Это результат, характеризующий системы с полуцелым моментом импульса, уже был получен в нерелятивистском случае (ур. (XV. 88)). Все следствия, которые из него вытекают, например, вырождение Крамерса, справедливы и в данной ситуации.

Выразив оператор B_D в терминах ρ и σ (см. конец § 10), из определений (124) и (130) легко получить равенства

$$K_C = i\rho_2\sigma_y K_D,$$
$$K_T = i\sigma_y K_D,$$

которые используются при работе с операторами K_C и K_T в представлении Дирака.

§ 20. Калибровочная инвариантность

Упомянем здесь для полноты свойство калибровочной инвариантности (см. § XXI. 20).

Изменение калибровки электромагнитного потенциала означает переход от компонент $A_\mu(x)$ к

$$A'_\mu(x) \equiv A_\mu(x) - \partial_\mu G(x), \tag{132}$$

где $G(x)$ — произвольная функция пространственно-временных координат. Это дает

$$A'_0 = A_0 - \frac{\partial G}{\partial t}, \quad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla G.$$

Электрическое и магнитное поля при таком преобразовании инвариантны.

Если $\Psi(x)$ — решение уравнения Дирака с потенциалом A_μ, то спинор

$$\Psi'(x) \equiv e^{ieG(x)}\Psi(x) \tag{133}$$

есть решение уравнения Дирака с потенциалом A'_μ. Данное свойство и называется калибровочной инвариантностью уравнения Дирака.

Раздел IV. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОПЕРАТОРОВ И ПРОСТЫЕ РЕШЕНИЯ

§ 21. Уравнение Дирака и принцип соответствия

В случае отличного от нуля электромагнитного поля решения уравнения Дирака удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка, которое отлично от уравнения Клейна — Гордона, однако и для него выполняется принцип соответствия.

Чтобы получить это уравнение, подействуем оператором $(-i\gamma^\lambda D_\lambda - m)$ на левую часть уравнения Дирака, записанного в ковариантной форме (50),

$$[\gamma^\lambda\gamma^\mu D_\lambda D_\mu + m^2]\Psi = 0. \tag{134}$$

Используя алгебраические свойства операторов γ^μ, получаем

$$\gamma^\lambda\gamma^\mu \equiv g^{\lambda\mu} + \frac{1}{2}[\gamma^\lambda, \gamma^\mu]. \tag{135}$$

Замена немых индексов суммирования дает

$$[\gamma^\lambda, \gamma^\mu] D_\lambda D_\mu \equiv -[\gamma^\lambda, \gamma^\mu] D_\mu D_\lambda = \frac{1}{2}[\gamma^\lambda, \gamma^\mu][D_\lambda, D_\mu] \tag{136}$$

и в силу определения операторов D_μ (ур. (10))

$$[D_\lambda, D_\mu] \equiv ie[\partial_\lambda, A_\mu] + ie[A_\lambda, \partial_\mu] \equiv ie\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\mu}\right) \equiv ieF_{\lambda\mu}. \tag{137}$$

Уравнения (135), (136) и (137) приводят к равенству

$$\gamma^\lambda\gamma^\mu D_\lambda D_\mu \equiv D_\mu D^\mu + eS^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}, \tag{138}$$

где $S^{\lambda\mu}$ описывает спин частицы (определение (92)). Таким образом, уравнение (134) можно записать в виде

$$[D_\mu D^\mu + eS^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu} + m^2]\Psi = 0. \tag{139}$$

Сравнивая с уравнением Клейна — Гордона (30), мы видим, что отличие состоит в наличии дополнительного слагаемого

$$eS^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}, \tag{140}$$

которое описывает взаимодействие спина частицы с электромагнитным полем. Это слагаемое не имеет классического аналога и его вклад становится пренебрежимо малым в условиях, когда справедливо классическое приближение. В этих условиях движения волновых пакетов, подчиняющихся уравнениям Дирака и Клейна — Гордона соответственно, одинаковы.

§ 22. Динамические переменные частицы Дирака

Мы уже приводили физическую интерпретацию некоторых динамических переменных теории Дирака. Теперь мы рассмотрим этот вопрос более подробно и укажем те переменные квантовой теории, которые соответствуют приведенным в § 4 различным классическим величинам.

В этом обсуждении релятивистская инвариантность не играет существенной роли. Поэтому мы будем следовать той же схеме изложения, что и в нерелятивистской квантовой механике: система описывается определенным числом динамических переменных, удовлетворяющих заданной алгебре перестановочных соотношений, а уравнение Дирака — в форме Дирака (ур. (36), (44)) — описывает эволюцию динамических состояний системы в «представлении» Шредингера.

