

Первое уравнение есть определение скорости, а второе эквивалентно уравнению (21), что легко установить, используя определения \mathcal{E} и \mathcal{H} (ур. (7)) и равенство

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \right) \mathbf{A}.$$

Раздел II. УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА — ГОРДОНА И ДИРАКА

§ 5. Уравнение Клейна — Гордона

Построение релятивистского волнового уравнения для электрона является сложной задачей из-за наличия у электрона спина. Найдем вначале релятивистское волновое уравнение для частицы спина 0, например, π -мезона. Такая частица не имеет внутренних степеней свободы и ее волновая функция Ψ может зависеть только от \mathbf{r} и t . Обозначим массу частицы m , заряд e и предположим, что она находится во внешнем электромагнитном поле $A^\mu \equiv (\varphi, \mathbf{A})$.

При выводе волнового уравнения будем действовать эмпирически, руководствуясь принципом соответствия. Это гарантирует нам получение классических уравнений движения в случае, когда справедливо квазиклассическое приближение.

Напомним правило соответствия Шредингера

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad p \rightarrow -i\nabla. \quad (26)$$

Вводя $p^\mu \equiv (E, \mathbf{p})$, получаем

$$p^\mu \rightarrow i\partial^\mu. \quad (26')$$

Из выражения (25) для гамильтониана имеем

$$E = e\varphi + \sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2}, \quad (27)$$

откуда, используя (26), следует волновое уравнение

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi \right) \Psi = \left[\left(\frac{1}{i} \nabla - e\mathbf{A} \right)^2 + m^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Psi.$$

Данное уравнение обладает двумя серьезными недостатками. Во-первых, асимметрия пространственных и временной координат не позволяет увидеть явной релятивистской инвариантности. Во-вторых, в правой части стоит квадратный корень, которому трудно придать смысл оператора, за исключением случая $\mathbf{A} = 0$.

Оба недостатка исчезают, если в качестве исходной точки выбрать соотношение (20), которое дает

$$(E - e\varphi)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 = m^2. \quad (28)$$

Это соотношение эквивалентно более общему соотношению, чем (27)

$$E = e\varphi \pm \sqrt{(p - e\mathbf{A})^2 + m^2}. \quad (29)$$

Классическим решениям отвечает знак «+»; знак «—» дает *решения с отрицательной массой, что не имеет физического смысла*. Таким образом, выбирая в качестве исходного соотношение (28), мы вводим *лишние решения с отрицательной массой*.

Применение правила соответствия к (28) дает *уравнение Клейна — Гордона*

$$\left[\left(i \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi \right)^2 - \left(\frac{1}{i} \nabla - e\mathbf{A} \right)^2 \right] \Psi = m^2 \Psi, \quad (30)$$

которое можно также записать в явно релятивистски инвариантном виде

$$(D_\mu D^\mu + m^2) \Psi = [(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu) + m^2] \Psi = 0. \quad (30')$$

Рассмотрим кратко интерпретацию этого уравнения¹⁾. Ограничимся для простоты случаем, когда внешнее поле равно нулю. Уравнение приобретает простой вид (см. § II. 12)

$$(\square + m^2) \Psi = 0. \quad (31)$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка по времени и для определения Ψ при всех временах необходимо знать в начальный момент как Ψ , так и $\partial\Psi/\partial t$. Возникшую трудность легко обойти, если постулировать, что динамическое состояние системы в данный момент определяется не одной функцией Ψ , а двумя — Ψ и $\partial\Psi/\partial t$ или их линейными комбинациями

$$\Phi = \Psi + \frac{i}{m} \frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad \chi = \Psi - \frac{i}{m} \frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Иначе говоря, состояние системы определяется волновой функцией с двумя компонентами Φ и χ . Такая волновая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка по времени, которое легко получить из уравнения Клейна — Гордона. В нерелятивистском пределе энергия частицы приблизительно равна ее массе покоя m и

$$i \frac{\partial\Psi}{\partial t} \approx m\Psi,$$

следовательно, $\chi \ll \Phi$. Одна из компонент становится пренебрежимо малой по отношению к другой, и мы получаем нереля-

¹⁾ Более полное изложение содержится в статье H. Feshbach, F. Villars. Rev. Mod. Phys. 30, 24 (1958).

