с $n = 2$ атома водорода [1]). В нерелятивистском приближении три уровня $2s_{\frac{1}{2}}$, $2p_{\frac{1}{2}}$ и $2p_{\frac{3}{2}}$, совпадают. В теории Дирака уровни $2s_{\frac{1}{2}}$ и $2p_{\frac{1}{2}}$ остаются равными, а уровень $2p_{\frac{3}{2}}$ расположен ниже (расстояние между ними порядка 10^{-4} *эв*). Расстояние $2p_{\frac{3}{2}} - 2p_{\frac{1}{2}}$ согласуется с предсказаниями теории, в то же время уровень $2s_{\frac{1}{2}}$ расположен ниже уровня $2p_{\frac{1}{2}}$ и величина $2s_{\frac{1}{2}} - 2p_{\frac{1}{2}}$ равна приблизительно одной десятой расстояния $2p_{\frac{3}{2}} - 2p_{\frac{1}{2}}$. Этот эффект называют лэмбовским сдвигом. Для его объяснения необходимо строгое рассмотрение полного взаимодействия между электроном, протоном и квантованным электромагнитным полем. В теории Дирака учитывается только основная часть этого взаимодействия — кулоновский потенциал. Лэмбовский сдвиг связан с «радиационными поправками» к этому приближению [2]).

Раздел V. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

§ 28. Большие и малые компоненты

Рассмотрим плоские волны с положительной энергией. Компоненты этих волн приведены в табл. IV. Будем считать, что энергия E_p мало отличается от энергии покоя

$$W \equiv E_p - m \ll m.$$

Тогда можно воспользоваться нерелятивистским приближением, поскольку кинетическая энергия W почти равна $mv^2/2$ и справедливо неравенство

$$\frac{W}{m} \approx \frac{1}{2} v^2 \ll 1.$$

Мы увидим, что в этом случае отличная от нуля компонента соответствует $\beta = +1$ и по величине она значительно больше

---

[1]) *W. E. Lamb, R. C. Retherford.* Phys. Rev. **72**, 241 (1947).

[2]) Экспериментальное значение величины $2s_{\frac{1}{2}} - 2p_{\frac{1}{2}}$ равно 1057, 77 ± ± 0,10 *Мц/сек* (мегациклов в секунду); теоретическое значение, полученное при учете «радиационных поправок», существование которых предсказывается квантовой электродинамикой, равно 1057,99 ± 0,2 *Мц/сек* (*C. M. Sommerfield.* Phys. Rev. **107**, 328 (1957)).

компоненты, которая соответствует $\beta = -1$,

$$\sigma_z = +1, \quad \frac{u_3}{u_1} = \left(\frac{W}{W+2m}\right)^{\frac{1}{2}} \approx O\left(\frac{v}{c}\right) \ll 1,$$

$$\sigma_z = -1, \quad \frac{u_4}{u_2} = -\left(\frac{W}{W+2m}\right)^{\frac{1}{2}} \approx O\left(\frac{v}{c}\right) \ll 1.$$

Аналогичное утверждение справедливо для сферических волн (см. выражение (173)) и для собственных функций атома водорода (см., например, собственные функции, определенные в задаче 10). Все это позволяет предположить, что в нерелятивистском приближении две компоненты Ψ_3 и Ψ_4 спинора Ψ, отвечающие собственному значению -1 оператора β, очень малы по абсолютной величине. Следовательно, ими можно пренебречь и теория Дирака становится при этом эквивалентной двухкомпонентной теории.

Чтобы продемонстрировать эту эквивалентность явно, запишем дираковский спинор Ψ в виде (157), где Φ и χ определяются уравнениями (158), (159). Как мы уже отмечали в § 25, величины Φ и χ можно рассматривать как векторы пространства состояний двухкомпонентной нерелятивистской теории.

