

использовать теорию возмущений, если подходящим образом изменить определение невозмущенного гамильтониана и возмущения.

Обозначим  $P_i^0$  проектор на подпространство, отвечающее собственному значению  $E_i^0$  оператора  $H_0$ . Тогда имеем

$$H_0 = \sum_i E_i^0 P_i^0.$$

Модификация гамильтониана состоит в замене слагаемых  $E_a^0 P_a^0$  и  $E_b^0 P_b^0$  в этой сумме на  $E_a^0 (P_a^0 + P_b^0)$ , где  $E_a^0$  — величина, промежуточная между  $E_a^0$  и  $E_b^0$ . Так, получаем новый невозмущенный гамильтониан, у которого собственное значение  $E_a^0$  имеет кратность выражения  $g_a + g_b$ . Далее следует вычислить поправки к  $E_a^0$  за счет возмущения

$$V + (E_a^0 - E_a^0) P_a^0 + (E_b^0 - E_a^0) P_b^0.$$

Такой метод был использован при рассмотрении эффекта Пашена — Бака (§ 12). Поле  $\mathcal{J}$  было достаточно сильным, так что сдвиги уровня данного  $LS$ -терма не были малыми по сравнению с расстоянием между уровнями. Тогда мы взяли в качестве невозмущенного гамильтониана  $H_C + V_1$  вместо  $H_C + V_1 + V_2$ , что привело к замене группы уровней  $E_{aLS}(J = |L - S|, \dots, L + S)$  на один уровень  $E_{aLS}$ . Далее, следовало бы вычислить поправки к  $E_{aLS}$ , вызванные возмущением  $V_2 + W$ . Для чистого эффекта Пашена — Бака поле  $\mathcal{J}$  настолько сильное, что в первом приближении влиянием  $V_2$  можно пренебречь ( $V_2 \ll W$ ), это и было сделано в § 12. Если  $V_2$  и  $W$  — величины одного порядка, то такое приближение не применимо и вычисления становятся значительно сложнее (задачи 7 и 8).

### Раздел III. ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ВО ВСЕХ ПОРЯДКАХ<sup>1)</sup>

#### § 15. Гамильтониан $H$ и его резольвента<sup>2)</sup> $G(z)$

В этом разделе мы изложим кратко подход, дающий явный вид членов любого порядка разложения по теории возмущений. В подходе, предложенном Като<sup>3)</sup>, используется разложение

<sup>1)</sup> Этот раздел при первом чтении можно опустить.

<sup>2)</sup> Ряд авторов использует термин «функция Грина» вместо «резольвента».

<sup>3)</sup> T. Kato. Prog. Theor. Phys. 4, 154 (1949). Като интересовался в основном условиями сходимости теории возмущений, и его подход особенно удобен при обсуждении этого вопроса. В большинстве встречающихся случаев разложение по теории возмущений является асимптотическим. Мы не будем в данном разделе касаться математических аспектов работы Като.

резольвенты  $G(z)$  гамильтониана  $H$  в ряд по степеням возмущения. В этом параграфе мы определим  $G(z)$  и опишем некоторые ее свойства.

По определению, если оператор  $H$  — наблюдаемая, то его *резольвентой* называется функция

$$G(z) \equiv \frac{1}{z - H} \quad (52)$$

комплексной переменной  $z$ <sup>1)</sup>.

На рис. 9 изображена комплексная плоскость  $z$  и на вещественной оси отмечен спектр  $H$ ; спектр обычно состоит из

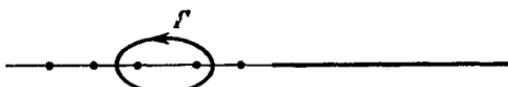


Рис. 9. Комплексная плоскость  $z$ , определение контура  $\Gamma$ . Спектр  $H$  выделен на вещественной оси жирными линиями и точками.

дискретной части и непрерывной части, последняя располагается справа от дискретной части и тянется вплоть до бесконечности. Резольвента  $G(z)$  является аналитической функцией  $z$ , а ее особенности образуют спектр  $H$ .

