Тогда предыдущее уравнение эквивалентно уравнению непрерывности

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

Легко показать, что $j^\mu \equiv (P, \mathbf{j})$; таким образом, мы записали уравнение непрерывности в ковариантной форме. В следующем разделе мы покажем, что четыре компоненты $j^\mu$ действительно образуют 4-вектор.

## Раздел III. СВОЙСТВА ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

### § 10. Свойства матриц Дирака

Прежде чем рассматривать свойства инвариантности уравнения Дирака, изучим свойства $4 \times 4$ *матриц* $\gamma^\mu \equiv (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I, \tag{66}$$

где $I$ — единичная матрица. Матричные соотношения (66) являются аналогами соотношений (51) между операторами, однако рассматриваемые здесь матрицы не обязаны удовлетворять условиям унитарности (53). Все свойства, которые мы получим, будут следовать только из соотношений (66).

Матрицы $\gamma^A$. Поскольку матрицы $\gamma^\mu$ антикоммутируют, а квадрат любой из них равен $+I$ или $-I$, то любое произведение нескольких матриц $\gamma^\mu$ равно, с точностью до знака, одной из 16-ти матриц $\gamma^A$, приведенных в табл. II. Матрицы $\gamma^A$ сгруппированы в пять классов $(S)$, $(V)$, $(T)$, $(A)$ и $(P)$, каждый из которых содержит 1, 4, 6, 4 и 1 элементов соответственно (причины такой классификации станут ясны в конце этого раздела (см. § 14)).

Таблица II

**Матрицы $\gamma^A$**

| Обозначения | Явный вид | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $(\gamma^A)^2 = I$ | | | $(\gamma^A)^2 = -I$ | | |
| $(S)$ $1 \equiv$ | $I$ | | | | | |
| $(V)$ $\gamma^\mu \equiv \{\gamma^0, \gamma^k\} \equiv$ | $\gamma^0$ | | | $\gamma^1$ | $\gamma^2$ | $\gamma^3$ |
| $(T)$ $\gamma^{[\lambda\mu]} \equiv \{\gamma^k\gamma^0, \gamma^5\gamma^0\gamma^k\} \equiv$ | $\gamma^1\gamma^0$ | $\gamma^2\gamma^0$ | $\gamma^3\gamma^0$ | $\gamma^2\gamma^3$ | $\gamma^3\gamma^1$ | $\gamma^1\gamma^2$ |
| $(A)$ $\gamma^{[\lambda\mu\nu]} \equiv \{\gamma^0\gamma^5, \gamma^k\gamma^5\} \equiv$ | $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ | | | $\gamma^0\gamma^2\gamma^3$ | $\gamma^0\gamma^3\gamma^1$ | $\gamma^0\gamma^1\gamma^2$ |
| $(P)$ $\gamma^{[\lambda\mu\nu\rho]} \equiv \gamma^5$ | | | | $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ | | |

Ясно, что квадраты этих матриц $(\gamma^A)^2$ равны $+I$ или $-I$; шесть матриц, квадраты которых равны $+I$, расположены в левом столбце, десять матриц, квадраты которых равны $-I$, расположены в правом столбце.

Из всех этих матриц только единичная матрица $I$ коммутирует со всеми остальными. Если $\gamma^A \neq I$, то она антикоммутирует с 8 из 16 матриц и коммутирует с 8 оставшимися.

В частности, матрица $\gamma^5$, которая определяется следующим образом [1]):

$$\gamma^5 \equiv \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \tag{67}$$

антикоммутирует с $\gamma^\mu$:

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0, \tag{68}$$

а ее квадрат равен

$$(\gamma^5)^2 = -I. \tag{69}$$

Обратные матрицы $(\gamma_A)$. Определим матрицы $\gamma_\mu$ соотношением

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu. \tag{70}$$

Очевидно, что

$$\gamma^\mu = [\gamma_\mu]^{-1}.$$

Как следствие, мы получим обратную к матрице $\gamma^A$, если в ее выражении через матрицы $\gamma^\mu$ изменим порядок их следствия на обратный и каждую матрицу $\gamma^\mu$ заменим на $\gamma_\mu$. Обозначим получившееся выражение $\gamma_A$

$$\gamma_A\gamma^A = \gamma^A\gamma_A = I. \tag{71}$$

Действуя таким образом, находим обратную матрицу к $\gamma^5$

$$\gamma_5 = \gamma_3\gamma_2\gamma_1\gamma_0.$$

След и определитель. Справедливо равенство

$$\operatorname{Tr}\gamma^A = \begin{cases} 4, & \text{если} \quad \gamma^A = I, \\ 0, & \text{если} \quad \gamma^A \neq I. \end{cases} \tag{72}$$

Для доказательства предположим, что $\gamma^A \neq I$ и пусть $\gamma^B$ одна из 8 матриц, антикоммутирующих с $\gamma^A$

$$\gamma^A = -\gamma^B\gamma^A\gamma_B.$$

Тогда имеем

$$\operatorname{Tr}\gamma^A = -\operatorname{Tr}\gamma^B\gamma^A\gamma_B = -\operatorname{Tr}\gamma_B\gamma^B\gamma^A = -\operatorname{Tr}\gamma^A = 0.$$

Отметим также, что (задача 3)

$$\det\gamma^A = 1.$$

---

[1]) Индекс 4 обычно используется для обозначения временнóй компоненты, которая определяется равенством $x^4 = ix^0 = ict$.

Лемма о перестройке. Следующее свойство устанавливается простой проверкой. Если умножить каждую из 16 матриц $\gamma^A$ справа (или слева) на одну из них, то с точностью до знака и порядка получим те же 16 матриц.

Линейная независимость и неприводимость. Используя лемму о перестройке и свойства следа, можно легко показать, что

1°. Матрицы $\gamma^A$ линейно независимы.

2°. Любая $4\times 4$ матрица $M$ однозначно представляется в виде линейной комбинации матриц $\gamma^A$

$$M=\sum_A m_A\gamma^A, \quad m_A=\frac{1}{4}\operatorname{Tr}\gamma_A M.$$

3°. Всякая матрица, коммутирующая с каждой из матриц $\gamma^\mu$ и, следовательно, с каждой из матриц $\gamma^A$, пропорциональна единичной матрице

$$\text{если } [M, \gamma^\mu]=0 \quad \text{для любого } \mu, \text{ то} \quad M=\text{const}\times I.$$

Фундаментальная теорема. *Пусть $\gamma^\mu$ и $\gamma'^\mu$ — два набора матриц $4\times 4$, которые удовлетворяют соотношениям* (66). *Тогда существует несингулярная* ($\det S\neq 0$) *матрица $S$, определенная с точностью до множителя и такая, что*

$$\gamma^\mu=S\gamma'^\mu S^{-1} \qquad (\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{73}$$

Доказательство теоремы проведем следующим образом. С каждым набором $\gamma^\mu$ и $\gamma'^\mu$ связаны 16 матриц $\gamma^A$ и $\gamma'^A$, определение и свойства которых были приведены выше, так что каждой матрице $\gamma^A$ соответствует некоторая матрица $\gamma'^A$, индекс $A$ принимает 16 различных значений. Возьмем некоторую матрицу $F$ и обозначим $S$ следующую матрицу:

$$S\equiv\sum_A \gamma'^A F\gamma_A,$$

где суммирование ведется по всем возможным значениям индекса $A$.

