# ГЛАВА XX
# УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

## Раздел I. ОБЩЕЕ ВВЕДЕНИЕ

### § 1. Релятивистская квантовая механика [1])

В предыдущих главах в основе всех вычислений в квантовой теории лежало уравнение Шредингера. Это уравнение, полученное из гамильтонова формализма нерелятивистской классической механики по принципу соответствия, обладает всеми свойствами инвариантности функции Гамильтона, из которой оно получено. В частности, для изолированной системы оно инвариантно относительно пространственных вращений и трансляций. Можно также показать, что оно инвариантно относительно преобразований Галилея (см. задачу XV. 7). Следовательно, физические свойства, которые предсказывает теория Шредингера, инвариантны относительно галилеевских преобразований системы координат, но не инвариантны относительно преобразований Лоренца, как того требует принцип относительности. Поскольку преобразование Галилея получается из преобразования Лоренца при скоростях, малых по сравнению со скоростью света, естественно ожидать, что упомянутая теория будет корректно описывать явления только при скоростях $v \ll c$ (это подтверждается экспериментально). В частности, все явления, которые включают взаимодействие света и вещества, такие как излучение, поглощение или рассеяние фотонов, находятся вне рамок нерелятивистской квантовой механики.

Одна из основных трудностей, которые возникают при построении релятивистской квантовой механики, связана с тем, что нарушается закон сохранения числа частиц. В силу эквивалентности энергии и массы (одно из важнейших следствий принципа относительности) возможно рождение или поглощение частиц всякий раз, как только при взаимодействии происходит передача энергии, равной или превосходящей энергию покоя этих частиц. Таким образом, полная релятивистская квантовая теория должна содержать в единой схеме динамические состояния,

---

[1]) Для чтения этой главы рекомендуется ознакомиться с разделами I и II Дополнения Г.

отличающиеся не только квантовым состоянием, но также видом и *числом* элементарных частиц, которым эти состояния соответствуют. Для этого необходимо обратиться к концепции квантованного поля, в связи с чем релятивистскую квантовую теорию часто называют теорией квантованных полей или квантовой теорией поля. В том состоянии, в котором эта теория находится в настоящее время, она не свободна ни от трудностей, ни даже от противоречий, но способна объяснить множество экспериментальных фактов.

Последняя, пятая часть этой книги служит введением в теорию квантованных полей и дает элементарные методы вычисления ряда релятивистских эффектов, относящихся к динамике электрона и взаимодействию электромагнитного поля с заряженными частицами.

Эта часть состоит из двух глав.

В настоящей главе рассматривается простейшая задача релятивистской квантовой механики: частица спина 1/2 в заданном внешнем поле. Наиболее важным примером такой ситуации является электрон в электромагнитном поле. Поле не квантуется, и эволюция системы должна описываться волновым уравнением, которое обладает всеми свойствами инвариантности, вытекающими из принципа относительности. Уравнение должно удовлетворять также принципу соответствия и в нерелятивистском приближении давать теорию Паули. Такое уравнение существует и называется уравнением Дирака. После краткого обзора группы Лоренца и релятивистской классической динамики (раздел I) мы приводим уравнение Дирака (раздел II) и подробно исследуем его свойства инвариантности (раздел III). В оставшейся части этой главы мы обсуждаем физическое содержание теории и, рассматривая основные приложения уравнения Дирака, исследуем его связь с классической динамикой (раздел IV), нерелятивистской квантовой механикой (раздел V) и квантовой теорией поля (раздел VI).

Вторая глава посвящена концепции квантованного поля, элементарной квантовой теории электромагнитного излучения и его взаимодействию с атомными и ядерными системами.

## § 2. Обозначения и различные определения

Единицы. За редким исключением мы будем пользоваться системой единиц, в которой

$$\hbar = c = 1$$

и, следовательно, время имеет размерность длины, энергия, импульс и масса имеют размерность обратной длины, а электрический заряд является безразмерной величиной ($e^2 = e^2/\hbar c =$

$= 1/137$). Общие выражения могут быть легко восстановлены из соображений однородности.