Таким образом, далее мы будем рассматривать время в качестве параметра, а пространственные координаты — в качестве динамических переменных. Фундаментальными переменными будут $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{\alpha}$, β. В данном случае можно использовать весь формализм теории представлений без изменения. В частности, в представлении Дирака векторы состояния $|\Psi\rangle$, $|\Phi\rangle$, ... описываются четырехкомпонентными волновыми функциями $\Psi(\boldsymbol{r})$, $\Phi(\boldsymbol{r})$, ..., зависящими от координат x, y, z. Скалярное произведение $\langle\Phi|\Psi\rangle$ в этом представлении определяется следующей формулой:

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \sum_{s=1}^{4} \int \varphi_s^*(\boldsymbol{r})\,\psi_s(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}.$$

Такое определение скалярного произведения согласуется с определением плотности вероятности положения частицы в пространстве, приведенном в § 6 (формула (35)). Более того, мы можем использовать здесь без изменений статистическую интерпретацию, которая была развита в первой части этого курса. В частности, среднее значение оператора Q в данном состоянии равно

$$\langle Q\rangle = \langle u|Q|u\rangle,$$

где $|u\rangle$ — нормированный кет-вектор, представляющий данное состояние.

Те наблюдаемые, которые не действуют на внутренние степени свободы, имеют очевидную интерпретацию. Например,

$\boldsymbol{r}$ — вектор положения (координата);

$\boldsymbol{p}$ — импульс;

$\boldsymbol{\pi} \equiv \boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ — количество движения.

Среди функций от $\boldsymbol{r}$ отметим $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$ — проектор на подпространство, отвечающее собственному значению $\boldsymbol{r}_0$.

Среди наблюдаемых, зависящих от внутренних степеней свободы, отметим [1]):

энергию: $H \equiv e\varphi + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\pi} + \beta m$; (141)

релятивистскую массу: $M \equiv H - e\varphi \equiv \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\pi} + \beta m$; (142)

плотность потока: $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}_0) \equiv \boldsymbol{\alpha}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$; (143)

полный момент импульса: $\boldsymbol{J} \equiv (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$; (144)

спин: $\boldsymbol{S} \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$; (145)

четность: $P \equiv \beta P^{(0)}$. (146)

Определения величин H и M основаны на соответствии с классической механикой. Что касается определения $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}_0)$, то оно следует из уравнения непрерывности, а определения $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{S}$ и P связаны с законами преобразования состояний при вращениях и отражении соответственно.

Наконец, *принцип соответствия приводит к интерпретации переменной* $\boldsymbol{\alpha}$ *как скорости частицы.* К этой интерпретации приводит также выражение для плотности потока. Действительно, сравним уравнения (18), (19) и (21) классической теории с соответствующими уравнениями квантовой теории. Для этого нам нужно перейти к «представлению» Гейзенберга, где уравнения движения для $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{\pi}$ имеют вид

$$d\boldsymbol{r}/dt = -i[\boldsymbol{r}, H],$$
$$d\boldsymbol{\pi}/dt = -i[\boldsymbol{\pi}, H] + \partial\boldsymbol{\pi}/\partial t.$$

Заменяя H и $\boldsymbol{\pi}$ в правой части этих уравнений их явными выражениями и используя перестановочные соотношения для $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\alpha}$ и β, получаем (задача 6)

$$d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{\alpha}, \tag{147}$$

$$d\boldsymbol{\pi}/dt = e(\mathscr{E} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathscr{H}). \tag{148}$$

Из определения (142) и свойств оператора $\boldsymbol{\alpha}$ имеем тождество

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{2}(M\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}M). \tag{149}$$

Уравнения (147)—(149) для динамических переменных в «представлении» Гейзенберга совпадают по виду с уравнениями (18), (19) и (21) классической теории, если считать, что $\boldsymbol{\alpha}$ совпадает со скоростью $\boldsymbol{v}$.

---

[1]) Отметим, что импульс $\boldsymbol{p}$ зависит от выбора калибровки; только полный импульс системы (частица + электромагнитное поле) не зависит от этого выбора. Такое же замечание можно сделать об энергии H и моменте импульса $\boldsymbol{J}$ (см. § XXI. 23).

Здесь следует отметить, что компоненты скорости $\boldsymbol{\alpha}$ не коммутируют друг с другом, а кроме того, каждая компонента имеет только два собственных значения $+c$ и $-c$ ($+1$ и -1 в используемых нами единицах измерения). Это еще раз показывает, что развитую классическую интерпретацию нельзя понимать слишком буквально. Мы вернемся к этому вопросу в § 37.