Выберем конкретную матрицу $\gamma^B$, обратная к ней матрица $\gamma_B$, а соответствующая матрица из другого набора $\gamma'^B$. В силу леммы о перестройке, имеем

$$\gamma'^B S\gamma_B\equiv\sum_A \gamma'^B\gamma'^A F\gamma_A\gamma_B=\sum_A \gamma'^A F\gamma_A\equiv S,$$

следовательно

$$\gamma'^B S=S\gamma^B. \tag{74}$$

Для доказательства соотношений (73) остается показать, что матрица $S$ имеет обратную. Построим матрицу $T$

$$T \equiv \sum_A \gamma^A G \gamma'_A,$$

где $G$ — произвольная матрица. Рассуждая как и ранее, получаем

$$\gamma^B T = T \gamma'^B.$$

Следовательно,

$$\gamma^B T S = T \gamma'^B S = T S \gamma^B$$

для любой матрицы $\gamma^B$. Поскольку матрица $TS$ коммутирует со всеми $\gamma^B$, она пропорциональна единичной матрице: $TS = c \times I$. Постоянная $c$ вычисляется по формуле

$$c = \frac{1}{4} \operatorname{Tr} TS = \frac{1}{4} \sum_A \sum_B \operatorname{Tr} \gamma^A G \gamma'_A \gamma'^B F \gamma_B =$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{Tr} G \left( \sum_A \sum_B \gamma'_A \gamma'^B F \gamma_B \gamma^A \right) = 4 \operatorname{Tr} GS.$$

Матрицу $F$ всегда можно выбрать так, чтобы по крайней мере один из матричных элементов $S$ был отличен от нуля. В противном случае легко показать, что матрицы $\gamma^A$ не были бы линейно независимы. После этого можно выбрать $G$ так, чтобы

$$\operatorname{Tr} GS \equiv \sum_s \sum_t G_{st} S_{ts} = \frac{1}{4},$$

следовательно $c = 1$ и $TS = I$. Таким образом, матрица $S$ имеет обратную и, умножая равенство (74) на $S^{-1}$ справа, получаем соотношения (73).

Если существует другая матрица $S'$, для которой выполнены те же соотношения, то $S^{-1}S'$ коммутирует со всеми матрицами $\gamma^\mu$ и, следовательно, $S^{-1}S' = c \times I$. Верно и обратное: если для $S$ выполнены соотношения (73), то они выполнены и для любой матрицы, пропорциональной $S$. Тем самым мы доказали, что несингулярная матрица $S$ существует и определена с точностью до множителя. ■

Если матрицы $\gamma^\mu$, удовлетворяющие соотношениям (66), унитарны

$$\gamma_\mu \equiv \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^{\mu +}, \tag{75}$$

то унитарны все матрицы $\gamma^A$ и, следовательно, они эрмитовы или антиэрмитовы в зависимости от того, равен ли квадрат $(\gamma^A)^2$ единичной матрице $+I$ или $-I$.

Следующее утверждение, доказательство которого предоставляем читателю, дополняет фундаментальную теорему:

*Если $\gamma^\mu$ и $\gamma'^\mu$ — два набора унитарных матриц $4 \times 4$, удовлетворяющих соотношениям* (66), *то существует определенная с точностью до фазового множителя унитарная матрица $U$, такая, что $\gamma'^\mu = U\gamma^\mu U^\dagger$* ($\mu = 0, 1, 2, 3$).

Комплексное сопряжение, матрица $B$. В частности, если матрицы $\gamma^\mu$ удовлетворяют соотношениям (66) и унитарны, то 4 комплексно сопряженных матрицы $\gamma^{\mu*}$ тоже унитарны и удовлетворяют тем же соотношениям. В силу предыдущего утверждения матрицы $\gamma^\mu$ и $\gamma^{\mu*}$ связаны унитарным преобразованием. Обозначим $B$ матрицу этого преобразования ($B$ определена с точностью до фазового множителя)

$$\gamma^\mu = B\gamma^{\mu*}B^\dagger, \quad \gamma^{\mu*} = B^*\gamma^\mu\tilde{B}. \tag{76}$$

Можно показать, что $B$ антисимметрична

$$B = -\tilde{B},$$

или, что то же самое, справедливы равенства

$$BB^* = B^*B = -I. \tag{77}$$

Если для матриц $\gamma$ выбрано представление Дирака, то

$$B \equiv B_D = \gamma^2\gamma^5 = -i\rho_3\sigma_y.$$

В этом случае легко проверить справедливость равенств (77).

## § 11. Инвариантность уравнения Дирака при ортохронных преобразованиях системы координат

Принцип относительности требует, чтобы уравнение Дирака и уравнение непрерывности сохраняли одну и ту же форму в различных системах координат, связанных преобразованием Лоренца. В действительности, строго говоря, требуется инвариантность только по отношению к собственным преобразованиям Лоренца [1]), однако теория инвариантна по отношению к полной группе. Рассмотрим вначале подробно инвариантность по отношению к ортохронной группе. Обращение времени, а также другие свойства инвариантности уравнения Дирака, не

[1]) А также по отношению к пространственным и временным трансляциям. Эту инвариантность легко установить, используя рассуждения, которые аналогичны приводимым ниже. Если начало координат сдвигается на 4-вектор $a^\mu$, т. е. $x'^\mu x = x^\mu + a^\mu$, то $A'_\mu(x') = A_\mu(x)$ и закон преобразования волновых функций (аналог закона (85)) имеет простой вид

$$\Psi'(x') = \Psi(x).$$

связанные непосредственно с преобразованиями Лоренца, будут рассмотрены в конце этого раздела.

Будем считать, что динамическое состояние электрона в системе координат $(R)$ задается четырехкомпонентной волновой функцией, удовлетворяющей уравнению Дирака

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu(x)) - m]\Psi(x) = 0. \tag{78}$$

Фиксируем некоторое представление для операторов в пространстве $\mathscr{E}^{(s)}$; символы $\gamma^\mu$ означают тогда вполне определенные матрицы, и соотношение (78) сводится к системе из четырех уравнений $(s = 1, 2, 3, 4)$

$$\sum_{t=1,2,3,4} \sum_\mu (\gamma^\mu)_{st} \left(i \frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu(x^0x^1x^2x^3)\right) \psi_t(x^0x^1x^2x^3) - \\ - m\psi_s(x^0x^1x^2x^3) = 0$$

для четырех компонент $\psi_s(x)$ волновой функции.