тивистскую теорию Шредингера, в которой динамическое состояние частицы со спином 0 определяется однокомпонентной волновой функцией.

Для интерпретации волновой функции необходимо определить плотность вероятности положения частицы P и плотность вероятности потока j , которые удовлетворяют уравнению непрерывности (см. § IV. 4)

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla j = 0, \quad (32)$$

или, вводя обозначение $j^\mu \equiv (P, j)$, получим

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (33)$$

Функции Ψ и Ψ^* удовлетворяют уравнению (31), следовательно,

$$\Psi^*(\square\Psi) - (\square\Psi^*)\Psi = 0$$

и, используя определение оператора Даламбера, имеем

$$\partial_\mu [\Psi^*(\partial^\mu\Psi) - (\partial^\mu\Psi^*)\Psi] = 0.$$

Уравнение непрерывности будет выполнено, если выбрать j^μ , пропорциональным выражению, стоящему в квадратных скобках. Коэффициент пропорциональности выбирается так, чтобы в нерелятивистском пределе получилось обычное определение

$$j^\mu = \frac{i}{2m} [\Psi^*(\partial^\mu\Psi) - (\partial^\mu\Psi^*)\Psi],$$

т. е.

$$\begin{aligned} P(r, t) &= \frac{i}{2m} \left[\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial t} \Psi \right], \\ j(r, t) &= \frac{1}{2im} [\Psi^*(\nabla\Psi) - (\nabla\Psi^*)\Psi]. \end{aligned} \quad (34)$$

Исследуя выражение (34) получаем, что *плотность $P(r, t)$ не является положительно определенной*. В этом заключается основная трудность, связанная с уравнением Клейна — Гордона.

Другая трудность, связанная с предыдущей, относится к «решениям с отрицательной энергией». Если, например, рассматривать плосковолновые решения уравнения без внешнего поля

$$\Psi = \exp[-i(Et - pr)],$$

то, подставляя это выражение в (31), получим

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}.$$

Следовательно, существуют решения с отрицательной энергией $- \sqrt{p^2 + m^2}$. Их появление, очевидно, вызвано упоминавшимся

выше введением в теорию отрицательных масс (было бы более корректным называть их решениями с отрицательной массой; однако при нулевом внешнем поле различие между массой и энергией иллюзорно). Для преодоления этих трудностей мы, следуя Паули и Вайскопфу¹⁾, изменим интерпретацию 4-вектора j^μ и определение средних значений. При новой интерпретации теории величина $e j^\mu$ отвечает 4-вектору плотности тока, в частности, $eP(r, t)$ есть плотность электрического заряда. Следовательно, уравнение (33) выражает закон сохранения заряда. С другой стороны, число частиц не сохраняется, что вызвано возможностью аннигиляции или рождения пар частиц с противоположными зарядами. Последовательное рассмотрение таких явлений возможно только в теории поля. При выбранной интерпретации мы получаем теорию одного заряда, а не одной частицы. В теории Дирака нам удастся построить положительно определенную плотность P , однако мы увидим, что трудность, связанная с отрицательными энергиями, остается, и теорию Дирака также нельзя считать удовлетворительной одночастичной теорией (раздел VI).

§ 6. Уравнение Дирака

Перейдем к построению релятивистского волнового уравнения для электронов. Следуя Дираку, будем поступать по аналогии с нерелятивистской квантовой механикой.

В нерелятивистской теории электрон описывается двухкомпонентным спинором, который при вращениях преобразуется, как момент импульса, равный $1/2$. Поэтому в релятивистской теории электрон должен описываться волновой функцией, которая состоит из нескольких компонент и изменяется определенным образом при преобразованиях Лоренца. Обозначим $\psi_s(r, t)$ компоненту с номером s волновой функции Ψ . Тогда Ψ можно записать в виде матрицы, состоящей из одного столбца:

$$\Psi = \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_N \end{vmatrix}.$$

Как и в нерелятивистском случае, волновую функцию Ψ в данный момент времени можно рассматривать как функцию пространственных координат r и внутренних, или спиновых, переменных s ($s = 1, 2, \dots, N$). Такая волновая функция задает

¹⁾ W. Pauli, V. Weisskopf. Helv. Phys. Acta 7, 709 (1934); см. также цитированную в предыдущей сноске статью H. Feshbach, F. Villars.