§ 23. Свободный электрон. Плоские волны

В оставшейся части этого раздела мы рассмотрим решения уравнения Дирака при отсутствии внешнего поля и в статическом центральном потенциале. Чтобы решить уравнение Дирака, достаточно найти собственные функции гамильтониана H_D. Далее, если не оговорено противное, мы будем использовать представление Дирака, а также введенные в § 7 операторы ρ_1, ρ_2, ρ_3 и σ_x, σ_y, σ_z.

Пусть внешнее поле равно нулю. Тогда гамильтониан H_D коммутирует с тремя компонентами импульса, и, следовательно, мы можем искать собственные функции H_D, отвечающие вполне определенному значению импульса $\boldsymbol{p}$. Такими решениями будут плоские волны — функции вида

$$u(\boldsymbol{p})\,e^{i\boldsymbol{pr}},$$

где $u(\boldsymbol{p})$ — не зависящий от $\boldsymbol{r}$ четырехкомпонентный спинор. Он определяется из уравнения на собственные значения

$$Hu(\boldsymbol{p}) = Eu(\boldsymbol{p}), \tag{150}$$

где H — оператор в пространстве $\mathscr{E}^{(s)}$

$$H \equiv \boldsymbol{\alpha p} + \beta m \equiv \rho_1(\boldsymbol{\sigma p}) + \rho_3 m. \tag{151}$$

Несложное вычисление дает

$$H^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2.$$

Следовательно, собственными значениями H могут быть только два значения $\pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$:

$$\begin{gathered} E = \varepsilon E_p \qquad (\varepsilon = \pm 1) \\ E_p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}. \end{gathered} \tag{152}$$

Легко показать, используя, например, антикоммутативность ρ_2 и H, что эти собственные значения двукратно вырождены.

Как видно из формулы (151), *компонента спина* $\boldsymbol{\sigma p}/2p$ *в направлении* $\boldsymbol{p}$ *коммутирует с* H. (Другие компоненты спина с H не коммутируют.) Таким образом, мы можем искать собствен-

ные векторы, общие для H и $\sigma p/2p$. Имеем четыре пары собственных значений:

$$\left(+E_p, +\frac{1}{2}\right), \quad \left(+E_p, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(-E_p, +\frac{1}{2}\right), \quad \left(-E_p, -\frac{1}{2}\right).$$

Каждой паре отвечает одно собственное состояние. Соответствующий спинор несложно найти из двух уравнений на собственные значения. Другой метод построения этого спинора мы приведем в следующем параграфе.

В табл. IV содержатся компоненты собственных спиноров (нормированных на единицу) в случае, когда импульс $\boldsymbol{p}$ направлен по оси z. Напомним, что в представлении Дирака β и σ_z — диагональные матрицы.

Таблица IV

Компоненты спиноров, соответствующих волне с импульсом $\boldsymbol{p}=(0, 0, p)$ в представлении Дирака $\left(E_p=\sqrt{m^2+p^2}\right)$

Энергия $E=$		Положительная $+E_p$		Отрицательная $-E_p$	
Спин $\sigma p/2p \equiv \frac{1}{2}\sigma_z$		$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\left(\frac{2E_p}{E_p+m}\right)^{\frac{1}{2}} \times$	$u_1=$	1	0	$-\frac{p}{E_p+m}$	0
	$u_2=$	0	1	0	$\frac{p}{E_p+m}$
	$u_3=$	$\frac{p}{E_p+m}$	0	1	0
	$u_4=$	0	$-\frac{p}{E_p+m}$	0	1
Спиноры нормированы на единицу: $u^\dagger u=1$					

§ 24. Построение плоских волн посредством преобразования Лоренца

Если $A_\mu=0$, то преобразование Лоренца переводит решение уравнения Дирака в решение того же уравнения. В частности, плоскую волну с импульсом $\boldsymbol{p}$ можно получить преобразованием Лоренца из плоской волны с нулевым импульсом. На этом замечании основан метод, который позволит нам построить спиноры $u(\boldsymbol{p})$, приведенные в предыдущем параграфе.

Для нулевого импульса уравнение (150) принимает вид

$$\beta m\, u(0) = E u(0).$$

Два возможных собственных значения равны $+m$ и $-m$. Собственному значению εm ($\varepsilon = \pm 1$) отвечает спинор $u^{(\varepsilon)}(0)$ — собственный вектор оператора β. Будем предполагать, что этот спинор нормирован на единицу, направление спина фиксируем произвольным образом. Тогда $u^{(\varepsilon)}(0)$ определен с точностью до фазы.