Рассмотрим ту же физическую систему в новой системе координат $(R')$, связанной с исходной ортохронным преобразованием Лоренца $\mathscr{L}$

$$(R') = \mathscr{L}(R).$$

Преобразование $\mathscr{L}$ характеризуется некоторой матрицей $\Omega^\mu_\nu$, удовлетворяющей соотношениям (12), (13) и определяющей линейное соответствие между координатами $x^\mu$ данной точки в системе $(R)$ и координатами $x'^\mu$ *той же точки* в системе $(R')$, т. е. закон преобразования контравариантных векторов (ур. (11) и (15)). Символически можно записать

$$x' = \mathscr{L}x, \quad x = \mathscr{L}^{-1}x'. \tag{79}$$

Операторы частных производных преобразуются, как ковариантные векторы

$$\partial_\mu = \partial'_\nu \Omega^\nu_\mu. \tag{80}$$

Если обозначить $A'_\mu(x')$ ковариантные компоненты электромагнитного потенциала в новой системе координат, то они связаны с $A_\mu(x)$ по закону преобразования ковариантных векторов

$$A_\mu(x) \equiv A_\mu(\mathscr{L}^{-1}x') = A'_\nu(x')\Omega^\nu_\mu. \tag{81}$$

Как функция новых координат $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению, которое получается из (78) после подстановки (80) и (81)

$$[\hat{\gamma}^\mu(i\partial'_\mu - eA'_\mu(x')) - m]\Psi(\mathscr{L}^{-1}x') = 0, \tag{82}$$

где

$$\hat{\gamma}^\mu \equiv \Omega^\mu_\rho \gamma^\rho. \tag{83}$$

Матрицы $\gamma^\mu$ унитарны и удовлетворяют соотношениям (66). Четыре матрицы $\hat{\gamma}^\mu$ не обязательно унитарны, но в силу ортогональности $\Omega^\mu_\nu$ (соотношения (13)), они также удовлетворяют соотношениям (66), т. е.

$$\hat{\gamma}^\mu\hat{\gamma}^\nu + \hat{\gamma}^\nu\hat{\gamma}^\mu = \Omega^\mu_\rho\Omega^\nu_\sigma(\gamma^\rho\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\rho) = 2\Omega^\mu_\rho g^{\rho\sigma}\Omega^\nu_\sigma = 2g^{\mu\nu}.$$

В силу фундаментальной теоремы § 10 существует несингулярная матрица $\Lambda$, которая преобразует матрицы $\hat{\gamma}$ в $\gamma$

$$\hat{\gamma}^\mu \equiv \Omega^\mu_\rho\gamma^\rho = \Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda \quad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{84}$$

Подставляя это соотношение в уравнение (82), вводя обозначение

$$\Psi'(x') = \Lambda\Psi(x) \equiv \Lambda\Psi(\mathscr{L}^{-1}x'), \tag{85}$$

и умножая слева на $\Lambda$, получаем

$$[\gamma^\mu(i\partial'_\mu - eA'_\mu(x')) - m]\,\Psi'(x') = 0.$$

Это волновое уравнение описывает эволюцию системы в новой системе координат, оно формально тождественно с (78). Таким образом, уравнение Дирака формально инвариантно относительно ортохронных преобразований системы координат, и закон преобразования волновой функции определяется уравнением (85).

В общем случае матрицу $\Lambda$, которая определена с точностью до постоянного множителя, нельзя выбрать унитарной. Однако мы покажем, что множитель всегда можно выбрать таким образом, чтобы

$$\Lambda^\dagger = \gamma^0\Lambda^{-1}\gamma^0, \tag{86}$$

и произвол остается только в фазе.

Поскольку $\Omega^\mu_\rho$ вещественны, а $\gamma^\mu$ унитарны и удовлетворяют соотношениям (75), то, сравнивая (83) и эрмитово-сопряженное соотношение, находим

$$\hat{\gamma}^{\mu\dagger} = \gamma^0\hat{\gamma}^\mu\gamma^0.$$

Переходя от соотношения (84) к эрмитово-сопряженному и подставляя предыдущую формулу, получаем

$$\hat{\gamma}^\mu = (\gamma^0\Lambda^\dagger\gamma^0)\,\gamma^\mu\,(\gamma^0\Lambda^\dagger\gamma^0)^{-1}.$$

Сравнивая эту формулу с (84), видим, что матрица $\Lambda\gamma^0\Lambda^\dagger\gamma^0$ коммутирует с четырьмя матрицами $\gamma^\mu$ и, следовательно, пропорциональна единичной

$$\Lambda^\dagger = c\gamma^0\Lambda^{-1}\gamma^0. \tag{87}$$

Покажем, что постоянная $c$ обязательно вещественна и положительна. Используя формулы (87) и (84), имеем

$$\Lambda^{+}\Lambda = c\gamma^{0}(\Lambda^{-1}\gamma^{0}\Lambda) = c\left(\Omega_{0}^{0} + \sum_{k}\Omega_{k}^{0}\gamma^{0}\gamma^{k}\right),$$

откуда, принимая во внимание (72), получаем: $\operatorname{Tr}\Lambda^{+}\Lambda = 4c\Omega_{0}^{0}$. Поскольку след эрмитовой матрицы $\Lambda^{+}\Lambda$ вещественный и положительный и число $\Omega_{0}^{0}$ также вещественно и положительно, то приходим к искомому утверждению о постоянной $c$. Если матрицу $\Lambda$ разделить на $\sqrt{c}$, то новая матрица также будет $\Lambda$-матрицей и будет удовлетворять уравнению (86). ■

Закон преобразования волновых функций (85) определяет закон преобразования сопряженных функций

$$\overline{\Psi}' \equiv \Psi'^{+}\gamma^{0} = \Psi^{+}\Lambda^{+}\gamma^{0} = \overline{\Psi}\gamma^{0}\Lambda^{+}\gamma^{0},$$

откуда, с учетом (86), получаем

$$\overline{\Psi}'(x') = \overline{\Psi}(x)\Lambda^{-1}. \tag{88}$$

Используя этот закон преобразования, читатель без труда проверит, что сопряженное уравнение (64) также формально инвариантно относительно ортохронных преобразований системы координат.

Остается показать инвариантность уравнения непрерывности или что ток $j^{\mu}$ (определение (65)) преобразуется как контравариантный 4-вектор [1]).

Последнее легко установить, используя (85), (88) и (84)

$$j'^{\mu}(x') \equiv (\overline{\Psi}'\gamma^{\mu}\Psi') = (\overline{\Psi}\Lambda^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda\Psi) = \Omega_{\nu}^{\mu}(\overline{\Psi}\gamma^{\nu}\Psi) = \Omega_{\nu}^{\mu}j^{\nu}(x).$$

Условия (84) и (86) для каждого преобразования Лоренца определяют $\Lambda$ с точностью до фазового множителя. *В данном случае эта фаза не имеет физического смысла.*

Удобно устранить, насколько это возможно, произвол в фазе, потребовав, чтобы $\Lambda$ образовывали группу, гомоморфную ортохронной группе Лоренца (см. обсуждение в § XV. 8).

Условие (84), с учетом вещественности $\Omega_{\nu}^{\mu}$, дает

$$\Omega_{\nu}^{\mu}\gamma^{\nu*} = (\Lambda^{*})^{-1}\gamma^{\mu*}\Lambda^{*},$$

откуда, вводя унитарную матрицу $B$ (определение (76)), получаем

$$\Omega_{\nu}^{\mu}\gamma^{\nu} = (B\Lambda^{*}B^{+})^{-1}\gamma^{\mu}(B\Lambda^{*}B^{+}).$$

---

[1]) В противном случае нормировка волновой функции зависела бы от системы координат и нельзя было бы интерпретировать $j^{0}$ как плотность вероятности положения.