Координаты. Задание момента времени $t$ и точки $\boldsymbol{r} \equiv (x, y, z)$ обычного пространства определяет точку пространства-времени. Обозначим координаты этой точки $x^0$, $x^1$, $x^2$, $x^3$; $x^0 \equiv ct$ — координата времени, а $x^1$, $x^2$, $x^3$ — три пространственных координаты: $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$. Мы будем использовать индексы 0, 1, 2, 3 для обозначения компонент четырехмерных векторов [1]) и тензоров по осям 0, 1, 2, 3 соответственно. Пространственно-временные компоненты 4-векторов или тензоров будем обозначать греческими буквами. Эти индексы могут принимать четыре значения: 0, 1, 2, 3; латинские буквы будем использовать для обозначения компонент в обычном пространстве, они могут принимать значения 1, 2, 3. Таким образом:

$$x^\mu \equiv (x^0, x^k) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3),$$
$$(\mu = 0, 1, 2, 3), \quad (k = 1, 2, 3).$$

Метрический тензор, ковариантные и контравариантные индексы. Пространство-время имеет псевдоевклидову метрику, которая задается *метрическим тензором*

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

или иначе

$$g_{00} = 1, \quad g_{kk} = -1, \quad g_{\mu\nu} = 0, \quad \text{если} \quad \mu \neq \nu. \tag{1}$$

Следует различать *ковариантные* векторы (которые преобразуются как $\partial/\partial x^\mu$) и *контравариантные* векторы (которые преобразуются как $x^\mu$), а также ковариантные и контравариантные компоненты тензоров. Следуя общепринятому соглашению, ковариантные индексы пишут внизу, а контравариантные — наверху. Так, $a^\mu$ означает контравариантный вектор. Соответствующий ковариантный вектор получается применением метрического тензора:

$$a_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} a^\nu,$$

что дает

$$a_0 = a^0, \quad a_k = -a^k.$$

---

[1]) Для краткости также будем писать 4-вектор, 4-тензор.

Мы будем пользоваться *соглашением о суммировании по повторяющимся индексам.* При этом предыдущее выражение примет компактный вид

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu.$$

Операция поднятия индексов осуществляется применением тензора $g^{\mu\nu}$

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu.$$

В данном случае мы имеем

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}.$$

Кроме того,

$$g^\nu_\mu = g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = g^\mu_\nu = \delta^\nu_\mu,$$

где $\delta^\nu_\mu$ — символ Кронекера

$$\delta^\nu_\mu = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \mu = \nu, \\ 0, & \text{если} \quad \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Трехмерные векторы, четырехмерные векторы, скалярное произведение. Мы сохраним обозначения, которыми пользовались ранее, для векторов обычного пространства или 3-векторов, обозначая вектор буквой жирного шрифта, а его длину — той же буквой обычного шрифта.

Три пространственных компоненты вектора $a^\mu$ образуют 3-вектор. Используя принятые обозначения, имеем следующее:

$$a^\mu \equiv (a^0, a^1, a^2, a^3) \equiv (a^0, \boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{a} \equiv (a_x, a_y, a_z),$$

$$a^1 = a_x, \quad a^2 = a_y, \quad a^3 = a_z, \quad a \equiv (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a})^{\frac{1}{2}} \equiv [a_x^2 + a_y^2 + a_z^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Иногда мы будем обозначать 4-вектор $a^\mu$ просто $a$, когда это не приведет к путанице с длиной 3-вектора $\boldsymbol{a}$.

Скалярное произведение двух 4-векторов $a^\mu$ и $b^\mu$ получается при свертке контравариантных компонент одного с ковариантными компонентами другого, т. е. $a_\mu b^\mu$ или $a^\mu b_\mu$

$$a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}. \tag{2}$$

*Норма* вектора $a^\mu$ равна $a_\mu a^\mu = (a^0)^2 - \boldsymbol{a}^2$.

Классификация 4-векторов. Четырехмерные векторы можно разделить на три класса в соответствии со знаком их нормы:

$a_\mu a^\mu < 0$ $\quad a^\mu$ — пространственно-подобный вектор,

$a_\mu a^\mu = 0$ $\quad a^\mu$ — нуль-вектор,

$a_\mu a^\mu > 0$ $\quad a^\mu$ — времениподобный вектор.

Эта классификация соответствует положению вектора по отношению к световому конусу $x_\mu x^\mu = 0$. Два последних случая можно классифицировать в зависимости от знака временной компоненты:

$a^0 > 0$ — вектор направлен в будущее,

$a^0 < 0$ — вектор направлен в прошлое.

Градиент. Дифференциальные операторы. Мы сохраним обозначения $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ и $\Delta \equiv \nabla\nabla$.

Четыре оператора частных производных $\partial/\partial x^\mu$ образуют *ковариантный* вектор, который мы обозначим символом $\partial_\mu$:

$$\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu \equiv (\partial/\partial x^0, \partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3) \equiv (\partial/\partial ct, \nabla). \tag{3}$$

Это оператор градиента.