некоторый вектор состояния $|\psi(t)\rangle$, а пространство \mathcal{E} таких состояний есть тензорное произведение

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(0)} \otimes \mathcal{E}^{(s)}$$

пространства $\mathcal{E}^{(0)}$ орбитальных переменных и пространства $\mathcal{E}^{(s)}$ спиновых переменных; волновая функция Ψ отвечает этому вектору в подходящем представлении

$$\Psi(\mathbf{r}, s; t) \equiv \psi_s(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{r} s | \Psi(t) \rangle.$$

Продолжая аналогию, мы определим плотность вероятности положения частицы формулой

$$P(\mathbf{r}, t) = \sum_{s=1}^N |\psi_s|^2. \quad (35)$$

В соответствии с такими гипотезами волновое уравнение должно иметь вид

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_D \Psi, \quad (36)$$

где H_D — эрмитов оператор в пространстве векторов состояния. Действительно, поскольку Ψ полностью определяет динамическое состояние электрона в данный момент времени, волновое уравнение должно быть первого порядка по времени, а для того, чтобы гарантировать самосогласованность нашего определения $P(\mathbf{r}, t)$, оператор H_D должен быть эрмитовым (см. § IV.3).

Поскольку мы ищем релятивистское волновое уравнение, естественно потребовать, чтобы оно обладало формальной симметрией между пространственными координатами и временем, т. е. было уравнением первого порядка и по отношению к пространственным переменным.

Рассмотрим вначале электрон в случае, когда внешнее поле равно нулю. Гамильтониан должен быть инвариантным относительно трансляций и, следовательно, не зависит от \mathbf{r} . Учитывая все вышесказанное, его можно записать в виде

$$H_D = \alpha p + \beta m, \quad (37)$$

где оператор p получается по правилу соответствия (26), т. е. $p = -i\nabla$, а $\alpha \equiv (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ и β означают 4 эрмитовых оператора, действующих только на спиновые переменные. Если использовать обозначение $E \equiv i\partial/\partial t$, то волновое уравнение можно записать в виде

$$[E - \alpha p - \beta m] \Psi = 0. \quad (38)$$

Для определения α и β мы воспользуемся принципом соответствия и потребуем, чтобы решение этого уравнения удовлетворяло уравнению Клейна — Гордона

$$[E^2 - p^2 - m^2] \Psi = 0. \quad (39)$$

Умножая уравнение (38) слева на оператор $[E + \alpha p + \beta m]$, получаем уравнение второго порядка

$$\left[E^2 - \sum_k (\alpha^k)^2 (p^k)^2 - \beta^2 m^2 - \sum_{k < l} (\alpha^k \alpha^l + \alpha^l \alpha^k) p^k p^l - \sum_k (\alpha^k \beta + \beta \alpha^k) m p^k \right] \Psi = 0.$$

Полученное уравнение и уравнение (39) тождественны, если 4 оператора α и β антисимметричны, а их квадраты равны 1

$$\begin{aligned} (\alpha^k)^2 &= 1, & \alpha^k \alpha^l + \alpha^l \alpha^k &= 0 \quad (k \neq l), \\ \beta^2 &= 1, & \alpha^k \beta + \beta \alpha^k &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Уравнение (38), в котором матрицы α и β эрмитовы и удовлетворяют соотношениям (40), называется уравнением Дирака.

Для того чтобы получить уравнение Дирака, описывающее электрон во внешнем электромагнитном поле (φ, \mathbf{A}) , нужно сделать подстановку

$$E \rightarrow E - e\varphi, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A} \quad (41)$$

(e — заряд электрона: $e < 0$). Тогда получим

$$[(E - e\varphi) - \alpha(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - \beta m] \Psi = 0, \quad (42)$$

т. е.

$$\left[\left(i \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi \right) - \alpha(-i\nabla - e\mathbf{A}) - \beta m \right] \Psi = 0. \quad (43)$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (36), находим выражение для гамильтониана Дирака при наличии внешнего поля

$$H_D = e\varphi + \alpha(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta m. \quad (44)$$

§ 7. Построение пространства $\mathcal{E}^{(s)}$

Представление Дирака

Нам осталось сконструировать пространство $\mathcal{E}^{(s)}$. Операторами в этом пространстве являются четыре основных оператора: β , α_x , α_y , α_z и различные функции от этих операторов. Пространство $\mathcal{E}^{(s)}$ должно быть неприводимым по отношению к этому набору операторов.