Сравнивая это уравнение и уравнение (84), видим, что $B\Lambda^* B^\dagger \Lambda^{-1}$ коммутирует с четырьмя матрицами $\gamma^\mu$ и, следовательно, пропорциональна единичной матрице. Легко показать, вычисляя, например, $\det B\Lambda^* B^\dagger \Lambda^{-1}$, что модуль коэффициента пропорциональности равен единице; другими словами

$$\Lambda^* = e^{i\lambda} B^\dagger \Lambda B.$$

Так как $\Lambda$ определена с точностью до фазового множителя, его всегда можно выбрать так, что в полученной формуле будет $e^{i\lambda} = 1$. В дальнейшем будем считать, что сделан именно такой выбор, тогда $\Lambda$ определена с точностью до знака.

Таким образом, каждому ортохронному преобразованию Лоренца отвечают *две* матрицы $\Lambda$, отличающиеся знаком и определяемые тремя условиями:

$$\Omega^\mu_\nu \gamma^\nu = \Lambda^{-1}\gamma^\mu \Lambda, \tag{89а}$$

$$\Lambda^\dagger = \gamma^0 \Lambda^{-1} \gamma^0, \tag{89б}$$

$$\Lambda^* = B^\dagger \Lambda B. \tag{89в}$$

Набор матриц $\Lambda$, удовлетворяющих этим условиям, образует группу, которая гомоморфна ортохронной группе Лоренца. В следующем параграфе мы увидим, что произвол в знаке $\Lambda$ нельзя устранить, не нарушив при этом групповой структуры [1]).

## § 12. Преобразования собственной группы

Найдем явные выражения для матриц $\Lambda$, которые удовлетворяют условиям (89). В этом параграфе мы будем рассматривать только преобразования собственной группы.

Вначале рассмотрим инфинитезимальные преобразования. Каждому из шести инфинитезимальных «вращений» $g_{\mu\nu} - \varepsilon Z^{(\alpha\beta)}_{\mu\nu}$ соответствует матрица $\Lambda^{(\alpha\beta)}(\varepsilon)$, которая отличается от единич-

---

[1]) Вместо условия (89в) можно использовать более общее условия: $\Lambda^* = \eta B^\dagger \Lambda B$, где постоянная $\eta$ зависит от рассматриваемого преобразования Лоренца. Множество матриц $\Lambda$ будет иметь структуру группы, если величины $\eta$ образуют абелево представление группы Лоренца. Следовательно, для преобразований из собственной группы Лоренца $\mathscr{L}_0$ обязательно имеем $\eta = 1$, что снова дает условие (89в). Для преобразований, включающих отражение, т. е. принадлежащих $s\mathscr{L}_0$, имеются две возможности выбора $\eta$:

(а) $\eta = 1$ для любого $s\mathscr{L}_0$, что дает (89в);

(б) $\eta = -1$ для любого $s\mathscr{L}_0$, т. е. $\Lambda^* = -B^\dagger \Lambda B$.

Физическое содержание теории, очевидно, не зависит от этого выбора. Обе группы $G^{(а)}$ и $G^{(б)}$, которые соответствуют возможностям (а) и (б), гомоморфны ортохронной группе Лоренца, но не изоморфны друг другу. В частности квадрат матриц, соответствующих отражению $s$, равен $+I$ в $G^{(а)}$ и $-I$ в $G^{(б)}$ (см. следующую сноску).

ной матрицы на бесконечно малую величину и может быть записана в виде

$$\Lambda^{(\alpha\beta)}(\varepsilon) \approx I + i\varepsilon S_{\alpha\beta}, \tag{90}$$

где $S_{\alpha\beta}$ — конечная матрица, подлежащая определению. Имеем

$$\left[\Lambda^{(\alpha\beta)}(\varepsilon)\right]^{-1} \approx \Lambda^{(\alpha\beta)}(-\varepsilon) \approx I - i\varepsilon S_{\alpha\beta}.$$

Из условия (89а) получаем

$$-\varepsilon g^{\mu\nu} Z_{\nu\rho}^{(\alpha\beta)} \gamma^{\rho} = -i\varepsilon \left[S_{\alpha\beta}, \gamma^{\mu}\right]$$

или, используя (17),

$$\left[S_{\alpha\beta}, \gamma^{\mu}\right] = i\left(\delta_{\beta}^{\mu}\gamma_{\alpha} - \delta_{\alpha}^{\mu}\gamma_{\beta}\right).$$

Матрица $S_{\alpha\beta}$ удовлетворяет тем же коммутационным соотношениям с $\gamma^{\mu}$, что и матрица $\frac{1}{2} i\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}$. Их разность коммутирует с матрицами $\gamma^{\mu}$ и, следовательно, пропорциональна единичной матрице. Легко показать, что условия (89б) и (89в) будут выполнены тогда и только тогда, когда коэффициент пропорциональности равен нулю. Удобно ввести обозначение

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} i\left[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\right] \equiv i\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} \qquad (\mu \neq \nu). \tag{91}$$

Окончательно имеем

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}. \tag{92}$$

Обозначения $S_{\alpha\beta}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$ будут также использоваться для операторов, которые задаются матрицами $S_{\alpha\beta}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$ соответственно. В дальнейшем мы увидим, что $S_{\alpha\beta}$ есть антисимметричный тензорный оператор (6 компонент), который отвечает внутреннему моменту импульса или спину частицы. Точнее говоря, спин — это пространственная часть (3 компоненты) оператора $S_{\alpha\beta}$, который связан с операторами $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ из § 6 и § 7 соотношениями

$$S_{10} = \frac{1}{2} i\alpha_x, \quad S_{20} = \frac{1}{2} i\alpha_y, \quad S_{30} = \frac{1}{2} i\alpha_z, \tag{93а}$$

$$S_{23} = \frac{1}{2}\sigma_x, \quad S_{31} = \frac{1}{2}\sigma_y, \quad S_{12} = \frac{1}{2}\sigma_z. \tag{93б}$$

Любое конечное преобразование собственной группы Лоренца можно представить в виде произведения последовательных инфинитезимальных преобразований. Следовательно, мы можем построить матрицы $\Lambda$, отвечающие конечному изменению системы координат, беря произведения определенных выше

матриц, отвечающих инфинитезимальным преобразованиям. В этом случае условия (89б) и (89в) выполняются автоматически и мы получаем одну из двух возможных матриц $\Lambda$.

В частности, «вращение» на угол $\varphi$ в плоскости $x^\alpha x^\beta$ есть произведение матриц инфинитезимальных вращений в этой плоскости, и матрица $\Lambda^{(\alpha\beta)}(\varphi)$, задающая преобразование, имеет вид

$$\Lambda^{(\alpha\beta)}(\varphi) = e^{i\varphi S_{\alpha\beta}}. \tag{94}$$

Таким образом (см. сноску на стр. 367), если задано чисто лоренцево преобразование со скоростью $v = \operatorname{th}\varphi$, направленной вдоль оси $x$, то, принимая во внимание соотношения (93а) и свойства $\alpha_x$, находим

$$\Lambda^{(xt)}(\varphi) = e^{-\frac{1}{2}\alpha_x\varphi} = \operatorname{ch}\frac{1}{2}\varphi - \alpha_x \operatorname{sh}\frac{1}{2}\varphi. \tag{95}$$

В более общем случае, если $\Lambda_{sp}(\boldsymbol{v})$ — матрица, отвечающая чисто лоренцеву (специальному) преобразованию со скоростью $\boldsymbol{v}$, то имеем

$$\Lambda_{sp}(\boldsymbol{v}) = \operatorname{ch}\frac{1}{2}\varphi - (\boldsymbol{\alpha u})\operatorname{sh}\frac{1}{2}\varphi,$$

где $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{v}/v$, $\varphi = \operatorname{arcth} v$.