Предположим для простоты, что спектр оператора  $H$  чисто дискретный. Собственные значения обозначим  $E_0, E_1, \dots, E_i, \dots$ , а проектор на отвечающее  $E_i$  подпространство —  $P_i$

$$HP_i = E_i P_i \quad (53)$$

Соотношения ортогональности и полноты имеют вид

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i, \quad (54)$$

$$\sum_i P_i = 1. \quad (55)$$

<sup>1)</sup> По определению, оператор  $Q$  в гильбертовом пространстве называется ограниченным, если существует константа  $M$  такая, что для любого  $|u\rangle$

$$\frac{\langle u | Q^\dagger Q | u \rangle}{\langle u | u \rangle} \leq M^2.$$

Наименьшее значение  $M$  называется нормой оператора и обозначается  $\|Q\|$ . Строго говоря, различные операции алгебры и анализа, в частности, понятия сходимости рядов, дифференцирования и т. д., могут быть перенесены без ограничений только на ограниченные операторы в гильбертовом пространстве (см. M. H. Stone Linear transformation in Hilbert space, № 4, Amer. Math. Soc., 1932).

С математической точки зрения  $G(z)$  представляет большой интерес, поскольку является ограниченным оператором на всей комплексной плоскости  $z$ , за исключением собственных значений оператора  $H$ , и аналитической функцией  $z$ , особенностями которой образуют спектр  $H$ . Если обозначить  $\Delta(z)$  расстояние от точки  $z$  до ближайшего собственного значения  $H$ , то  $\|G(z)\| = 1/\Delta(z)$ .

Из определения (52) имеем

$$G(z) P_i = \frac{P_i}{z - E_i}$$

и, следовательно,

$$G(z) = \sum_i \frac{P_i}{z - E_i}. \quad (56)$$

Каждому дискретному собственному значению  $E_i$  оператора  $H$  отвечает простой полюс  $G(z)$ , вычет в котором равен проектору  $P_i$ . Другими словами

$$P_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_i} G(z) dz, \quad (57)$$

где  $\Gamma_i$  — замкнутый контур в комплексной плоскости, окружающий  $E_i$ , а все остальные сингулярности  $G(z)$  лежат вне его. В более общем случае, если  $\Gamma$  — замкнутый контур, не проходящий ни через одно из собственных значений  $H$  (рис. 9), а  $P_\Gamma$  — сумма проекторов  $P_i$ , соответствующих собственным значениям внутри этого контура, то

$$P_\Gamma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} G(z) dz. \quad (58)$$

Умножая уравнение (58) на  $H$  и учитывая тождество

$$(z - H) G \equiv G(z - H) \equiv 1,$$

получаем важную формулу

$$HP_\Gamma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} z G(z) dz. \quad (59)$$

### § 16. Разложение $G(z)$ , $P$ и $HP$ в ряд по степеням $\lambda V$

Рассмотрим теперь собственно задачу теории возмущений. Резольвенты операторов  $H$  и  $H_0$  обозначим соответственно

$$G \equiv \frac{1}{z - H_0 - \lambda V}, \quad G_0 \equiv \frac{1}{z - H_0}. \quad (60)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - H_0 - \lambda V} &= \frac{1}{z - H_0} [(z - H_0 - \lambda V) + \lambda V] \frac{1}{z - H_0 - \lambda V} = \\ &= \frac{1}{z - H_0} + \frac{1}{z - H_0} \lambda V \frac{1}{z - H_0 - \lambda V} \end{aligned}$$

и, следовательно,  $G$  является решением интегрального уравнения

$$G = G_0(1 + \lambda VG). \quad (61)$$

Интегрируя это уравнение, получаем  $G$  в виде разложения по степеням возмущения<sup>1)</sup>

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n G_0 (VG_0)^n. \quad (62)$$

Используя обозначения § 8, найдем разложение  $P$  по степеням возмущения. Для достаточно малых  $\lambda$  в комплексной плоскости  $z$  существует замкнутый контур, содержащий внутри себя невозмущенное собственное значение  $E_a^0$  и собственное значение оператора  $H$ , которое стремится к  $E_a^0$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , и не содержащий каких-либо других собственных значений  $H$  и  $H_0$ . Обозначим такой контур  $\Gamma_a$ . Согласно уравнению (58) имеем

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_a} G(z) dz.$$

Подставляя вместо  $G$  разложение (62) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем разложение  $P$  в виде ряда по степеням  $\lambda$

$$P = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n A^{(n)}, \quad (63)$$

где

$$A^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_a} G_0 (VG_0)^n dz. \quad (64)$$

Единственной особенностью функции  $G_0(VG_0)^n$  внутри контура  $\Gamma_a$  является полюс в точке  $E_a^0$  порядка  $n+1$  и согласно уравнению (64)  $A^{(n)}$  — вычет в этом полюсе.