Плоская волна

$$\Psi_0^{(\varepsilon)} = u^{(\varepsilon)}(0)\, e^{-i\varepsilon m t}$$

есть решение уравнения Дирака, соответствующее нулевому импульсу и энергии εm или 4-вектору энергии-импульса $(\varepsilon m, 0)$.

Рассмотрим то же решение в новой системе отсчета, движущейся по отношению к исходной со скоростью $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{p}/\varepsilon\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2} = -\boldsymbol{p}/\varepsilon E_p$. В новой системе отсчета 4-вектор энергии-импульса равен

$$p^{\mu} \equiv (\varepsilon E_p, \boldsymbol{p}). \tag{153}$$

Решением будет плоская волна

$$\Psi_p^{(\varepsilon)} = \Lambda_{sp}(\boldsymbol{v})\, u^{(\varepsilon)}(0) \exp\left(-ip^{\mu}x_{\mu}\right) = \left[\Lambda_{sp}(\boldsymbol{v})\, u^{(\varepsilon)}(0)\right] \exp\left[-i(\varepsilon E_p t - \boldsymbol{pr})\right].$$

Таким образом, выражение в скобках пропорционально искомому спинору $u(\boldsymbol{p})$, который далее мы будем обозначать $u^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{p})$. Его норма равна временной компоненте соответствующего 4-вектора потока, который можно получить посредством преобразования Лоренца из 4-вектора потока, связанного с $u^{(\varepsilon)}(0)$. Эта норма в результате равна

$$b \equiv \sqrt{1-\boldsymbol{v}^2} = E_p/m.$$

Таким образом, мы определяем

$$u^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{p}) \equiv b^{-\frac{1}{2}}\, \Lambda_{sp}(\boldsymbol{v})\, u^{(\varepsilon)}(0).$$

Подставляя в это определение выражение (97) и приведенные выше значения $\boldsymbol{v}$ и b, находим

$$u^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{p}) = [2E_p(m+E_p)]^{-\frac{1}{2}}\, [m + E_p + \varepsilon\boldsymbol{\alpha p}]\, u^{(\varepsilon)}(0). \tag{154}$$

В частности, если $u^{(\varepsilon)}(0)$ — собственный вектор для $(\boldsymbol{\sigma p})$, то и $u^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{p})$ — собственный вектор, который совпадает с одним из спиноров предыдущего параграфа. Если импульс $\boldsymbol{p}$ направлен по оси z, то получаем результаты, приведенные в табл. IV.

Выражение (154) можно записать также в виде

$$u^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{p}) = [2E_p(m+E_p)]^{-\frac{1}{2}}\, [m + \gamma^{\mu}p_{\mu}]\, u^{(\varepsilon)}(0), \tag{155}$$

где p_{μ} — определенный формулой (153) 4-вектор энергии-импульса.

§ 25. Центральный потенциал

Исследуем состояния дираковской частицы, находящейся в статическом центральном потенциале $V(r)$. Гамильтониан Дирака в этом случае имеет вид

$$H_D \equiv \boldsymbol{\alpha p} + \beta m + V(r). \tag{156}$$

Он инвариантен относительно вращений и отражений

$$[H_D, \boldsymbol{J}]=0, \quad [H_D, P]=0.$$

Таким образом, мы можем искать решения, соответствующие определенному моменту импульса и четности.

Удобно записать решение в виде

$$\Psi=\begin{pmatrix}\Phi\\ \chi\end{pmatrix}, \tag{157}$$

где

$$\Phi\equiv\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \quad \chi\equiv\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}. \tag{158}$$

Проектируя Ψ на подпространства, отвечающие $\beta=+1$ и $\beta=-1$, находим

$$\frac{1}{2}(1+\beta)\Psi=\begin{pmatrix}\Phi\\ 0\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}(1-\beta)\Psi=\begin{pmatrix}0\\ \chi\end{pmatrix}. \tag{159}$$

Функции Φ и χ зависят от $\boldsymbol{r}$ и компоненты спина μ по оси z. Их можно рассматривать как функции радиальной переменной r и «угловых переменных» (θ, φ, μ) в полной аналогии с волновыми функциями теории Паули.