Введем обозначение

$$b \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \operatorname{ch}\varphi. \tag{96}$$

Предыдущее выражение после элементарных вычислений можно привести к виду

$$\Lambda_{sp}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{\sqrt{2(1+b)}}[1 + b - (\boldsymbol{\alpha v})b]. \tag{97}$$

Рассмотрим теперь вращения в обычном смысле этого слова. Для вращений вокруг оси $Oz$ выражение (94) дает

$$\Lambda^{(xy)}(\varphi) = e^{iS_{12}\varphi} = e^{\frac{1}{2}i\sigma_z\varphi} = \cos\frac{1}{2}\varphi + i\sigma_z \sin\frac{1}{2}\varphi. \tag{98}$$

В более общем случае, если $\Lambda_u(\varphi)$ — матрица, отвечающая вращению на угол $\varphi$ вокруг оси, направленной вдоль единичного вектора $\boldsymbol{u}$, то имеем

$$\Lambda_u(\varphi) = \cos\frac{1}{2}\varphi + i\sigma_u \sin\frac{1}{2}\varphi, \tag{99}$$

где $\sigma_u \equiv (\boldsymbol{\sigma u})$.

Теперь мы можем обсудить вопрос о спине частицы, которая описывается уравнением Дирака. Спин определяется трансфор-

мационными свойствами внутренних переменных по отношению к пространственным вращениям. Формула (99) дает общее выражение для матриц преобразования внутренних переменных при вращении. Это выражение отличается от выражения (XIII. 84) только знаком перед $\sigma_u$, и одно переходит в другое при замене $\varphi$ на $-\varphi$. Следовательно, эти матрицы обратны одна к другой. Различие вызвано тем, что в главе XIII мы рассматривали изменение переменных и состояний при вращениях, оставляя оси фиксированными, а здесь мы придерживаемся противоположной точки зрения. Итак, мы видим, что волновая функция, удовлетворяющая уравнению Дирака, преобразуется при вращениях как волновая функция *частицы со спином* 1/2.

Отметим, в частности, что повороту на угол $2\pi$ вокруг любой оси не соответствует единичная матрица. Действительно, имеем

$$\Lambda_u(2n\pi) = (-1)^n I; \tag{100}$$

такое свойство матрицы преобразования характеризует полуцелый спин. Ясно, что произвол в знаке матриц $\Lambda$ нельзя устранить без того, чтобы не нарушить их групповой структуры.

В дальнейшем будем называть волновые функции теории Дирака *спинорами.*

## § 13. Пространственное отражение и ортохронная группа

Коль скоро мы знаем, как меняются спиноры при собственных преобразованиях системы координат, то для определения закона изменения при ортохронных преобразованиях достаточно найти закон их преобразования при отражении $s$.

Матрицу, соответствующую отражению $s$, обозначим $\Lambda_s$. Соотношение (85) в этом случае принимает вид

$$\Psi'(t, \boldsymbol{r}) = \Lambda_s \Psi(t, -\boldsymbol{r}). \tag{101}$$

Условие (89а) дает

$$\Lambda_s^{-1}\gamma^0\Lambda_s = \gamma^0, \quad \Lambda_s^{-1}\gamma^k\Lambda_s = -\gamma^k,$$

откуда $\Lambda_s = c_s\gamma^0$. Постоянная $c_s$ определяется из условий (89б) и (89в): $c_s = \pm 1$. Следовательно,

$$\Lambda_s = \pm\gamma^0 \tag{102}$$

и в согласии со сказанным выше [1]) $\Lambda_s$ определена с точностью до знака.

---

[1]) Выражение (102) соответствует выбору (а) (см. предыдущую сноску). Выбор (б) ведет к $\Lambda_s = \pm i\gamma^0$.

## § 14. Построение ковариантных величин

Из компонент спинора $\Psi(x)$ и сопряженного спинора $\bar{\Psi}(x)$ можно построить 16 линейно независимых функций, билинейных по $\Psi$ и $\bar{\Psi}$ и зависящих от $x^0$, $x^1$, $x^2$, $x^3$. Эти функции можно разбить на пять классов в соответствии с их тензорными свойствами: скаляр $S$, вектор $V^\mu$, антисимметричный тензор с двумя индексами $T^{[\mu\nu]}$, антисимметричный тензор с тремя индексами $A^{[\lambda\mu\nu]}$ и антисимметричный тензор с четырьмя индексами или псевдоскаляр $P$. Выражения для перечисленных функций приведены в табл. III.

Таблица III

**Тензоры, билинейные по $\Psi$ и $\bar{\Psi}$**

| Обозначения | Число компонент | Тип |
|---|---|---|
| $S(x) \equiv (\bar{\Psi}\Psi)$ | 1 | скаляр |
| $V^\mu(x) \equiv (\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)$ | 4 | вектор |
| $T^{[\mu\nu]}(x) \equiv (\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\Psi) \quad (\mu\neq\nu)$ | 6 | тензор 2-значковый |
| $A^{[\lambda\mu\nu]}(x) \equiv (\bar{\Psi}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\Psi) \quad (\lambda\neq\mu,\ \mu\neq\nu,\ \nu\neq\lambda)$ | 4 | псевдовектор |
| $P(x) \equiv (\bar{\Psi}\gamma^5\Psi)$ | 1 | псевдоскаляр |

Указанные тензорные свойства можно легко доказать, используя закон преобразования спиноров $\Psi$ и $\bar{\Psi}$ (ур. (85) и (86)) и соотношение (89а) между матрицами $\Lambda$ и коэффициентами $\Omega^\mu_\nu$ соответствующего преобразования Лоренца.

Напомним, что закон преобразования псевдоскаляров отличается от закона преобразования скалярных величин только дополнительным множителем $\det|\Omega^\mu_\nu|$

$$P(x') = \det|\Omega^\mu_\nu|\,P(x).$$

Таким образом, при собственных лоренцевых преобразованиях псевдоскалярные и скалярные величины преобразуются одинаково, а при отражении $s$ псевдоскаляры меняют знак. Точно так же закон преобразования псевдовекторов отличается от закона преобразования векторов дополнительным множителем $\det|\Omega^\mu_\nu|$.

Вектор $V^\mu(x)$ уже интерпретировался нами как четырехмерный вектор плотности тока

$$V^\mu(x) \equiv j^\mu(x).$$

Можно дать соответствующую интерпретацию и остальным величинам. Так, тензор $T^{[\mu\nu]}$ равен, с точностью до постоянного множителя, тензору $S^{\mu\nu}$, который можно интерпретировать как плотность спина

$$T^{[\mu\nu]} = -2iS^{\mu\nu}(x) \equiv -2i(\overline{\Psi}S^{\mu\nu}\Psi).$$

## § 15. Другая формулировка свойств инвариантности: преобразование состояний

В предыдущих параграфах мы рассматривали преобразование как операцию, которая выполняется над системой координат, оставляя физическую систему неизменной. Можно изменить точку зрения и преобразовать физическую систему, оставляя неизменной систему координат. Именно так мы поступали в третьей части (см., в частности, замечания § XIII. 11). Хотя вытекающие результаты формулируются различным образом, обе точки зрения эквивалентны.