Для вычисления вычета используем разложение  $G_0$  в ряд Лорана в окрестности точки  $E_a^0$ . Коэффициенты разложения легко вычисляются из выражения (56) для резольвенты. Получаем

$$G_0 = \frac{P_0}{z - E_a^0} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (z - E_a^0)^{-k-1} \frac{Q_0}{a^k}.$$

<sup>1)</sup> Радиус сходимости для этого разложения равен  $\|\lambda VG_0\|$ . Следовательно, ряд сходится абсолютно при  $\|\lambda V\| < \Delta_0(z)$ , где  $\Delta_0(z)$  — расстояние от  $z$  до ближайшего собственного значения  $H_0$ .

Следуя Като, введем обозначение  $S^k (k \geq 0)$ :

$$S^k = \begin{cases} -P_0, & \text{если } k=0, \\ \frac{Q_0}{a^k}, & \text{если } k \geq 1. \end{cases} \quad (65)$$

Тогда полученное разложение можно переписать в виде

$$G_0 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} (z - E_a^0)^{k-1} S^k. \quad (66)$$

Коэффициент при  $(z - E_a^0)^{-1}$  в разложении  $G_0(VG_0)^n$  в ряд Лорана равен  $A^{(n)}$ . Принимая во внимание разложение (66), находим

$$A^{(n)} = - \sum_{(n)} S^{k_1} V S^{k_2} V \dots V S^{k_{n+1}}, \quad (67)$$

где  $\sum_{(n)}$  означает суммирование по всем наборам неотрицательных целых чисел  $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$  таких, что

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{n+1} = p. \quad (68)$$

Приведем несколько первых членов разложения  $P$ :

$$\begin{aligned} P = P_0 + \lambda \left( P_0 V \frac{Q_0}{a} + \frac{Q_0}{a} V P_0 \right) + \lambda^2 \left( P_0 V \frac{Q_0}{a} V \frac{Q_0}{a} + \right. \\ \left. + \frac{Q_0}{a} V P_0 V \frac{Q_0}{a} + \frac{Q_0}{a} V \frac{Q_0}{a} V P_0 - P_0 V P_0 V \frac{Q_0}{a^2} - P_0 V \frac{Q_0}{a^2} V P_0 - \right. \\ \left. - \frac{Q_0}{a^2} V P_0 V P_0 \right) + \dots \quad (69) \end{aligned}$$

Исходя из уравнения (59) и действуя таким же образом, получаем разложение  $HP$ . Находим

$$(H - E_a^0) P = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n B^{(n)}, \quad (70)$$

где

$$B^{(n)} = \sum_{(n-1)} S^{k_1} V S^{k_2} V \dots V S^{k_{n+1}}. \quad (71)$$

Итак,

$$\begin{aligned} (H - E_a^0) P = \\ = \lambda P_0 V P_0 + \lambda^2 \left( P_0 V P_0 V \frac{Q_0}{a} + P_0 V \frac{Q_0}{a} V P_0 + \frac{Q_0}{a} V P_0 V P_0 \right) + \dots \quad (72) \end{aligned}$$

## § 17. Вычисление собственных значений и собственных функций

Искомые собственные значения и собственные векторы  $H$  совпадают с собственными значениями и собственными векторами оператора  $HP$  в пространстве  $\mathcal{E}$ , для которого  $P$  — проектор. Поскольку вид  $P$  и  $HP$  известен, задача свелась к диагонализации матрицы в пространстве размерности  $g_a$ .