Будем считать, что Ψ есть собственная функция операторов $\boldsymbol{J}^2$, J_z и P. Квантовые числа момента импульса обозначим (JM). Четность будем указывать посредством квантового числа ω такого, что

$$\omega=\begin{cases}+1 & \text{для состояний с четностью } (-1)^{J+\frac{1}{2}},\\ -1 & \text{для состояний с четностью } (-1)^{J-\frac{1}{2}}.\end{cases} \tag{160}$$

Итак, согласно предположению,

$$\begin{gathered}\boldsymbol{J}^2\begin{pmatrix}\Phi\\ \chi\end{pmatrix}=J(J+1)\begin{pmatrix}\Phi\\ \chi\end{pmatrix}, \quad J_z\begin{pmatrix}\Phi\\ \chi\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\Phi\\ \chi\end{pmatrix},\\ P\begin{pmatrix}\Phi\\ \chi\end{pmatrix}=(-1)^{J+\frac{1}{2}\omega}\begin{pmatrix}\Phi\\ -\chi\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{161}$$

Пусть $\mathcal{Y}_{LJ}^{M}(\theta, \varphi, \mu)$ — функция с полным моментом (JM), образованная композицией собственных векторов для спина 1/2 со сферическими функциями порядка L. Четность этой функции равна $(-1)^L$. В силу теоремы о сложении моментов импульса L может принимать только два значения

$$L=l\equiv J+\frac{1}{2}\omega, \quad L=l'\equiv J-\frac{1}{2}\omega, \tag{162}$$

а функции $\mathcal{Y}_{lJ}^{M}$ и $\mathcal{Y}_{l'J}^{M}$ имеют противоположную четность: $(-1)^{J+\frac{1}{2}\omega}$ и $(-1)^{J-\frac{1}{2}\omega}$ соответственно. Из уравнений (161) за-

ключаем, что функция Φ, зависящая от $(r, \theta, \varphi, \mu)$, отвечает моменту импульса (JM) и четности $(-1)^{J+\frac{1}{2}\omega}$. Следовательно, эта функция равна произведению функции от r на $\mathcal{Y}_{lJ}^{M}$. Аналогично, функция χ равна произведению функции от r на $\mathcal{Y}_{l'J}^{M}$.

Итак, если $\Psi_{\omega J}^{M}$ описывает состояние с моментом импульса (JM) и четностью $(-1)^{J+\frac{1}{2}\omega}$, то эта функция может быть представлена в виде

$$\Psi_{\omega J}^{M}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix} F\ \mathcal{Y}_{lJ}^{M} \\ iG\ \mathcal{Y}_{l'J}^{M}\end{pmatrix}, \tag{163}$$

где l и l' определяются равенствами (162), а F и G — произвольные функции от r.

Рассмотрим теперь уравнение на собственные значения

$$H_D\Psi_{\omega J}^{M}=E\Psi_{\omega J}^{M}. \tag{164}$$

Следуя методу, использованному в главе IX, проведем в операторе H_D разделение «угловых» и радиальных переменных.

Введем радиальный импульс p_r и «радиальную скорость» α_r

$$p_r\equiv -i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r, \tag{165}$$

$$\alpha_r\equiv \boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{r}}=\rho_1(\boldsymbol{\sigma r})/r. \tag{166}$$

Воспользовавшись тождеством (XIII.83), получаем

$$(\boldsymbol{\alpha r})(\boldsymbol{\alpha p})=(\boldsymbol{\sigma r})(\boldsymbol{\sigma p})=\boldsymbol{rp}+i\boldsymbol{\sigma L}=rp_r+i(1+\boldsymbol{\sigma L}).$$

Отсюда, после умножения слева на α_r/r и использования равенства $\alpha_r^2=1$, следует тождество

$$\boldsymbol{\alpha p}\equiv\alpha_r\left(p_r+\frac{i}{r}(1+\boldsymbol{\sigma L})\right). \tag{167}$$

Исследуем оператор $1+\boldsymbol{\sigma L}$. Легко показать, что

$$1+\boldsymbol{\sigma L}=\boldsymbol{J}^2+\frac{1}{4}-\boldsymbol{L}^2.$$

Далее, из формулы (161) ясно, что действие $\boldsymbol{L}^2$ на $\Psi_{\omega J}^{M}$ сводится к умножению на

$$\left(J+\frac{1}{2}\omega\beta\right)\left(J+\frac{1}{2}\omega\beta+1\right)\equiv J(J+1)+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\omega\beta(2J+1).$$

Следовательно,

$$(1+\boldsymbol{\sigma L})\Psi_{\omega J}^{M}=-\frac{1}{2}\omega(2J+1)\beta\Psi_{\omega J}^{M}. \tag{168}$$

Подставляя соотношения (167) и (168) в уравнение (164), получаем

$$\left[\alpha_r\left(p_r-\frac{i\omega\left(J+\frac{1}{2}\right)}{r}\beta\right)+m\beta+V(r)\right]\Psi^M_{\omega J}=E\Psi^M_{\omega J}.$$