Поясним указанную эквивалентность. Пусть $(S)$ — состояние физической системы, которое в системе координат $(R)$ задается спинором $\Psi(x)$. Пусть $(S')$ есть состояние, которое получается из $(S)$ при преобразовании $\mathscr{L}$, а $(\hat{R})$ есть система координат, которая переходит в $(R)$ при том же преобразовании (см. рис. 21)

$$(S') = \mathscr{L}(S), \quad (\hat{R}) = \mathscr{L}^{-1}(R).$$

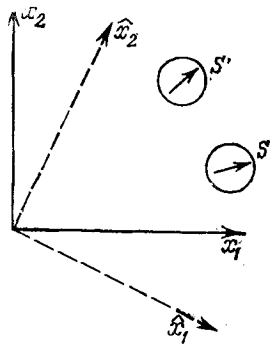


Рис. 21. Два способа рассмотрения преобразования Лоренца: изменение системы отсчета $(x \to \hat{x})$ и преобразование системы $(S \to S')$.

Рассмотрим три следующих спинора:

$\Psi(x)$, представляющий $(S)$ в системе $(R)$,
$\hat{\Psi}(\hat{x})$, » $(S)$ » $(\hat{R})$,
$\Psi'(x)$, » $(S')$ » $(R)$.

Ясно, что $\hat{\Psi}$ и $\Psi'$ равны при совпадающих значениях аргументов

$$\Psi'(x) = \hat{\Psi}(x). \tag{103}$$

Соответствие между $\hat{\Psi}$ и $\Psi$ было установлено в § 11. Поскольку преобразование $\mathscr{L}$ переводит систему $(\hat{R})$ в $(R)$, то, используя (85) и вводя связанную с $\mathscr{L}$ матрицу $\Lambda$, имеем

$$\Psi(\hat{x}) = \Lambda\hat{\Psi}(\mathscr{L}^{-1}\hat{x}).$$

Следовательно,

$$\Psi'(x) = \Lambda^{-1}\Psi(\mathscr{L}x). \tag{104}$$

Сравнивая с уравнением (85), видим, что в преобразовании состояний участвует оператор, обратный к оператору, отвечающему изменению системы координат.

Эти замечания относятся также и к электромагнитному полю, в котором движется дираковская частица. Обозначим поле $(A)$ и пусть $(A')$ — поле, которое получается при преобразовании $\mathscr{L}$:

$$(A') = \mathscr{L}(A).$$

Рассмотрим следующие три (ковариантные) 4-вектора:

$A_\mu(x)$, представляющий $(A)$ в системе $(R)$,

$\hat{A}_\mu(\hat{x})$, » $(A)$ » $(\hat{R})$,

$A'_\mu(x)$, » $(A')$ » $(R)$.

Мы можем повторить приведенные выше рассуждения для спиноров, тогда получим

$$A'_\mu(x) = \hat{A}_\mu(x). \tag{105}$$

Согласно уравнению (81) имеем

$$\hat{A}_\mu(\mathscr{L}^{-1}x) = A_\nu(x)\,\Omega^\nu_\mu,$$

следовательно,

$$A'_\mu(x) = A_\nu(\mathscr{L}x)\,\Omega^\nu_\mu. \tag{106}$$

Допустим теперь, что $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению Дирака с потенциалом $A_\mu(x)$:

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\,\Psi = 0. \tag{107}$$

Принимая во внимание равенства (103) и (105), из инвариантности уравнения Дирака при изменении системы координат $(R)\to(\hat{R})$ получаем

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA'_\mu) - m]\,\Psi' = 0. \tag{108}$$

Таким образом, свойство инвариантности формы уравнения можно сформулировать так:

*Если $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению Дирака с потенциалом $A_\mu(x)$, то состояние $\Psi'(x)$, которое получается при преобразовании $\mathscr{L}$, также удовлетворяет уравнению Дирака с преобразованным потенциалом $A'_\mu(x)$.*

## § 16. Условие инвариантности уравнения движения

Уравнения (107) и (108) в общем случае различны. Они совпадают, только если внешний потенциал $(A)$ инвариантен относительно преобразования $\mathscr{L}$, т. е. если

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x).$$

В этом случае спиноры $\Psi$ и $\Psi'$ удовлетворяют *одному и тому же* волновому уравнению. Следовательно, *уравнение для динамических состояний инвариантно относительно любых преобразований $\mathscr{L}$, которые не меняют внешний потенциал.*

До сих пор в качестве $\mathscr{L}$ мы рассматривали ортохронные преобразования Лоренца. Однако все сказанное выше можно повторить для пространственно-временных *трансляций* (см. сноску на стр. 384). Установленные свойства инвариантности сохраняются и в этом случае.

## § 17. Операторы преобразования. Импульс, момент импульса, четность

Для того чтобы продолжить этот анализ в соответствии с общей схемой, которая была развита в главе XV, мы запишем закон преобразования (104) в виде

$$\Psi' = T\Psi, \tag{109}$$

где $T$ — соответствующий линейный оператор. Инвариантность уравнения Дирака при преобразованиях можно тогда выразить как соотношение между операторами

$$T\mathscr{D}(A)T^{-1} = \mathscr{D}(A'), \tag{110}$$

где $\mathscr{D}(A)$ и $\mathscr{D}(A')$ — операторы Дирака с потенциалами $A$ и $A'$

$$\mathscr{D}(A) \equiv \gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} - eA_{\mu}). \tag{111}$$

Условие того, что уравнение движения не меняется при преобразовании $\mathscr{L}$, можно записать как соотношение коммутации

$$[T, \mathscr{D}(A)] = 0. \tag{112}$$

Оператор $T$ легко построить. Он является произведением операторов $T^{(s)}$, действующего только на спиновые переменные, и $T^{(0)}$, действующего только на орбитальные переменные,

$$T = T^{(s)} \otimes T^{(0)}.$$

Сравнивая формулы (109) и (104), видим, что

$$T^{(s)} = \Lambda^{-1}, \tag{113}$$

где $\Lambda$ обозначает *оператор*, который представляется определенной в § 11 матрицей $\Lambda$.

Найдем явный вид $T$ для инфинитезимальных трансляций и лоренцевых «поворотов» и для отражения $s$.