Невырожденный случай:  $g_a = 1$ . В этом случае собственный вектор  $H$  равен  $P|0\rangle$ . Разложение для квадрата его нормы  $\langle 0 | P | 0 \rangle$  легко получается из разложения оператора  $P$ . Собственные векторы  $P|0\rangle$  и построенный в разделе I  $|\psi\rangle$  пропорциональны друг другу; легко показать, что норма последнего равна  $1/\langle 0 | P | 0 \rangle$ .

Собственное значение  $E_a$  определяется из уравнения  $HP = E_a P$ . Поскольку  $\text{Tr}P = \text{Tr}P_0 = 1$ , имеем (ур. (70))

$$E_a = \text{Tr} HP = E_a^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (\text{Tr} B^{(n)})$$

или

$$\varepsilon_n = \text{Tr} B^{(n)}. \quad (73)$$

Так как каждый член в  $B^{(n)}$  содержит по крайней мере один оператор  $P_0$  и так как, в силу известного свойства следа, справедливо тождество

$$\text{Tr} MP_0 N = \text{Tr} P_0 NM = \langle 0 | NM | 0 \rangle,$$

то легко преобразовать  $\varepsilon_n$  к виду среднего значения от некоторого оператора по невозмущенному состоянию  $|0\rangle$ . Первые члены разложения  $E_a$  равны

$$\begin{aligned} E_a = E_a^0 &+ \lambda \langle 0 | V | 0 \rangle + \lambda^2 \langle 0 | V \frac{Q_0}{a} V | 0 \rangle + \\ &+ \lambda^3 \left( \langle 0 | V \frac{Q_0}{a} V \frac{Q_0}{a} V | 0 \rangle - \langle 0 | V \frac{Q_0}{a^2} V | 0 \rangle \langle 0 | V | 0 \rangle \right) + \dots, \end{aligned} \quad (74)$$

что согласуется с результатами раздела I (ур. (12) и (26)).

Вырожденный случай:  $g_a \neq 1$ . Вместо того чтобы решать задачу на собственные значения оператора  $HP$  в  $\mathcal{E}_a$ , ее можно заменить аналогичной задачей диагонализации в  $\mathcal{E}_a^0$ .

Допустим, что любой вектор из подпространства  $\mathcal{E}_a$  можно рассматривать как проекцию в  $\mathcal{E}_a$  некоторого вполне определенного вектора из  $\mathcal{E}_a^0$  (это предположение неявно использовалось в невырожденном случае). Поскольку  $\mathcal{E}_a$  и  $\mathcal{E}_a^0$  имеют одинаковую размерность, проектор  $P$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами из  $\mathcal{E}_a$  и  $\mathcal{E}_a^0$ ; можно

также показать, что и проектор  $P_0$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами  $\mathcal{E}_a$  и  $\mathcal{E}_a^0$ . Это условие «неортогональности» двух подпространств, очевидно, выполняется при достаточно малых  $\lambda$ .

Таким образом, каждый собственный вектор  $H$  в  $\mathcal{E}_a$  можно представить в виде  $P |E_a^0\alpha\rangle$  и справедливо уравнение

$$HP |E_a^0\alpha\rangle = E_a P |E_a^0\alpha\rangle.$$

Необходимым и достаточным условием такого равенства между векторами  $\mathcal{E}_a$  является равенство их проекций в  $\mathcal{E}_a^0$

$$P_0 HP |E_a^0\alpha\rangle = E_a P_0 P |E_a^0\alpha\rangle.$$

Обозначив

$$H_a = P_0 H P P_0, \quad K_a = P_0 P P_0, \quad (75)$$

перепишем предыдущее уравнение в виде

$$H_a |E_a^0\alpha\rangle = E_a K_a |E_a^0\alpha\rangle. \quad (76)$$

Операторы  $K_a$  и  $H_a$  можно рассматривать как эрмитовы операторы в пространстве  $\mathcal{E}_a^0$ . Уравнение (76) есть обобщенное уравнение на собственные значения. Собственные значения  $E_a$  — решения секулярного уравнения (см. § VII. 17)

$$\det(H_a - xK_a) = 0,$$

они являются искомыми значениями энергии, а проекции соответствующих собственных векторов  $|E_a^0\alpha\rangle$  в  $\mathcal{E}_a$  будут собственными векторами  $H$ .