Мы будем использовать также «контравариантный градиент»

$$\partial^\mu \equiv g^{\mu\nu}\partial_\nu \equiv (\partial/\partial ct, -\nabla). \tag{4}$$

Определим оператор Даламбера [1]) (ср. § II. 12)

$$\Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \equiv \partial_\mu \partial^\mu. \tag{5}$$

Тензор $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$. Тензор $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ определяется как полностью антисимметричный тензор, компоненты которого равны 0, если какие-либо два индекса совпадают, $+1$, если $(\lambda\mu\nu\rho)$ образуют четную перестановку индексов (0, 1, 2, 3), и $-1$, если $(\lambda\mu\nu\rho)$ образуют нечетную перестановку.

Электромагнитное поле. Электромагнитный потенциал состоит из векторной $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ и скалярной $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$ частей, которые образуют четырехмерный вектор $A^\mu$

$$A^\mu \equiv (\varphi, \boldsymbol{A}). \tag{6}$$

Электрическое $\mathscr{E}$ и магнитное $\mathscr{H}$ поля определяются по формулам

$$\mathscr{E} = -\nabla\varphi - \partial\boldsymbol{A}/\partial x^0, \quad \mathscr{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{7}$$

Компоненты векторов $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ образуют антисимметричный тензор $F_{\mu\nu}$ в пространстве-времени согласно определению

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \tag{8}$$

что дает

$$F_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathscr{E}_x & \mathscr{E}_y & \mathscr{E}_z \\ -\mathscr{E}_x & 0 & -\mathscr{H}_z & \mathscr{H}_y \\ -\mathscr{E}_y & \mathscr{H}_z & 0 & -\mathscr{H}_x \\ -\mathscr{E}_z & -\mathscr{H}_y & \mathscr{H}_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

---

[1]) Ряд авторов использует обозначение $\Box$ для оператора, отличающегося от введенного нами знаком.

Мы будем использовать также векторный оператор

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0} + ie\varphi,\ \nabla - ie\boldsymbol{A}\right). \tag{10}$$

## § 3. Группа Лоренца

Преобразованием Лоренца системы координат называется *вещественное*, *линейное* преобразование координат, *сохраняющее норму* пространственно-временного интервала. Новые координаты $x'^\mu$ точки в пространстве-времени получаются из старых $x^\mu$ по формулам

$$x'^\mu = \Omega^\mu_\nu x^\nu + a^\mu.$$

Вещественный вектор $a^\mu$ определяет трансляцию пространственно-временных осей. В дальнейшем преобразования трансляций мы будем рассматривать отдельно, а преобразованиями Лоренца назовем однородные преобразования ($a^\mu = 0$)[1])

$$x'^\mu = \Omega^\mu_\nu x^\nu. \tag{11}$$

Поднимая или опуская индексы у матрицы $\Omega^\mu_\nu$, можно получить матрицы $\Omega^\nu_\mu$, $\Omega^{\mu\nu}$, $\Omega_{\mu\nu}$ (например, $\Omega^{\mu\nu} = g^{\nu\rho}\Omega^\mu_\rho$). Задание одной из этих матриц определяет преобразование Лоренца. Условия вещественности и инвариантности нормы имеют вид

$$\Omega^*_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu}, \tag{12}$$

$$\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\lambda} = \Omega_{\nu\mu}\Omega^{\lambda\mu} = \delta^\lambda_\nu. \tag{13}$$

Следовательно,

$$\det\left|\Omega^\mu_\nu\right| = \pm 1 \tag{14}$$

и обратное преобразование можно записать в виде

$$x^\mu = x'^\nu \Omega^\mu_\nu. \tag{15}$$

Такие преобразования образуют *полную группу Лоренца*: группу вещественных линейных преобразований, сохраняющих скалярное произведение четырехмерных векторов.

Если $\Omega^{00} > 0$, то преобразование сохраняет знак временной компоненты времениподобных векторов. Такие преобразования называются ортохронными, они образуют *ортохронную группу Лоренца*.

Если *дополнительно* и $\det\left|\Omega^\mu_\nu\right| = 1$, то преобразование сохраняет ориентацию (правую или левую) осей координат в обычном пространстве. Множество таких преобразований об-

---

[1]) Группа, образованная преобразованиями Лоренца и трансляциями, обычно называется *неоднородной группой Лоренца* или группой Пуанкаре.

разует *собственную группу Лоренца*, которую мы будем обозначать $\mathscr{L}_0$.