Воспользуемся в этом уравнении выражением (163) для собственной функции, определениями (165) и (166) операторов p_r и α_r и равенствами (задача 8)

$$\begin{aligned}(\widehat{\sigma r})\,\mathcal{Y}^M_{lJ}&=-\mathcal{Y}^M_{l'J},\\(\widehat{\sigma r})\,\mathcal{Y}^M_{l'J}&=-\mathcal{Y}^M_{lJ}.\end{aligned}\tag{169}$$

Тогда уравнение перейдет в систему из двух дифференциальных уравнений для радиальных функций $F(r)$ и $G(r)$

$$\left[-\frac{d}{dr}+\frac{\omega\left(J+\frac{1}{2}\right)}{r}\right]G=(E-m-V)F,\tag{170а}$$

$$\left[\frac{d}{dr}+\frac{\omega\left(J+\frac{1}{2}\right)}{r}\right]F=(E+m-V)G.\tag{170б}$$

Эти уравнения аналогичны уравнению (IX. 20) нерелятивистской теории.

После интегрирования по углам для нормы функции $\Psi^M_{\omega J}$ получаем выражение

$$\langle\Psi^M_{\omega J}\,|\,\Psi^M_{\omega J}\rangle=\int\limits_0^\infty(|F|^2+|G|^2)\,dr,\tag{171}$$

которое естественно сравнить с формулой (IX. 21).

Обсуждение свойств регулярности функций F и G можно провести в полной аналогии с тем, что было сделано для функции $y_l(r)$ в нерелятивистской теории. На деталях мы здесь не останавливаемся.

§ 26. Свободные сферические волны

Если потенциал V равен нулю, то полученные в предыдущем параграфе стационарные решения уравнения Дирака для свободного электрона соответствуют определенным моменту импульса и четности и представляют собой свободные сферические волны.

В этом случае, из уравнения (170б) находим

$$G=\frac{1}{E+m}\left[\frac{d}{dr}+\frac{\omega\left(J+\frac{1}{2}\right)}{r}\right]F.\tag{172}$$

Подставляя это выражение в ур. (170а), получаем

$$(E^2-m^2)F=\left[-\frac{d}{dr}+\frac{\omega\left(J+\frac{1}{2}\right)}{r}\right]\left[\frac{d}{dr}+\omega\frac{\left(J+\frac{1}{2}\right)}{r}\right]F=$$
$$=\left[-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\left(J+\frac{1}{2}\right)\left(J+\omega+\frac{1}{2}\right)}{r^2}\right]F.$$

Легко показать, что

$$\left(J+\frac{1}{2}\right)\left(J+\omega+\frac{1}{2}\right)=l(l+1),$$

где l — целое число (см. ур. (162)). Таким образом, полученное уравнение совпадает с радиальным уравнением для свободной частицы в нерелятивистской теории, если к тому же заменить E^2-m^2 на произведение $2m$ и нерелятивистской энергии. Это уравнение имеет одно и только одно регулярное решение для любой положительной величины E^2-m^2. Введя обозначение $k=\sqrt{E^2-m^2}$ ($|E|\geqslant m$), перепишем уравнение в виде

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+k^2\right]F=0.$$

Регулярное решение (с точностью до постоянного множителя) равно

$$F=rj_l(kr).$$

Соответствующая функция G легко получается по формуле (172). Используя рекуррентные соотношения (Б. 42) и (Б. 43) (первое — при $\omega=1$, второе — при $\omega=-1$; в обоих соотношениях положили $\gamma=0$), находим

$$G=\frac{\omega k}{E+m}rj_{l'}(kr).$$

Итак, для любого значения энергии E вне интервала $(-m, +m)$ существует свободная сферическая волна с моментом импульса (JM) и четностью $(-1)^{J+\frac{1}{2}\omega}$, которая (см. ур. (163)) может быть записана в виде

$$\text{const}\cdot\begin{pmatrix} |E+m|^{\frac{1}{2}}\, j_l\left(\sqrt{E^2-m^2}\,r\right)\mathcal{Y}_{lJ}^M \\ i\omega\varepsilon\,|E-m|^{\frac{1}{2}}\, j_{l'}\left(\sqrt{E^2-m^2}\,r\right)\mathcal{Y}_{l'J}^M \end{pmatrix}, \tag{173}$$

где $\varepsilon=E/|E|$.