Разложения  $H_a$  и  $K_a$  легко получаются из разложений  $HP$  и  $P$  соответственно (ур. (69) и (72))

$$K_a = P_0 - \lambda^2 P_0 V \frac{Q_0}{a^2} VP_0 + \dots, \quad (77)$$

$$H_a = E_a^0 K_a + \lambda P_0 VP_0 + \lambda^2 P_0 V \frac{Q_0}{a} VP_0 + \dots \quad (78)$$

Для того чтобы получить собственное значение  $E_a$  с точностью до данного порядка, разложения  $H_a$  и  $K_a$  обрывают на том же порядке.

Результаты данного порядка, полученные таким методом, могут отличаться от результатов элементарной теории раздела II, но на величины высшего порядка. В первом порядке результаты обоих методов в точности совпадают. Сравнивая эти результаты, нужно также помнить, что вектор  $|E_a^0\alpha\rangle$  отличается от вектора  $|0\rangle$  элементарной теории, последний равен пределу  $|E_a^0\alpha\rangle$  при  $\lambda \rightarrow 0$ .

Метод, очень близкий к методу Като, но приводящий к более простым разложениям, был сформулирован Блохом<sup>1)</sup>. В основе этого метода лежит тот факт, что оператор  $U$ , определяемый равенствами

$$PP_0 \equiv UK_a, \quad UP_0 \equiv U \quad (79)$$

имеет простое разложение

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U^{(n)}, \quad (80)$$

$$U^{(n)} = \sum_{(n)} S^{k_1} V S^{k_2} V \dots V S^{k_n} V P_0, \quad (81)$$

где  $\sum_{(n)}$  означает суммирование по всем наборам неотрицательных целых чисел  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + \dots + k_p &\geq p \quad (p = 1, 2, \dots, n-1), \\ k_1 + k_2 + \dots + k_n &= n. \end{aligned} \quad (82)$$

Отметим, что  $P_0U = P_0$ , а  $PU = U$ . Действие  $U$  на вектор пространства  $\mathcal{E}_a^0$  дает вектор из  $\mathcal{E}_a$ , проекция которого в  $\mathcal{E}_a^0$  есть исходный вектор.

Согласно определению  $U$  уравнение (75) эквивалентно следующему:

$$(P_0HU - E_a) K_a |E_a^0\alpha\rangle = 0, \quad (83)$$

которое в методе Блоха играет ту же роль, что и уравнение (75) в методе Като. Это обычное уравнение на собственные значения для неэрмитова оператора<sup>2)</sup>  $P_0HU \equiv H_a K_a^{-1}$  в пространстве  $\mathcal{E}_a^0$ . Собственные значения и являются искомыми значениями энергии; соответствующие собственные векторы  $K_a |E_a^0\alpha\rangle$  есть проекции на  $\mathcal{E}_a^0$  собственных векторов оператора  $H$ , которые получаются действием оператора  $U$ . Разложение  $P_0HU$  легко следует из разложения  $U$ , если вспомнить, что

$$P_0HU = E_a^0 P_0 + \lambda P_0 V U.$$

Несколько первых членов равны

$$P_0HU = E_a^0 P_0 + \lambda P_0 V P_0 + \lambda^2 P_0 V \frac{Q_0}{a} V P_0 + \dots$$

Видно, что они проще членов разложений  $H_a$  и  $K_a$  (ур. (77) и (78)).

<sup>1)</sup> C. Bloch, Nuclear Physics 6, 329 (1958).

<sup>2)</sup> Рассматриваемый как оператор в пространстве  $\mathcal{E}_a^0$  оператор  $K_a$  имеет обратный, а как оператор во всем гильбертовом пространстве — не имеет.

В невырожденном случае энергия равна

$$E_a = \langle 0 | HU | 0 \rangle,$$

откуда немедленно получаем коэффициенты ее разложения

$$e_n = \sum'_{(n-1)} \langle 0 | VS^{k_1} VS^{k_2} V \dots VS^{k_n} V | 0 \rangle.$$

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Взаимодействие  $V(q)$  добавлено к гамильтониану  $(p^2 + m^2\omega^2q^2)/2m$ . Вычислить в первом и втором порядках теории возмущений сдвиги энергетических уровней в следующих двух случаях:

$$(a) V = \frac{1}{2} ma^2 q^2,$$

$$(b) V = bq.$$

В обоих случаях сдвиги можно вычислить точно. Сравнить точные ответы с результатами теории возмущений.