Преобразования собственной группы Лоренца можно рассматривать как последовательность бесконечно малых преобразований. Матрица $\Omega_{\mu\nu}$ *бесконечно малого преобразования* имеет вид

$$g_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu},$$

где величины $\omega_{\mu\nu}$ являются бесконечно малыми. Условия (12) и (13) дают

$$\omega_{\mu\nu} = \omega^*_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0. \tag{16}$$

Следовательно, $\omega_{\mu\nu}$ — вещественный антисимметричный тензор.

Положим

$$Z^{(\alpha\beta)}_{\mu\nu} = -Z^{(\beta\alpha)}_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}. \tag{17}$$

Тензор $Z^{(\alpha\beta)}_{\mu\nu}$ — антисимметричен и имеет две отличных от нуля компоненты: $\mu = \alpha$, $\nu = \beta$ и $\mu = \beta$, $\nu = \alpha$, одна из которых равна $+1$, а другая $-1$. Пусть $\varepsilon$ есть бесконечно малая величина, тогда

$$g_{\mu\nu} - \varepsilon Z^{(\alpha\beta)}_{\mu\nu}$$

есть матрица бесконечно малого преобразования Лоренца, отвечающего «вращению» на угол $\varepsilon$ в плоскости $x^\alpha x^\beta$.

Существует шесть бесконечно малых преобразований такого вида. «Вращения» в плоскостях $x^1x^2$, $x^2x^3$ и $x^3x^1$ есть вращения на угол $\varepsilon$ в пространстве вокруг осей $Oz$, $Ox$, $Oy$ соответственно. «Вращения» в плоскостях $x^1x^0$, $x^2x^0$, $x^3x^0$ представляют собой специальные преобразования Лоренца (переход к движущейся системе координат со скоростью $\varepsilon$ в направлении $Ox$, $Oy$, $Oz$ соответственно [1]).

Кроме бесконечно малых преобразований можно определить преобразования различных отражений: пространственного отражения $s$ ($x^0 = x^0$, $x^k = -x^k$) и отражения времени $t$ ($x^0 = -x^0$, $x^k = x^k$). Ортохронная группа состоит из группы

---

[1]) Если новые координаты получены из старых вращением на конечный угол $\varphi$ вокруг оси $Oz$, то имеем

$$x'^1 = x^1 \cos\varphi + x^2 \sin\varphi, \quad x'^2 = x^2 \cos\varphi - x^1 \sin\varphi, \quad x'^3 = x^3, \quad x'^0 = x^0.$$

Если они получены из старых при специальном преобразовании Лоренца со скоростью $v = \operatorname{tg}\varphi$, направленной вдоль $Ox$, то имеем

$$x'^1 = x^1 \operatorname{ch}\varphi - x^0 \operatorname{sh}\varphi, \quad x'^0 = x^0 \operatorname{ch}\varphi - x^1 \operatorname{sh}\varphi, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3.$$

Рассмотренные выше преобразования отвечают случаю, когда $\varphi = \varepsilon$ — бесконечно малой величине.

Таблица I

| | $\mathrm{Det}\left\|\Omega^{\mu}_{\nu}\right\|$ | $\Omega^{00}$ | Обозначения группы |
|---|---|---|---|
| $\mathscr{L}_0$ | $+1$ | $>0$ | собственная |
| $s\mathscr{L}_0$ | $-1$ | $>0$ | ортохронная |
| $t\mathscr{L}_0$ | $-1$ | $<0$ | полная |
| $st\mathscr{L}_0$ | $+1$ | $<0$ | |

$\mathscr{L}_0$, отражения $s$ и преобразований из произведения $s\mathscr{L}_0$. Полная группа образована преобразованиями из $\mathscr{L}_0$, $s\mathscr{L}_0$, $t\mathscr{L}_0$ и $st\mathscr{L}_0$. Свойства этих четырех подмножеств полной группы приведены в табл. I.

## § 4. Классическая релятивистская динамика

Напомним динамические свойства классической релятивистской частицы с массой покоя $m$ и с зарядом $e$ в электромагнитном поле $(\varphi, \boldsymbol{A})$.

Обозначим $\boldsymbol{v}$ скорость частицы

$$\boldsymbol{v} \equiv \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{18}$$

Определим релятивистскую массу $M$ и механический импульс [1]) $\boldsymbol{\pi}$:

$$M \equiv \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \boldsymbol{\pi} \equiv M\boldsymbol{v}. \tag{19}$$

Набор $(M, \boldsymbol{\pi})$ есть 4-вектор, норма которого равна

$$M^2 - \boldsymbol{\pi}^2 = m^2 \tag{20}$$

и который направлен в будущее $(M > 0)$.

Если нет внешнего поля, то частица двигается равномерно и прямолинейно: $\boldsymbol{v}$ есть величина постоянная.