Для построения $\mathcal{E}^{(s)}$ мы используем свойство эрмитовости четырех основных операторов и соотношения (40), которые определяют их алгебраические свойства.

Эти свойства аналогичны свойствам трех операторов σ_1 , σ_2 , σ_3 нерелятивистской теории спина 1/2. В этом случае размерность пространства $\mathcal{E}^{(s)}$ спиновых переменных равна двум. Оно строилось следующим образом. Так как σ_3 — эрмитов оператор

и $\sigma_3^2 = 1$, то его собственными значениями могут быть только ± 1 . Более того, с каждым собственным вектором σ_3 можно связать другой собственный вектор, отвечающий собственному значению противоположного знака. Рассмотрим, например, вектор $|+\rangle$, такой, что $\sigma_3|+\rangle = |+\rangle$. Тогда в силу антикоммутативности σ_3 и σ_1 для вектора $|-\rangle \equiv \sigma_1|+\rangle$ получим $\sigma_3|-\rangle = (-1)|-\rangle$. В результате имеем $\sigma_1|\pm\rangle = |\mp\rangle$ и $\sigma_3|\pm\rangle = (\pm 1)|\pm\rangle$. Следовательно, пространство, натянутое на векторы $|+\rangle$ и $|-\rangle$, инвариантно по отношению к действию операторов σ_3 и σ_1 и по отношению к функциям от этих операторов (а именно $\sigma_2 \equiv i\sigma_1\sigma_3$). Из способа построения пространства видно, что оно неприводимо, следовательно, нами построено искомое пространство $\mathcal{E}^{(\sigma)}$. В представлении, где базисными векторами являются $|+\rangle$ и $|-\rangle$, операторы σ_1 , σ_2 и σ_3 задаются матрицами Паули (см. § XIII. 19 или формулу (VII. 65)).

Сведем задачу построения $\mathcal{E}^{(\sigma)}$ к предыдущей. Рассмотрим операторы σ_x , σ_y , σ_z и ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , определяемые равенствами

$$\sigma_z = -ia_x\sigma_y, \quad \sigma_x = -ia_y\sigma_z, \quad \sigma_y = -ia_z\sigma_x, \quad (45)$$

$$\rho_3 = \beta, \quad \rho_1 = \sigma_z\sigma_x = -ia_x\sigma_y\sigma_z, \quad \rho_2 = i\rho_1\rho_3 = -\beta a_x\sigma_y\sigma_z. \quad (46)$$

Четыре основных оператора выражаются через ρ и σ по формулам

$$\beta = \rho_3, \quad a^k = \rho_1\sigma^k. \quad (47)$$

Таким образом, построение $\mathcal{E}^{(\sigma)}$ свелось к построению пространства, неприводимого по отношению к операторам ρ и σ . Легко показать, что:

- (i) каждый оператор ρ коммутирует с каждым σ ;
- (ii) σ — три антикоммутирующих эрмитовых оператора, квадраты которых равны единице;
- (iii) ρ — три антикоммутирующих эрмитовых оператора, квадраты которых равны единице.

Следовательно (см. § VIII. 7):

- (i) $\mathcal{E}^{(\sigma)}$ есть тензорное произведение

$$\mathcal{E}^{(\sigma)} = \mathcal{E}^{(\rho)} \otimes \mathcal{E}^{(\sigma)}$$

пространства $\mathcal{E}^{(\rho)}$, неприводимого по отношению к ρ , и пространства $\mathcal{E}^{(\sigma)}$, неприводимого по отношению к σ ;

(ii) размерность $\mathcal{E}^{(\sigma)}$ равна двум и оно может быть построено приведенным выше способом;

(iii) размерность $\mathcal{E}^{(\rho)}$ также равна двум и оно может быть построено тем же способом.

Таким образом, размерность пространства $\mathcal{E}^{(\sigma)}$ равна четырем.