В этих обозначениях уравнение Дирака для стационарного состояния с энергией E в представлении Дирака принимает вид

$$(\sigma(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}))\chi + (e\varphi + m)\Phi = E\Phi, \tag{180а}$$

$$(\sigma(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}))\Phi + (e\varphi - m)\chi = E\chi. \tag{180б}$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}, \quad M = E - e\varphi, \\ W = E - m, \quad M' = \frac{1}{2}(m + M) = m + \frac{1}{2}(W - e\varphi). \end{gathered} \tag{181}$$

Определив из уравнения (180б) спинор χ и подставив его в уравнение (180а), получим

$$\chi = \frac{1}{2M'}(\sigma\pi)\Phi, \tag{182}$$

$$\left[(\sigma\pi)\frac{1}{2M'}(\sigma\pi) + e\varphi\right]\Phi = W\Phi. \tag{183}$$

Уравнения (182)—(183) *полностью эквивалентны* уравнению Дирака.

В нерелятивистском пределе справедливы соотношения

$$W,\ e\varphi,\ \boldsymbol{p},\ e\boldsymbol{A} \ll m, \quad M' \approx m, \tag{184}$$

и из уравнения (182) ясно, что $\chi \ll \Phi$, а отношение этих двух величин порядка p/m, т. е. v/c. Спиноры χ и Φ называются *малыми и большими компонентами* соответственно.

Далее в этом разделе мы будем использовать понятие *«четных»* и *«нечетных» операторов*. По определению:

(i) оператор $\mathscr{P}$ называется «четным», если все его матричные элементы между малыми и большими компонентами равны нулю (например, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{J}$, $P(\boldsymbol{r}_0)$, β);

(ii) оператор $\mathscr{T}$ называется «нечетным», если у него не равны нулю только матричные элементы между малыми и большими компонентами (например, $\boldsymbol{\alpha}$, $\beta\boldsymbol{\alpha}$, γ^5, $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}_0)$).

Это определение эквивалентно тому условию, что оператор $\mathscr{P}$ коммутирует с β, а оператор $\mathscr{T}$ антикоммутирует с β

$$\mathscr{P} = \beta\mathscr{P}\beta, \quad \mathscr{T} = -\beta\mathscr{T}\beta. \tag{185}$$

Любой оператор Q можно однозначно представить в виде суммы «четного» и «нечетного» операторов

$$Q = \frac{1}{2}[Q + \beta Q\beta] + \frac{1}{2}[Q - \beta Q\beta].$$

Произведение двух «четных» или двух «нечетных» операторов есть «четный» оператор; произведение «четного» оператора на «нечетный» есть «нечетный» оператор.

§ 29. Теория Паули как нерелятивистский предел теории Дирака

Вернемся к системе уравнений (182)—(183). Если пренебречь малыми компонентами, то в нормировке волновой функции мы получим ошибку порядка v^2/c^2. Ошибка того же порядка возникает, если в уравнении (183) оператор M' заменить массой m. В этом приближении уравнение (183) принимает вид уравнения на собственные значения [1])

$$H_{\text{п. г.}}\Phi = W\Phi \tag{186}$$

для гамильтониана

$$H_{\text{п. г.}} \equiv \frac{1}{2m}(\sigma\pi)(\sigma\pi) + e\varphi, \tag{187}$$

который действует на двухкомпонентную волновую функцию Φ. Уравнение (186) определяет энергию W с точностью до v^2/c^2.

Чтобы привести оператор $H_{\text{п.г}}$ к более привычному виду, воспользуемся тождеством (XIII. 83) и учтем некоммутативность компонент векторного оператора $\boldsymbol{\pi}$:

$$\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi} = ie\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = ie\mathscr{H}.$$

[1]) Исходное уравнение (183) не является уравнением на собственные значения, поскольку стоящий в левой части оператор зависит от собственного значения W, которое участвует в определении M'.

Отсюда следует, что

$$H_{\text{п. г.}} \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 - \frac{e}{2m}(\sigma\mathscr{H}) + e\varphi. \tag{188}$$

Мы получили гамильтониан теории Паули для частицы с массой m, зарядом e и внутренним магнитным моментом $\boldsymbol{\mu} = \mu_B\boldsymbol{\sigma}$, где $\mu_B = e/2m$ — магнетон Бора.