Во внешнем электромагнитном поле траектория частицы удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = e[\mathscr{E} + \boldsymbol{v} \times \mathscr{H}] \equiv \boldsymbol{F}. \tag{21}$$

Это основное уравнение релятивистской динамики материальной точки. Вектор $\boldsymbol{F}$ называется *силой Лоренца*.

---

[1]) Не путать с импульсом, который в этой книге определяется как переменная, канонически сопряженная к координате (см. примечание на стр. 62 тома 1).

Из уравнения (21) следуют уравнения:

$$\frac{dM}{dt} = (\boldsymbol{v}\boldsymbol{F}) = e(\boldsymbol{v}\mathscr{E}), \tag{21'}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}, \tag{22}$$

которые определяют зависимости от времени массы и момента количества движения.

Если определить собственное время $\tau$ частицы по формуле

$$d\tau = (dx^\mu\, dx_\mu)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}\, dt,$$

то приведенные соотношения можно записать в ковариантной форме. Определим 4-скорость

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv \left(\frac{dt}{d\tau},\ \frac{\boldsymbol{v}\, dt}{d\tau}\right) \qquad (u^\mu u_\mu = 1),$$

умножение которой на $m$ дает механический 4-импульс

$$\pi^\mu \equiv m u^\mu \equiv (M,\ \boldsymbol{\pi}).$$

Уравнения (21) и (21′) эквивалентны формально ковариантному уравнению

$$\frac{d\pi^\mu}{d\tau} = eF^{\mu\nu} u_\nu \tag{23}$$

или

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} u_\nu,$$

где $F^{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля (ур. (8)—(9)).

Приведенные уравнения движения можно вывести в рамках лагранжева или гамильтонова формализма (см. задачу I. 5). Импульс $\boldsymbol{p}$ и энергия $E$ образуют 4-вектор $p^\mu$, который связан с $\pi^\mu$ соотношением

$$p^\mu = \pi^\mu + eA^\mu, \tag{24}$$

т. е.

$$E = M + e\varphi, \quad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{\pi} + e\boldsymbol{A}.$$

Функция Гамильтона равна

$$H \equiv e\varphi + \sqrt{(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 + m^2}, \tag{25}$$

что согласуется с соотношениями (24) и (20). Используя это равенство, получаем гамильтоновы канонические уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{M}, \quad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -e\,\mathrm{grad}\,(\varphi - \boldsymbol{v}\boldsymbol{A}).$$

Первое уравнение есть определение скорости, а второе эквивалентно уравнению (21), что легко установить, используя определения $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ (ур. (7)) и равенство

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}\right)\boldsymbol{A}.$$

## Раздел II. УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА — ГОРДОНА И ДИРАКА

### § 5. Уравнение Клейна — Гордона

Построение релятивистского волнового уравнения для электрона является сложной задачей из-за наличия у электрона спина. Найдем вначале релятивистское волновое уравнение для частицы спина 0, например, $\pi$-мезона. Такая частица не имеет внутренних степеней свободы и ее волновая функция $\Psi$ может зависеть только от $\boldsymbol{r}$ и $t$. Обозначим массу частицы $m$, заряд $e$ и предположим, что она находится во внешнем электромагнитном поле $A^{\mu} \equiv (\varphi, \boldsymbol{A})$.

При выводе волнового уравнения будем действовать эмпирически, руководствуясь принципом соответствия. Это гарантирует нам получение классических уравнений движения в случае, когда справедливо квазиклассическое приближение.

Напомним правило соответствия Шредингера

$$E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \boldsymbol{p} \to -i\nabla. \tag{26}$$

Вводя $p^{\mu} \equiv (E, \boldsymbol{p})$, получаем

$$p^{\mu} \to i\partial^{\mu}. \tag{26'}$$

Из выражения (25) для гамильтониана имеем

$$E = e\varphi + \sqrt{(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 + m^2}, \tag{27}$$

откуда, используя (26), следует волновое уравнение

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi\right)\Psi = \left[\left(\frac{1}{i}\nabla - e\boldsymbol{A}\right)^2 + m^2\right]^{\frac{1}{2}}\Psi.$$

Данное уравнение обладает двумя серьезными недостатками. Во-первых, асимметрия пространственных и временной координат не позволяет увидеть явной релятивистской инвариантности. Во-вторых, в правой части стоит квадратный корень, которому трудно придать смысл оператора, за исключением случая $\boldsymbol{A} = 0$.

Оба недостатка исчезают, если в качестве исходной точки выбрать соотношение (20), которое дает

$$(E - e\varphi)^2 - (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 = m^2. \tag{28}$$