol{s} \equiv (s_x, s_y, s_z)$ — спин частицы. При трансляции $\mathcal{T}_x(a)$ на расстояние a вдоль оси Ox девять основных переменных инвариантны, за исключением x, которая переходит в $x - a$ [1])

$$T(a)\, x T^{\dagger}(a) = x - a. \tag{39}$$

В частности, при инфинитезимальном преобразовании $\mathcal{T}_x(\delta a)$, $\delta x = -\delta a$, а все остальные вариации $\delta y, \ldots, \delta s_z$ обращаются в нуль. Соответствующий эрмитов оператор Θ_x удовлетворяет перестановочным соотношениям

$$[\Theta_x, x] = -i,$$
$$[\Theta_x, y] = \ldots = [\Theta_x, s_z] = 0,$$

что дает

$$\Theta_x = \frac{p_x}{\hbar} + k_0,$$

где k_0 — произвольная вещественная постоянная, которую мы положим равной нулю. Это изложение легко распространяется на случай трансляций N частиц и дает

$$\Theta_x = \frac{P_x}{\hbar}, \tag{40}$$

где $P_x = \sum_{i=1}^{N} p_x^{(i)}$ — *компонента вдоль оси Ox полного импульса системы N частиц.*

Инфинитезимальному сдвигу $\mathcal{T}_x(\delta a)$, таким образом, соответствует инфинитезимальный унитарный оператор

$$T_x(\delta a) = 1 - \frac{i}{\hbar} P_x \delta a.$$

Оператор конечного преобразования $T_x(a)$ можно выбрать в виде

$$T_x(a) = \exp(-iP_x a/\hbar),$$

---

[1]) Образ x' прообраза x действительно есть $x - a$, а не $x + a$. Пусть $|b\rangle$ — собственный вектор оператора x, соответствующий собственному значению b. Его образ $|b'\rangle$ является собственным вектором оператора x, соответствующим собственному значению $b + a$

$$x\,|b\rangle = b\,|b\rangle, \quad x\,|b'\rangle = (b + a)\,|b'\rangle.$$

Но из определения преобразования наблюдаемых имеем

$$x'\,|b'\rangle = b\,|b'\rangle,$$

откуда

$$x' = x - a.$$

Эту аргументацию полезно сравнить с доказательством из § XIII. 12.

что легко проверяется подстановкой этого выражения в соотношение (39).

Полученные таким образом операторы образуют группу, изоморфную группе сдвигов вдоль оси Ox. В частности, мы имеем

$$T_x(a)\,T_x(b) = T_x(b)\,T_x(a) = T_x(a+b).$$

Группа сдвигов вдоль оси Ox является подгруппой группы трансляций. Конкретный сдвиг $\mathcal{T}(\boldsymbol{a})$ определяется вектором $\boldsymbol{a}$, задающим смещение динамических состояний системы. Группа трансляций, таким образом, зависит от трех непрерывных параметров — компонент вектора $\boldsymbol{a}$. Закон композиции в этой группе имеет вид

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{a})\,\mathcal{T}(\boldsymbol{b}) = \mathcal{T}(\boldsymbol{b})\,\mathcal{T}(\boldsymbol{a}) = \mathcal{T}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

Обобщая полученные выше результаты на случай произвольных трансляций, сопоставим инфинитезимальному сдвигу $\mathcal{T}(\boldsymbol{\varepsilon})$ оператор

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}) \approx 1 - \frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}), \tag{41}$$

где $\boldsymbol{P}$ — полный импульс системы N частиц. Из сказанного ранее следует, что оператор, связанный с трансляцией $\mathcal{T}(\boldsymbol{a})$, имеет вид

$$T(\boldsymbol{a}) = \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{P}\boldsymbol{a}/\hbar}. \tag{42}$$

Определенные таким образом операторы образуют группу, изоморфную группе трансляций, ибо

$$T(\boldsymbol{a})\,T(\boldsymbol{b}) = T(\boldsymbol{b})\,T(\boldsymbol{a}) = T(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