В случае трансляций $T^{(s)} = 1$. Введем дифференциальный оператор

$$p_{\mu} \equiv i\partial_{\mu}, \tag{114}$$

который представляет собой *четырехмерный вектор энергии-импульса* (более точно — ковариантные компоненты этого 4-вектора). Для бесконечно малого сдвига на $\varepsilon$ вдоль оси $x^\alpha$ находим

$$T = 1 - i\varepsilon p_\alpha.$$

Рассмотрим «инфинитезимальный поворот» на угол $\varepsilon$ в плоскости $x^\alpha x^\beta$. В этом случае имеем

$$(\mathscr{L}x)^\mu = x^\mu - \varepsilon Z_\nu^{(\alpha\beta)\mu} x^\nu = x^\mu - \varepsilon\left(\delta_\alpha^\mu x_\beta - \delta_\beta^\mu x_\alpha\right).$$

Если $\psi_s(x)$ — некоторая компонента спинора $\Psi(x)$, то в первом порядке по $\varepsilon$

$$\psi_s(\mathscr{L}x) \approx \psi_s(x) + \varepsilon\left(x_\alpha \frac{\partial\psi_s}{\partial x^\beta} - x_\beta \frac{\partial\psi_s}{\partial x^\alpha}\right).$$

Введя дифференциальный оператор

$$L_{\alpha\beta} \equiv x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha, \tag{115}$$

перепишем предыдущее соотношение в виде

$$\psi_s(\mathscr{L}x) \approx (1 - i\varepsilon L_{\alpha\beta})\,\psi_s(x).$$

С другой стороны, на основании формул (90) и (113) имеем

$$T^{(s)} \approx (1 - i\varepsilon S_{\alpha\beta}),$$

где $S_{\alpha\beta}$ — оператор, определяемый равенством (92). Окончательно формула (109), которая выражает закон преобразования спиноров, для случая «инфинитезимального поворота» принимает вид

$$\Psi'(x) \approx (1 - i\varepsilon S_{\alpha\beta})(1 - i\varepsilon L_{\alpha\beta})\,\Psi(x) \approx (1 - i\varepsilon J_{\alpha\beta})\,\Psi(x),$$

где

$$J_{\alpha\beta} \equiv L_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta} \equiv x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha + \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}. \tag{116}$$

Три пространственных компоненты $J_{23}$, $J_{31}$ и $J_{12}$ оператора $J_{\alpha\beta}$ связаны с инфинитезимальными вращениями вокруг осей $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно. Они являются компонентами полного момента импульса $\boldsymbol{J}$ и справедливы равенства

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}, \quad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}. \tag{117}$$

Компоненты $\boldsymbol{L}$ действуют только на орбитальные переменные: $\boldsymbol{L}$ — оператор орбитального момента импульса. Компоненты $\boldsymbol{S}$ действуют только на внутренние переменные: $\boldsymbol{S}$ — оператор спина частицы.

Легко показать, что $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{S}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям, характеризующим момент импульса, и $\boldsymbol{S}^2 = 3/4$, откуда следует, что спин частицы равен 1/2.

Оператор, связанный с пространственным отражением, называется оператором четности и обозначается $P$. Пусть $P^{(0)}$ обозначает оператор «орбитальной четности»:

$$P^{(0)}\Psi(t, \boldsymbol{r}) = \Psi(t, -\boldsymbol{r}).$$

В силу равенства (113) и результатов § 13 (см. равенство (102)), мы можем выбрать для $P$ два выражения, отличающиеся знаком. Выберем наиболее часто употребляемое

$$P = \gamma^0 P^{(0)}. \tag{118}$$

Отметим, что оператор $P$ эрмитов и $P^2 = 1$.

## § 18. Законы сохранения и интегралы движения

Если преобразование зависит от времени, то связанный с ним оператор $T$ изменяет зависимость $\Psi$ от времени. Так происходит в случае временных трансляций и специальных преобразований Лоренца.

С другой стороны, *если преобразование не зависит от времени, то действие $T$ определяется независимо от уравнения движения состояний, на которые он действует.* Тогда оператор $T$ можно определить как оператор преобразования векторов состояния и наблюдаемых системы, как это было сделано в главе XV (раздел II). Свойства инвариантности уравнения, которое определяет зависимость состояний от времени, можно сформулировать при этом в виде законов сохранения.

Например, если $\mathscr{L}$ есть преобразование только пространственных переменных, то оператор $T$ является некоторой функцией операторов инфинитезимальных трансляций, инфинитезимальных вращений и отражения, т. е. функцией $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{J}$ и $P$. Следовательно, $T$ коммутирует с $\gamma^0$ и, поскольку

$$\gamma^0\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H_D\right) \equiv \mathscr{D}(A) - m,$$

коммутационное соотношение (112) в этом случае эквивалентно

$$[T, H_D] = 0.$$

Мы получили то же условие, что и в § XV. 12 и все сказанное там о связи между свойствами инвариантности гамильтониана и законами сохранения справедливо и в этом случае.

Так, если потенциал $A_\mu(x)$ инвариантен относительно трансляций, то справедливы коммутационные соотношения

$$[\boldsymbol{p}, H_D] = 0,$$

и сохраняется импульс. Если потенциал $A_\mu(x)$ сферически-симметричен, то

$$[\boldsymbol{J}, H_D]=0$$

и сохраняется полный момент импульса. Если $A_\mu(x)$ инвариантен относительно отражения в начале координат, то

$$[P, H_D]=0$$

и сохраняется четность.

## § 19. Обращение времени и зарядовое сопряжение

В этом параграфе мы покажем, что уравнение Дирака инвариантно относительно двух антилинейных операций: обращения времени и зарядового сопряжения. Для этого в пространстве векторов состояния удобно ввести антиунитарный оператор $K$ [1]), который имеет очень простые свойства.

Антиунитарный оператор $K$. Определим антиунитарный оператор $K$, который переводит $\boldsymbol{p}$ в $-\boldsymbol{p}$ и не изменяет $\boldsymbol{r}$ и $\gamma^\mu$:

$$K\boldsymbol{r}K^\dagger=\boldsymbol{r}, \quad K\boldsymbol{p}K^\dagger=-\boldsymbol{p}, \tag{119}$$

$$K\gamma^\mu K^\dagger=\gamma^\mu \quad (\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{120}$$

Мы покажем, что такой оператор существует, определен с точностью до фазового множителя и

$$K^2=-1. \tag{121}$$

То, что оператор $K$, если он существует, определен с точностью до фазового множителя, следует из соотношений (119), (120) и неприводимости пространства векторов состояния по отношению к базисным операторам $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ и $\gamma^\mu$. Выберем какое-либо представление, например, представление Дирака. Тогда каждый *оператор* $\gamma^\mu$ задается некоторой матрицей $\gamma_D^\mu$. Обозначим $B_D$ оператор, который задается «матрицей $B$», преобразующей $\gamma_D^\mu$ в их комплексно сопряженные. Мы будем рассматривать $B_D$ как (унитарный) оператор, действующий во всем пространстве, а не только в спиновом. Это унитарный оператор, который коммутирует с $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$. Пусть $K_D$ — оператор комплексного сопряжения, связанный с данным представлением (определение § XV. 5). Соотношения (76) дают

$$\gamma^\mu=B_D\left(K_D\gamma^\mu K_D^\dagger\right)B_D^\dagger.$$

---

[1]) Следует предостеречь, что этот оператор не есть оператор обращения времени, последний ниже будет обозначаться $K_T$.

Следовательно, антиунитарный оператор

$$K \equiv B_D K_D$$

удовлетворяет соотношениям (120). Поскольку $B_D$ коммутирует с $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$, а из определения $K_D$ имеем

$$K_D \boldsymbol{r} K_D = \boldsymbol{r}, \quad K_D \boldsymbol{p} K_D = -\boldsymbol{p},$$

то $K$ удовлетворяет также соотношениям (119). Наконец, так как $K_D = K_D^+$, равенство (77) дает

$$B_D (K_D B_D K_D) \equiv K^2 = -1,$$

т. е. соотношение (121). Очевидно, что при умножении $K$ на фазовый множитель эти свойства сохраняются.