Таким образом, теория Дирака не только предсказывает существование внутреннего магнитного момента, но и дает его правильное численное значение (§ XIII. 18). Это одно из наибольших достижений теории [1]).

Для доказательства эквивалентности теории Дирака в рассматриваемом здесь приближении двухкомпонентной теории Паули мы должны указать операторы, соответствующие операторам теории Дирака, но действующие только в подпространстве больших компонент.

Это можно сделать, если в вычислениях с интересующими нас операторами участвуют только их матричные элементы между состояниями Ψ', Ψ'' с положительной энергией, близкой к массе покоя. Последнее условие необходимо для обоснования нерелятивистского приближения.

В случае четного оператора $\mathscr{P}$ матричный элемент $\langle\Psi''|\mathscr{P}|\Psi'\rangle$ представим в виде суммы

$$\langle\Phi''|\mathscr{P}|\Phi'\rangle + \langle\chi''|\mathscr{P}|\chi'\rangle.$$

Второе слагаемое имеет порядок $(v/c)^2$ по сравнению с первым и в рассматриваемом здесь приближении им можно пренебречь. Тем самым оператор $\mathscr{P}$ можно заменить его проекцией на подпространство больших компонент. Эта проекция в нерелятивистской теории Паули описывает физическую величину, которая в теории Дирака задается оператором $\mathscr{P}$.

---

[1]) В действительности, экспериментальное значение μ_{exp} несколько отличается от теоретического значения магнитного момента электрона (*P. Kusch, H. M. Foley.* Phys. Rev. **72**, 1256 (1947)). Согласно последним данным

$$\Delta\mu_{\text{exp}} \equiv \mu_{\text{exp}} - \mu_B = (1{,}165 \pm 0{,}011)\cdot 10^{-3}\,\mu_B.$$

«Радиационные поправки» квантовой электродинамики приводят к существованию аномального магнитного момента, что дает (*Sommerfield*, loc. cit.)

$$\Delta\mu_{\text{th}} = 1{,}163\cdot 10^{-3}\,\mu_B.$$

Отметим еще, что добавление к оператору Дирака члена $\varkappa\mu_B\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ приводит к уравнению, которое обладает теми же свойствами инвариантности, что и уравнение Дирака, при любой константе $\varkappa$. В результате такое уравнение описывает частицу с массой m, зарядом e и внутренним магнитным моментом $(1+\varkappa)\,\mu_B$.

Для нечетного оператора $\mathcal{T}$ имеем

$$\langle \Psi'' | \mathcal{T} | \Psi' \rangle = \langle \Phi'' | \mathcal{T} | \chi' \rangle + \langle \chi'' | \mathcal{T} | \Phi' \rangle.$$

Малые компоненты входят в каждое слагаемое этой суммы. Однако в силу уравнения (182) и нерелятивистского приближения справедливы равенства

$$| \chi \rangle = \rho_1 \frac{\sigma\pi}{2m} | \Phi \rangle,$$

$$\langle \Psi'' | \mathcal{T} | \Psi' \rangle = \frac{1}{2m} \langle \Phi'' | [\mathcal{T} \rho_1 (\sigma\pi) + (\sigma\pi) \rho_1 \mathcal{T}] | \Phi' \rangle.$$

Следовательно, оператор $\mathcal{T}$ можно заменить проекцией на подпространство больших компонент оператора

$$\frac{1}{2m} [\mathcal{T} \rho_1 (\sigma\pi) + (\sigma\pi) \rho_1 \mathcal{T}].$$

Так, «скорость» $\alpha = \rho_1 \sigma$ можно заменить действующим в пространстве больших компонент оператором

$$\frac{\pi}{m} = \frac{\sigma (\sigma\pi) + (\sigma\pi) \sigma}{2m}.$$

Аналогично плотность потока в точке r_0

$$j (r_0) \equiv \rho_1 \sigma \delta (r - r_0)$$

можно заменить оператором

$$(j (r_0))_{\text{п. г.}} \equiv \delta (r - r_0) \sigma \left(\frac{\sigma\pi}{2m}\right) + \left(\frac{\sigma\pi}{2m}\right) \sigma \delta (r - r_0)$$