В следующих разделах мы покажем, что операторы σ связаны со спином, а ρ — со знаком энергии, поскольку уравнение

Дирака, так же как и уравнение Клейна — Гордона, имеет решения с отрицательной энергией. В частности, мы увидим, что α есть полярный векторный оператор, а $\sigma \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ — аксиальный векторный оператор. Кроме того, формально имеем

$$\alpha \times \alpha = 2i\sigma. \quad (48)$$

Оператор спина электрона есть $1/2 \sigma$, а знак энергии определяется собственным значением оператора $\beta \equiv \rho_3$.

Динамическое состояние электрона определяется волновой функцией Ψ , имеющей 4 компоненты, что в два раза больше, чем в нерелятивистской теории частицы со спином $1/2$. Представление, в котором ρ и σ задаются матрицами Паули (см. ур. (VII. 65) — (VII. 66)), называется *представлением Дирака*. В этом представлении каждая компонента отвечает определенной ориентации спина по оси Oz и определенному знаку энергии.

§ 8. Ковариантная форма уравнения Дирака

Дирак первоначально получил свое уравнение в форме (43). Такая запись удобна для физической интерпретации и перехода к нерелятивистскому пределу. Получим форму уравнения Дирака, которая симметрична относительно временной и пространственных координат и более предпочтительна в тех случаях, когда основную роль играют вопросы релятивистской ковариантности.

Умножим уравнение (43) слева на β , тогда, вводя обозначения

$$\gamma^\mu \equiv (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \equiv (\gamma^0, \gamma), \\ \gamma^0 \equiv \beta, \quad \gamma \equiv \beta\alpha, \quad (49)$$

получим

$$[i\gamma^\mu D_\mu - m] \Psi \equiv [\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m] \Psi = 0. \quad (50)$$

Свойства γ^μ легко получить, используя определения (49) и свойства α и β . Десять соотношений (40) переходят в десять соотношений

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (51)$$

Условия эрмитовости α и β эквивалентны условиям

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k, \quad (52)$$

которые можно записать в компактной форме

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (53)$$

Удобно распространить на операторы γ правила подъема и опускания индексов

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu. \quad (54)$$

Отметим, что

$$\gamma_0 = \gamma^0, \quad \gamma_k = -\gamma^k, \quad (55)$$

$$\gamma^\mu = \gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu^{-1}. \quad (56)$$

§ 9. Сопряженное уравнение. Определение тока

Выше мы построили положительно определенную плотность вероятности (ур. (35)). Как отмечалось, эрмитовость гамильтониана Дирака гарантирует самосогласованность этого определения. Определим плотность тока и покажем, что для решений уравнения Дирака плотность тока удовлетворяет уравнению непрерывности. Вначале рассмотрим этот вопрос, используя форму Дирака, а затем повторим рассуждения с ковариантной формой.

Допустим, что выбрано некоторое представление для β и a , тогда волновая функция Ψ есть матрица-столбец

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}.$$

Обозначим эрмитово-сопряженную к ней

$$\Psi^\dagger = (\psi_1^* \psi_2^* \psi_3^* \psi_4^*).$$

Операторы в спиновом пространстве являются матрицами 4×4 . Можно определить скалярное произведение, в котором суммирование происходит только по спиновым переменным. Обозначим такое скалярное произведение простыми скобками. Тогда плотность P можно записать в виде

$$P(\mathbf{r}, t) = (\Psi^\dagger \Psi). \quad (57)$$

В качестве другого примера рассмотрим матричный элемент β_{st} матрицы β , стоящий в строке s и столбце t ($s, t = 1, 2, 3, 4$), тогда имеем

$$(\Psi^\dagger \beta \Psi) = \sum_s \sum_t \psi_s^* \beta_{st} \psi_t.$$

Пусть Ψ — решение уравнения Дирака

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_D \Psi = \left[e\varphi + \sum_k a^k \left(-i \frac{\partial}{\partial x^k} - eA^k \right) + \beta m \right] \Psi, \quad (58)$$

тогда Ψ^\dagger есть решение эрмитово-сопряженного уравнения, которое получается комплексным сопряжением уравнения (58) и заменой каждой матрицы в нем на транспонированную:

$$i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} = -\Psi^\dagger H_D = -e\Phi \Psi^\dagger - \sum_k \left(i \frac{\partial}{\partial x^k} - eA^k \right) \Psi^\dagger a^k - m \Psi^\dagger \beta. \quad (59)$$