2. Рассмотрим атом водорода в теории Шредингера (глава XI). До какой степени снимается вырождение каждого уровня постоянным электрическим полем  $\mathcal{E}$  (взаимодействие —  $e\mathcal{E}r$ )? Показать, что уровень  $n = 2$  расщепляется в первом порядке на три эквидистантных уровня (расстояние между уровнями равно  $3\mathcal{E}\hbar^2/me$ ), и определить кратность вырождения каждого.

3. Показать, что в приближении центрального поля полный момент, полный орбитальный момент и полный спин электронов замкнутой оболочки равны нулю. Используя этот результат, показать, что число линейно независимых векторов ( $LSM_L M_S$ ) для данной конфигурации определяется только электронами незамкнутой оболочки.

4. Определить спектральные термы конфигурации основного состояния атома углерода при  $jj$ -связи. Показать, что для полного момента  $J$  при  $jj$ - и  $LS$ -связях (§ 11) получается одно и то же значение с одинаковой кратностью. Объяснить, почему.

5. Конфигурация основного состояния атома азота ( $Z=7$ ) есть  $1s^2 2s^2 2p^3$ . Какие различные спектральные термы получаются при  $LS$ -связи?

6. Использовать метод § 13 для изучения сложных атомов из § 9, 10, 11. Перечислить свойства симметрии операторов  $H_C$ ,  $V_1$  и  $V_2$  и показать, в какой степени снимает вырождение уровней  $H_C$  последовательное включение возмущений  $V_i$  ( $i = 1, 2$ ): (a) при  $LS$ -связи, (b) при  $jj$ -связи.

7. Конфигурация основного состояния атома натрия ( $Z=11$ ) есть  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ , а первая возбужденная конфигурация —  $1s^2 2s^2 2p^6 3p^1$ . Следовательно, основное состояние натрия есть  $S_{1/2}$ , а два первых возбужденных состояния —  ${}^2P_{1/2}$  и  ${}^2P_{3/2}$ . Исследовать влияние на эти уровни постоянного магнитного поля  $\mathcal{H}$ . Вычислить соответствующие множители Ланде. При постепенном увеличении интенсивности  $\mathcal{H}$  из области эффекта Зеемана переходят в область эффекта Пащена — Бака. Получить выражение для уровней  ${}^2P$  как функцию параметра  $\rho = \mu_B \mathcal{H} / A \hbar^2$ , где  $\mu_B$  — магнетон Бора,  $A$  — константа

спин-орбитальной связи, введенная в § 11 ( $A > 0$ ); нарисовать соответствующие кривые.

8. Исследовать тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, для основного состояния ( ${}^3P$ ) атома углерода. (Уровни получаются как корни секулярных уравнений, одно из которых третьей степени; основные характеристики кривых можно получить, не решая эти уравнения.)

9. Различные уровни  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , полученные из  $g_a$ -кратно вырожденного уровня при введении возмущения  $V$ , можно охарактеризовать их «центром тяжести»  $\langle E \rangle$  и среднеквадратичным отклонением  $\Delta E$ , определяемыми соотношениями (обозначения § 8):

$$\langle E \rangle = \frac{1}{g_a} \sum_{l=1}^n g_l E_l, \quad (\Delta E)^2 = \frac{1}{g_a} \sum_{l=1}^n (E_l - \langle E \rangle)^2.$$

Показать, что в первом порядке по  $V$  имеем

$$\varepsilon = \langle E \rangle - E_a^0 \approx \frac{1}{g_a} \operatorname{Tr} P_0 V, \quad (\Delta E)^2 \approx \frac{1}{g_a} \operatorname{Tr} P_0 (V - \varepsilon) P_0 (V - \varepsilon).$$

Использовать эти формулы для возмущения

$$V = A(LS) + \frac{e\hbar}{2mc} \mathcal{H}(L + 2S)$$

из двух предыдущих задач. Показать, что в этих случаях  $\varepsilon = 0$ ; определить зависимость и исследовать изменение  $\Delta E$  как функции параметра  $\rho$  из задачи 7.