или, используя тождество (XIII. 83),

$$(j (r_0))_{\text{п. г.}} \equiv j^{(\mathrm{I})} + j^{(\mathrm{II})}, \tag{189}$$

$$j^{(\mathrm{I})} \equiv \frac{\delta (r - r_0) \pi + \pi \delta (r - r_0)}{2m}, \tag{190а}$$

$$j^{(\mathrm{II})} \equiv i \frac{\delta (r - r_0) (p \times \sigma) - (p \times \sigma) \delta (r - r_0)}{2m}. \tag{190б}$$

Мы видим, что электрический ток ej теории Дирака в этом приближении представляется суммой из двух слагаемых. Первое, $ej^{(\mathrm{I})}$, совпадает с током теории Шредингера (см. задачу IV. 1). Чтобы найти интерпретацию второго слагаемого, рассмотрим его матричный элемент между Φ' и Φ''

$$\langle \Phi'' | ej^{(\mathrm{II})} | \Phi' \rangle = \frac{e}{2m} \operatorname{rot} \langle \Phi'' | \delta (r - r_0) \sigma | \Phi' \rangle.$$

Это ток, связанный с магнитным моментом, и величину

$$\frac{e}{2m} \langle \Phi'' | \delta (r - r_0) \sigma | \Phi' \rangle \equiv \langle \Phi'' | \delta (r - r_0) \mu | \Phi' \rangle$$

можно интерпретировать как плотность магнитного момента. Мы увидим, что дивергенция этого тока обращается в нуль и он не дает вклада в уравнение непрерывности.

§ 30. Приложение: сверхтонкая структура и диполь-дипольная связь

Рассмотрим электрон в электрическом поле атома, которое описывается некоторым электростатическим потенциалом $\varphi(r)$, и исследуем эффект, к которому приводит дополнительное поле, создаваемое магнитным моментом $\boldsymbol{M}$ ядра. Магнитный диполь $\boldsymbol{M}$, расположенный в начале координат, порождает поле, которое можно представить векторным потенциалом,

$$\boldsymbol{A} \equiv \frac{\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{r}}{r^3} = \tag{191}$$

$$\equiv \operatorname{rot}(\boldsymbol{M}/r). \tag{191'}$$

Такое поле ведет к дополнительному слагаемому $-e\alpha\boldsymbol{A}$ в гамильтониане Дирака.

Для определения влияния этого поля в нерелятивистском приближении можно вычислить нерелятивистский предел оператора $-e\alpha\boldsymbol{A}$, используя метод предыдущего параграфа. Можно также рассмотреть те изменения в гамильтониане Паули (188), к которым приводит наличие $\boldsymbol{M}$. Оба подхода эквивалентны и мы воспользуемся вторым.

Если мы учтем только линейные по $\boldsymbol{M}$ члены, то гамильтониан Паули будет содержать два дополнительных слагаемых

$$I_a = -\frac{e}{2m}(\boldsymbol{pA} + \boldsymbol{Ap}),$$

$$I_b = -\frac{e}{2m}(\sigma\mathscr{H}) = -\mu\mathscr{H},$$

где $\mathscr{H}$ — поле, порожденное диполем $\boldsymbol{M}$.

Слагаемое I_a представляет собой спин-орбитальное взаимодействие (спин ядра и орбита электрона). Поскольку $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$ (см. ур. (191)), то

$$I_a = -\frac{e}{m}\boldsymbol{Ap}.$$

Подставляя в правую часть выражение (191) и вспоминая определение орбитального момента электрона $\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, получаем

$$I_a = -\frac{e\boldsymbol{ML}}{mr^3}. \tag{192}$$

Слагаемое I_b представляет собой спин-спиновое или диполь-дипольное взаимодействие. Вычислим это слагаемое, используя формулу (191),

$$I_b = -\mu(\nabla \times A) = -\mu\left[\nabla \times \left(\nabla \times \frac{M}{r}\right)\right] =$$
$$= (\mu M)\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right) - [(\mu\nabla)(M\nabla)]\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (193)$$