Умножая скалярно уравнение (58) слева на Ψ^\dagger , а уравнение (59) справа на Ψ и складывая, получим

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^\dagger \Psi) = -i \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} (\Psi^\dagger a^k \Psi). \quad (60)$$

Слева стоит производная по времени от плотности вероятности P , а справа — дивергенция некоторого вектора $j(r, t)$

$$j(r, t) = (\Psi^\dagger a \Psi). \quad (61)$$

Полученная величина $j(r, t)$ и представляет собой искомую плотность тока, а уравнение (60) есть уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} P + \nabla j = 0.$$

Можно повторить приведенные выше рассуждения, используя ковариантную форму уравнения Дирака (ур. (50)). Эрмитово-сопряженным к уравнению (50) будет

$$(-i\partial_\mu - eA_\mu) \Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - m \Psi^\dagger = 0, \quad (62)$$

(где символ $\partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger}$ обозначает матрицу-строку из четырех элементов $(\partial \Psi^\dagger / \partial x^\mu) \gamma^{\mu\dagger}$). Удобно ввести обозначение

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0, \quad \Psi^\dagger = \bar{\Psi} \gamma^0. \quad (63)$$

Умножая уравнение (62) справа на γ^0 и учитывая соотношения (53), получим уравнение

$$(-i\partial_\mu - eA_\mu) \bar{\Psi} \gamma^\mu - m \bar{\Psi} = 0, \quad (64)$$

которое эквивалентно (59). Величина $\bar{\Psi}$ называется *сопряженной* к Ψ , а уравнение (64) — *сопряженным уравнением*.

Умножая скалярно уравнения (50) слева на $\bar{\Psi}$, а (64) — справа на Ψ и вычитая их, имеем

$$i\partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) = 0.$$

Определим четырехмерный вектор плотности тока

$$j^\mu \equiv (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi). \quad (65)$$

Тогда предыдущее уравнение эквивалентно уравнению непрерывности

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

Легко показать, что $j^\mu \equiv (P, j)$; таким образом, мы записали уравнение непрерывности в ковариантной форме. В следующем разделе мы покажем, что четыре компоненты j^μ действительно образуют 4-вектор.

Раздел III. СВОЙСТВА ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

§ 10. Свойства матриц Дирака

Прежде чем рассматривать свойства инвариантности уравнения Дирака, изучим свойства 4×4 матриц $\gamma^\mu \equiv (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I, \quad (66)$$

где I — единичная матрица. Матричные соотношения (66) являются аналогами соотношений (51) между операторами, однако рассматриваемые здесь матрицы не обязаны удовлетворять условиям унитарности (53). Все свойства, которые мы получим, будут следовать только из соотношений (66).

Матрицы γ^A . Поскольку матрицы γ^μ антикоммутируют, а квадрат любой из них равен $+I$ или $-I$, то любое произведение нескольких матриц γ^μ равно, с точностью до знака, одной из 16-ти матриц γ^A , приведенных в табл. II. Матрицы γ^A сгруппированы в пять классов (S), (V), (T), (A) и (P), каждый из которых содержит 1, 4, 6, 4 и 1 элементов соответственно (причины такой классификации станут ясны в конце этого раздела (см. § 14)).

Таблица II

Матрицы γ^A

Обозначения	Явный вид		
	$(\gamma^A)^2 = I$	$(\gamma^A)^2 = -I$	
(S) $1 \equiv$	I		
(V) $\gamma^\mu \equiv \{\gamma^0, \gamma^k\} \equiv$	γ^0	$\gamma^1 \quad \gamma^2 \quad \gamma^3$	
(T) $\gamma^{[\lambda\mu]} \equiv \{\gamma^k \gamma^0, \gamma^0 \gamma^k\} \equiv$	$\gamma^1 \gamma^0 \quad \gamma^2 \gamma^0 \quad \gamma^3 \gamma^0$	$\gamma^2 \gamma^3 \quad \gamma^3 \gamma^1 \quad \gamma^1 \gamma^2$	
(A) $\gamma^{[\lambda\mu\nu]} \equiv \{\gamma^0 \gamma^5, \gamma^k \gamma^5\} \equiv$	$\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$	$\gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 \quad \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 \quad \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2$	
(P) $\gamma^{[\lambda\mu\nu\rho]} \equiv \gamma^5$		$\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$	