§ 27. Атом водорода

В качестве второго примера исследуем связанные состояния электрона в кулоновском поле атомного ядра. Последнее будем считать точечным зарядом, равным заряду электрона, умноженному на $(-Z)$, и покоящимся в начале координат[1]). Мы будем интересоваться связанными состояниями релятивистской частицы спина 1/2 в центральном потенциале

$$V = -Ze^2/r.$$

Эта задача на собственные значения может быть решена точно. Здесь мы опишем только основные моменты метода решения, который представляет собой простое расширение метода, использованного в § XI. 4.

Из анализа асимптотического поведения решений системы радиальных уравнений (170) ясно, что энергия E должна лежать в интервале $(-m, +m)$. Искомое собственное значение характеризуется тем, что соответствующее решение должно быть регулярно в начале координат и на бесконечности вести себя, как $\exp\left(-\sqrt{m^2-E^2}r\right)$.

Введем обозначения

$$\varkappa = \sqrt{m^2-E^2}, \quad \nu = \sqrt{\frac{m-E}{m+E}}. \tag{174}$$

$$\zeta = Ze^2, \qquad \tau = \omega\left(J+\frac{1}{2}\right) \tag{175}$$

и новую переменную

$$\rho \equiv \varkappa r. \tag{176}$$

Тогда система уравнений (170) примет вид

$$\left(-\frac{d}{d\rho}+\frac{\tau}{\rho}\right)G = \left(-\nu+\frac{\zeta}{\rho}\right)F \tag{177а}$$

$$\left(\frac{d}{d\rho}+\frac{\tau}{\rho}\right)F = \left(\nu^{-1}+\frac{\zeta}{\rho}\right)G. \tag{177б}$$

Будем искать решения в виде рядов

$$F(\rho) = \rho^s e^{-\rho}(a_0+a_1\rho+a_2\rho^2+\ldots) \quad (a_0 \neq 0), \tag{178а}$$

$$G(\rho) = \rho^s e^{-\rho}(b_0+b_1\rho+b_2\rho^2+\ldots) \quad (b_0 \neq 0). \tag{178б}$$

Подставляя эти разложения в систему (177) и приравнивая члены соответствующих порядков, получаем набор уравнений, первое из которых определяет s, а последующие представ-

[1]) Тем самым, ядро считается бесконечно тяжелым. Возникающей при этом ошибкой пренебречь нельзя, поскольку она по порядку величины сравнима с релятивистскими поправками. Эта ошибка существенно уменьшается, если во всех формулах массу электрона m заменить приведенной массой.

ляют собой рекуррентные соотношения для коэффициентов a_0, b_0, a_1, ..., a_n, b_n, ... Уравнение для s имеет два корня $\pm\sqrt{\tau^2-\zeta^2}$. Для регулярности решений F и G и выполнения условия $F(0)=G(0)=0$ необходимо и достаточно, чтобы $s>0$. Так выбирается положительный корень [1])

$$s=\sqrt{\tau^2-\zeta^2}.$$

Следовательно, для любого значения E существует одно решение, регулярное в начале координат. В общем случае, это решение на бесконечности ведет себя, как $\rho^s e^\rho$, если только разложения (178) не обрываются. Последнее возможно только для специальных значений E — искомых уровней энергии. Вычисление показывает, что эти значения равны

$$m\left[1+\frac{\zeta^2}{(n'+s)^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

где n' — радиальное квантовое число — равно степени полиномов, фигурирующих в разложениях (178). Для каждого положительного n' существует регулярное решение при любом из двух значений ω; для $n'=0$ регулярное решение существует только при $\omega=-1$.

Введем главное квантовое число

$$n=J+\frac{1}{2}+n'.$$

Тогда предыдущие результаты можно сформулировать следующим образом. Уровни дискретного спектра зависят от двух квантовых чисел n и J и определяются формулой

$$E_{nJ}=m\left[1+\frac{Z^2e^4}{(n-\varepsilon_J)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{179}$$

$$\varepsilon_J=J+\frac{1}{2}-\sqrt{\left(J+\frac{1}{2}\right)^2-Z^2e^4}, \tag{179'}$$

где n может принимать все целые положительные значения, а J — все полуцелые значения из интервала $(0, n)$

$$n=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty,\qquad J=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \ldots,\ n-\frac{1}{2}.$$

---

[1]) Мы предполагаем, что $\zeta<|\tau|$, т. е. $Ze^2<\left(J+\frac{1}{2}\right)$. Это условие выполнено, если $Z<137$, что практически почти всегда имеет место. В противном случае обсуждение условий регулярности в начале координат стало бы значительно более деликатным вопросом.

Каждому значению J соответствуют два набора из $(2J+1)$ решений противоположной четности, за исключением значения $J=n-\frac{1}{2}$, которому соответствует один набор из $(2J+1)$ решений четности $(-1)^{n-1}$. Вместо того, чтобы фиксировать четность, можно фиксировать величину l — значение орбитального момента двух первых компонент спинора. Напомним, что четность спинора равна $(-1)^l$.