Зарядовое сопряжение. Умножая обе части уравнения (107) слева на $K$ и используя тот факт, что оператор $K$ антилинеен и коммутирует с $\gamma^\mu$, $\partial_\mu$ и $A_\mu(x)$, получаем

$$[\gamma^\mu (-i\partial_\mu - eA_\mu(x)) - m] K\Psi(x) = 0. \tag{122}$$

Следовательно, $K\Psi$ удовлетворяет волновому уравнению, которое отличается от уравнения Дирака заменой $-i$ на $i$. Умножим получившееся уравнение на $\gamma^5$. Так как $\gamma^5$ антикоммутирует с $\gamma^\mu$ и коммутирует с остальными операторами, стоящими в скобках, имеем

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu(x)) - m] \gamma^5 K\Psi(x) = 0. \tag{123}$$

Положим

$$K_C \equiv \gamma^5 K. \tag{124}$$

$$\Psi^C(x) \equiv K_C \Psi(x). \tag{125}$$

Уравнение (123) примет вид

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu(x)) - m] \Psi^C(x) = 0. \tag{126}$$

Уравнения, которым удовлетворяют функции $\Psi^C(x)$ и $\Psi(x)$, отличаются знаком заряда. Таким образом, *если $\Psi(x)$ описывает движение дираковской частицы массы $m$ и заряда $e$ в потенциале $A_\mu(x)$, то $\Psi^C(x)$ описывает движение дираковской частицы той же массы $m$ и противоположного заряда $(-e)$ в том же потенциале $A_\mu(x)$.*

Спиноры $\Psi$ и $\Psi^C$ называются зарядово-сопряженными друг к другу, а преобразование $K_C$ — *зарядовым сопряжением.*

Из свойств $K$ и $\gamma^5$ следует, что

$$K_C^2 = 1. \tag{127}$$

Тем самым, соответствие между $\Psi$ и $\Psi^C$ взаимно обратное. Легко показать, что зарядовое сопряжение коммутирует с трансляциями и ортохронными преобразованиями Лоренца. Точнее,

если спинор $\Psi$ при одном из этих преобразований переходит в $L\Psi$, то зарядово-сопряженным к последнему будет спинор $L\Psi^C$ в случае трансляций и собственных преобразований Лоренца и $-L\Psi^C$ — в случае отражения (см. задачу 5).

Обращение времени. Инвариантность уравнения Дирака по отношению к обращению времени можно доказать непосредственно, но в данном случае мы используем результаты о зарядовом сопряжении.

Вектор-потенциал $A_\mu(t, \boldsymbol{r})$ создается некоторым числом движущихся зарядов. Соответствующий ему при обращении времени потенциал $A'_\mu(t, \boldsymbol{r})$ получается при обращении движения этих зарядов. Токи и, следовательно, магнитное поле меняют знак, а электрические заряды и, следовательно, электрическое поле остаются неизменными

$$\mathscr{H}'(t, \boldsymbol{r}) = -\mathscr{H}(-t, \boldsymbol{r}), \quad \mathscr{E}'(t, \boldsymbol{r}) = \mathscr{E}(-t, \boldsymbol{r}).$$

Отсюда следует, что $A_\mu$ «преобразуется как псевдовектор»

$$\boldsymbol{A}'(t, \boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{A}(-t, \boldsymbol{r}), \quad A'_0(t, \boldsymbol{r}) = A_0(-t, \boldsymbol{r}).$$

Если в уравнении (126) сделать замену $t$ на $-t$, то получим

$$\left[-\gamma^0(i\partial_0 - eA'_0(t, \boldsymbol{r})) + \sum_k \gamma^k(i\partial_k - eA'_k(t, \boldsymbol{r})) - m\right]\Psi^C(-t, \boldsymbol{r}) = 0.$$

Умножим полученное уравнение на $\gamma^5\gamma^0$. Поскольку этот оператор антикоммутирует с $\gamma^0$ и коммутирует с $\gamma^k$, имеем

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA'_\mu(t, \boldsymbol{r})) - m]\Psi'(t, \boldsymbol{r}) = 0, \tag{128}$$

где

$$\Psi'(t, \boldsymbol{r}) \equiv \gamma^5\gamma^0\Psi^C(-t, \boldsymbol{r}) = \gamma^0 K\Psi(-t, \boldsymbol{r}). \tag{129}$$

Введем (антиунитарный) оператор обращения времени

$$K_T \equiv \gamma^0 K. \tag{130}$$

Спинор $\Psi'(t, \boldsymbol{r})$ является, по определению, преобразованием $\Psi(-t, \boldsymbol{r})$ при обращении времени. Он удовлетворяет уравнению (128). Следовательно, если $\Psi$ удовлетворяет уравнению Дирака с потенциалом $A_\mu$, то спинор $\Psi'$, получающийся при обращении времени, удовлетворяет уравнению Дирака с потенциалом $A'_\mu$, который при обращении времени получается из $A_\mu$.

В частности, если потенциал $A_\mu$ инвариантен по отношению к обращению времени (например, если частица находится в статическом электрическом поле: $\boldsymbol{A} = 0$, $\partial A_0/\partial t = 0$), то $\Psi$ и $\Psi'$ удовлетворяют одному и тому же уравнению Дирака.

Из свойств $\gamma^0$ и $K$ следует, что

$$K_T^2 = -1. \tag{131}$$

Это результат, характеризующий системы с полуцелым моментом импульса, уже был получен в нерелятивистском случае (ур. (XV. 88)). Все следствия, которые из него вытекают, например, вырождение Крамерса, справедливы и в данной ситуации.

Выразив оператор $B_D$ в терминах $\rho$ и $\sigma$ (см. конец § 10), из определений (124) и (130) легко получить равенства

$$K_C = i\rho_2\sigma_y K_D,$$
$$K_T = i\sigma_y K_D,$$

которые используются при работе с операторами $K_C$ и $K_T$ в представлении Дирака.

## § 20. Калибровочная инвариантность

Упомянем здесь для полноты свойство калибровочной инвариантности (см. § XXI. 20).

Изменение калибровки электромагнитного потенциала означает переход от компонент $A_\mu(x)$ к

$$A'_\mu(x) \equiv A_\mu(x) - \partial_\mu G(x), \tag{132}$$

где $G(x)$ — произвольная функция пространственно-временных координат. Это дает

$$A'_0 = A_0 - \frac{\partial G}{\partial t}, \quad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla G.$$

Электрическое и магнитное поля при таком преобразовании инвариантны.

Если $\Psi(x)$ — решение уравнения Дирака с потенциалом $A_\mu$, то спинор

$$\Psi'(x) \equiv e^{ieG(x)}\Psi(x) \tag{133}$$

есть решение уравнения Дирака с потенциалом $A'_\mu$. Данное свойство и называется калибровочной инвариантностью уравнения Дирака.

# Раздел IV. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОПЕРАТОРОВ И ПРОСТЫЕ РЕШЕНИЯ

## § 21. Уравнение Дирака и принцип соответствия

В случае отличного от нуля электромагнитного поля решения уравнения Дирака удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка, которое отлично от уравнения Клейна — Гордона, однако и для него выполняется принцип соответствия.