Группа вращений дает еще один пример непрерывной группы с тремя параметрами. Операторы вращений уже были найдены в главе XIII. Определяющую их формулу (XIII. 55) следует сравнить с формулой (41). Полный момент импульса $\boldsymbol{J}$ играет в группе вращений ту же роль, что и оператор полного импульса $\boldsymbol{P}$ в группе трансляций. Компонента $(\boldsymbol{u}\boldsymbol{J})$ полного момента импульса вдоль $\boldsymbol{u}$ определена с точностью до постоянной перестановочными соотношениями (XIII. 56) и (XIII. 57), которые соответственно описывают инфинитезимальные вращения скалярных и векторных наблюдаемых. Произвольная постоянная может быть фиксирована требованием, чтобы момент $\boldsymbol{J}$ был векторным оператором [1]).

Операторы вращений R определяются как произведения инфинитезимальных вращений. Это приводит к формуле (XIII. 60),

---

[1]) Это условие эквивалентно требованию, чтобы операторы $R_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\varepsilon})$ были инфинитезимальными операторами группы.

которую следует сравнить с формулой (42). Указанные операторы образуют группу, изоморфную группе вращений, если система содержит четное число полуцелых спинов, и только гомоморфна ей, если система содержит нечетное число полуцелых спинов. Этот вопрос уже обсуждался нами, и мы не будем его рассматривать здесь снова.

Множество операторов T и R, которые определены формулами (42) и (60), и всевозможные произведения этих операторов также образуют группу. Если система содержит четное число полуцелых спинов, эта группа изоморфна группе смещений, если это не так, то рассматриваемая группа только гомоморфна группе смещений, и два оператора, отличающиеся знаком, соответствуют каждому из элементов последней.

§ 10. Конечные группы. Отражения

Среди всех групп простейшей, безусловно, является группа отражений в точке. Она содержит всего два элемента, тождественный элемент $\mathcal{I}$ и отражение $\mathcal{P}_0$: $\mathcal{P}_0^2 = \mathcal{I}$. При преобразовании $\mathcal{P}_0$ полярные векторы $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ меняют знак, а аксиальные векторы $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{s}$ не меняются. Поскольку $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$ одновременно изменяют знаки, это преобразование сохраняет перестановочные соотношения орбитальных переменных, а также перестановочные соотношения компонент спина. Следовательно, оператор S_0, определяющий отражение, линеен. Он является унитарным оператором, удовлетворяющим соотношениям

$$\begin{aligned} S_0 \boldsymbol{r} S_0^\dagger &= -\boldsymbol{r}, \\ S_0 \boldsymbol{p} S_0^\dagger &= -\boldsymbol{p}, \\ S_0 \boldsymbol{s} S_0^\dagger &= \boldsymbol{s}, \end{aligned} \tag{43}$$

которыми он определяется с точностью до фазы. Для того чтобы операторы S_0 и 1 образовывали группу, изоморфную группе отражений, мы должны потребовать выполнения равенства

$$S_0^2 = 1 \qquad (S_0 = S_0^\dagger), \tag{44}$$

которое фиксирует фазу S_0 с точностью до знака.

Оператор S_0 полностью определяется своим действием на базисные векторы представления, например, представления $\{\boldsymbol{r}, s_z\}$. Мы примем следующее определение:

$$S_0 \,|\, \boldsymbol{r}\mu\rangle = |\,(-\boldsymbol{r})\,\mu\rangle, \tag{45}$$

которое согласовано с соотношениями (43) и (44) (задача 2). Тогда отражение волновой функции описывается соотношением

$$S_0 \psi(\boldsymbol{r}, \mu) = \psi(-\boldsymbol{r}, \mu).$$

Таким образом, оператор S_0 *совпадает* с оператором четности, введенным в § XIII. 23. Он является наблюдаемой с двумя собственными значениями, ± 1. Приведенное рассмотрение без труда можно распространить на случай систем, состоящих из нескольких частиц.