Для энергетических уровней и состояний обычно используют спектроскопические обозначения nl_j. Ниже приведены несколько первых уровней и соответствующие спектроскопические термы (вырождение каждого терма равно $2J+1$):

$n=1$	$J=\frac{1}{2}$	$1s_{\frac{1}{2}}$			$(n'=0)$
$n=2$	$J=\frac{1}{2}$	$2s_{\frac{1}{2}}$	$2p_{\frac{1}{2}}$		$(n'=1)$
	$J=\frac{3}{2}$		$2p_{\frac{3}{2}}$		$(n'=0)$
$n=3$	$J=\frac{1}{2}$	$3s_{\frac{1}{2}}$	$3p_{\frac{1}{2}}$		$(n'=2)$
	$J=\frac{3}{2}$		$3p_{\frac{3}{2}}$	$3d_{\frac{3}{2}}$	$(n'=1)$
	$J=\frac{5}{2}$			$3d_{\frac{5}{2}}$	$(n'=0)$.

Если выражение (179) разложить в ряд по степеням Z^2e^4, то получим

$$E_{nJ}=m\left[1-\frac{Z^2e^4}{2n^2}-\frac{(Z^2e^4)^2}{2n^4}\left(\frac{n}{J+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}\right)+\ldots\right].$$

Первое слагаемое — масса электрона. Второе $-Z^2e^4/2n^2$, в точности совпадает с результатом нерелятивистской теории. Следующие слагаемые определяют релятивистские поправки, которые частично устраняют «случайное вырождение» уровней нерелятивистской теории: при фиксированном n энергия связи $m-E$ каждого терма зависит только от J и тем больше, чем меньше J.

Экспериментальные результаты о тонкой структуре спектра атома водорода или водородоподобных атомов (а именно, He^+) находятся в хорошем согласии с этими предсказаниями.

Однако совпадение результатов не является полным. Наибольшее расхождение наблюдается в тонкой структуре уровней

с $n = 2$ атома водорода [1]). В нерелятивистском приближении три уровня $2s_{\frac{1}{2}}$, $2p_{\frac{1}{2}}$ и $2p_{\frac{3}{2}}$, совпадают. В теории Дирака уровни $2s_{\frac{1}{2}}$ и $2p_{\frac{1}{2}}$ остаются равными, а уровень $2p_{\frac{3}{2}}$ расположен ниже (расстояние между ними порядка 10^{-4} *эв*). Расстояние $2p_{\frac{3}{2}} - 2p_{\frac{1}{2}}$ согласуется с предсказаниями теории, в то же время уровень $2s_{\frac{1}{2}}$ расположен ниже уровня $2p_{\frac{1}{2}}$ и величина $2s_{\frac{1}{2}} - 2p_{\frac{1}{2}}$ равна приблизительно одной десятой расстояния $2p_{\frac{3}{2}} - 2p_{\frac{1}{2}}$. Этот эффект называют лэмбовским сдвигом. Для его объяснения необходимо строгое рассмотрение полного взаимодействия между электроном, протоном и квантованным электромагнитным полем. В теории Дирака учитывается только основная часть этого взаимодействия — кулоновский потенциал. Лэмбовский сдвиг связан с «радиационными поправками» к этому приближению [2]).

Раздел V. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

§ 28. Большие и малые компоненты

Рассмотрим плоские волны с положительной энергией. Компоненты этих волн приведены в табл. IV. Будем считать, что энергия E_p мало отличается от энергии покоя

$$W \equiv E_p - m \ll m.$$

Тогда можно воспользоваться нерелятивистским приближением, поскольку кинетическая энергия W почти равна $mv^2/2$ и справедливо неравенство

$$\frac{W}{m} \approx \frac{1}{2} v^2 \ll 1.$$

Мы увидим, что в этом случае отличная от нуля компонента соответствует $\beta = +1$ и по величине она значительно больше

---

[1]) *W. E. Lamb, R. C. Retherford.* Phys. Rev. **72**, 241 (1947).

[2]) Экспериментальное значение величины $2s_{\frac{1}{2}} - 2p_{\frac{1}{2}}$ равно 1057, 77 ± ± 0,10 *Мц/сек* (мегациклов в секунду); теоретическое значение, полученное при учете «радиационных поправок», существование которых предсказывается квантовой электродинамикой, равно 1057,99 ± 0,2 *Мц/сек* (*C. M. Sommerfield.* Phys. Rev. **107**, 328 (1957)).