Отражение коммутирует со всеми вращениями $\mathcal{R}$. Произведения операций группы отражений и группы вращений образуют группу вращений и отражений. Отметим также, что S_0 коммутирует с любым оператором вращений, поскольку последние являются функциями полного момента импульса $\boldsymbol{J}$, а S_0 коммутирует с $\boldsymbol{J}$, ибо согласно (43)

$$S_0 \boldsymbol{J} S_0^\dagger = \boldsymbol{J}.$$

Итак, множество, образованное операторами S_0, R и их произведениями, также образует группу. В случае, когда группа $[R]$ изоморфна группе вращений (полный спин — целый), эта группа изоморфна группе вращений и отражений. Если это не так (полный спин полуцелый), то полученная группа только гомоморфна группе вращений и отражений, и каждому элементу последней сопоставляются два оператора, отличающиеся знаком. В частности, двумя операторами, соответствующими чистому отражению, являются $+S_0$ и $-S_0$, а тождественному отображению соответствуют операторы $+1$ и -1.

Рассмотрим теперь другой тип отражения — отражение в плоскости. Пусть $\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}$ — отражение в плоскости, перпендикулярной единичному вектору $\boldsymbol{u}$; $\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}$ является преобразованием группы вращений и отражений, а именно, произведением $\mathcal{S}_0$ и вращения на угол π вокруг $\boldsymbol{u}$ (или $-\boldsymbol{u}$)

$$\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}} = \mathcal{S}_0 \mathcal{R}_{\boldsymbol{u}}(\pi). \tag{46}$$

Заметим, что

$$\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^2 = \mathcal{J}. \tag{47}$$

Следовательно, $\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}$ и $\mathcal{J}$ образуют группу, и ее изучение можно скопировать с приведенного исследования отражений в точке. Помимо этого, используя соотношения (46), свойства одной из этих групп можно получить из свойств другой.

Мы рассмотрим только случай одной частицы. Оператор $S_{\boldsymbol{u}}$ является линейным унитарным оператором, удовлетворяющим соотношениям

$$\begin{aligned} S_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{r} S_{\boldsymbol{u}}^\dagger &= \boldsymbol{r} - 2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{r}), \\ S_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{p} S_{\boldsymbol{u}}^\dagger &= \boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{p}), \\ S_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{s} S_{\boldsymbol{u}}^\dagger &= -\boldsymbol{s} + 2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{s}) \end{aligned} \tag{48}$$

и его можно представить в виде

$$S_u = S_0 R_u(\pi) = S_0 e^{-i\pi(Ju)}, \tag{49}$$

что дает

$$S_u^2 = S_0^2 e^{-2\pi i(Ju)} = (-1)^{2J}. \tag{50}$$

При таком выборе фазы имеем

$$S_u^2 = -1$$

в случае полуцелого спина. Для получения образующего группу набора операторов преобразования отражению $\mathscr{P}_u$ следует сопоставить два оператора [1]) S_u и $-S_u$.

Еще одним примером конечной группы является группа перестановок n подобных частиц, которая изучалась в главе XIV. Каждой перестановке был сопоставлен линейный унитарный оператор перестановки. Множество операторов, полученное таким образом, образует группу, изоморфную группе перестановок [2]). Мы не будем возвращаться к этим вопросам здесь. Добавим лишь одно важное замечание. Перестановки коммутируют с пространственными преобразованиями, и из самого способа определения операторов перестановок следует, что они обладают тем же самым свойством по отношению к операторам пространственных преобразований.

Раздел III. ИНВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

§ 11. Инвариантные наблюдаемые

Мы рассмотрим теперь вопрос об инвариантности сам по себе. Пусть $\mathscr{G}$ — некоторая группа преобразований. Обозначим G соответствующую группу операторов и пусть T_i — фиксированный элемент из G. Будем предполагать, что все T_i линейны (и унитарны). Обращение времени — единственное преобразование, приводящее к рассмотрению антиунитарных операторов, будет исследовано в разделе IV.

---

[1]) Если мы будем рассматривать только группу $\{S_u, \mathscr{T}\}$, то предпочтительнее определить $S_u = i^{2J} S_0 R_u(\pi)$, что дает $S_u^2 = 1$. При новом выборе фазы закон умножения (46) сохраняется только с точностью до фазы.

[2]) Тот же результат может быть получен при замене всех операторов, соответствующих нечетным перестановкам, на противоположные им. Все рассуждения, проведенные в главе XIV, могут быть повторены и при этом новом соглашении о фазе с одним исключением — усложнением формул за счет добавления знака (—) без каких-либо изменений полученных результатов.