Если $r \neq 0$, то дифференцирование легко выполнить и получить

$$-\frac{3(Mr)(\mu r) - (M\mu)\,r^2}{r^5}.$$

Выражение (193), как функция r, имеет в начале координат особенность порядка $1/r^3$. Чтобы определить действие оператора I_b, применим его к регулярной функции $f(r)$ и проинтегрируем это произведение по малой окрестности точки $r = 0$. Для этого запишем I_b в виде

$$I_b = \frac{2}{3}(\mu M)\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right) - \left[(\mu\nabla)(M\nabla) - \frac{1}{3}(\mu M)\,\Delta\right]\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (193')$$

Второй член в этом выражении является тензорным оператором второго порядка в пространстве функций от r. Если функцию $f(r)$ разложить по сферическим функциям, то после интегрирования по углам останутся только коэффициенты при сферических функциях второго порядка. Эти коэффициенты обращаются в нуль в начале координат не медленнее, чем r^2 и, следовательно, вклад второго члена в выражение (193), несмотря на сингулярность $1/r^3$, также обращается в нуль в начале координат. Используя тождество (А. 12), первый член можно записать в виде $-(8\pi/3)(\mu M)\,\delta(r)$. Таким образом, для любого r, включая и начало координат, справедливо равенство

$$I_b = -\frac{8\pi}{3}(M\mu)\,\delta(r) - \frac{1}{r^3}\left[3\left(M\frac{r}{r}\right)\left(\mu\frac{r}{r}\right) - (M\mu)\right]. \qquad (194)$$

Равенства (192) и (194) получены в нерелятивистском пределе и позволяют определить сверхтонкую структуру атомных уровней с точностью до v^2/c^2. В частности, вклад s-электронов в сверхтонкую структуру дается контактным членом $-(8\pi/3)(\mu M)\,\delta(r)$.

§ 31. Поправки высших порядков и преобразование Фолди — Вотхойзена

В низшем порядке по v/c теория Дирака эквивалентна двухкомпонентной теории Паули. Используя, как и ранее, уравнения (182)—(183), можно получить релятивистские поправки выс-

ших порядков. Для этого следует заменить величину $1/M'$ ее разложением по степеням $[(W-e\varphi)/2m]$:

$$\frac{1}{M'}=\frac{1}{m}\left[1-\frac{W-e\varphi}{2m}+\left(\frac{W-e\varphi}{2m}\right)^2-\ldots\right].$$

Поскольку

$$\left\langle\frac{W-e\varphi}{2m}\right\rangle\approx\left\langle\frac{\pi^2}{4m^2}\right\rangle\approx O\left(\frac{v^2}{c^2}\right),$$

то это по существу ряд по степеням v^2/c^2. Если в этом разложении ограничиться первым членом, как это было сделано в § 29, то получим теорию Паули. Учитывая последующие члены разложения, найдем релятивистские поправки высших порядков, однако как только мы учтем поправки порядка v^2/c^2, мы потеряем эквивалентность теории Дирака в форме (182)—(183) двухкомпонентной теории. Это происходит потому, что:

(i) нельзя более пренебрегать вкладом малых компонент в нормировку и в матричные элементы четных операторов;

(ii) уравнение (183) не является более уравнением на собственные значения (см. первую сноску к § 29).

Хотя возникающий при этом метод не является совершенно непригодным, его применение и интерпретация результатов становится довольно деликатной проблемой. Фолди и Вотхойзен предложили иной метод, позволяющий находить двухкомпонентную теорию, которая является приближением к теории Дирака в данном порядке по v/c. Основу этого метода составляет подпредставление), гамильтониан Дирака является четным операторов теории Дирака. В новом «представлении», которое мы будем называть представлением Фолди — Вотхойзена, (ФВ-представление), гамильтониан Дирака является четным оператором в данном порядке по v/c, так что в этом приближении малые и большие компоненты полностью разделены в волновом уравнении. Следовательно, малые компоненты можно просто отбросить и получить искомую двухкомпонентную теорию. Операторы этой двухкомпонентной теории получаются из четных операторов ФВ-представления, а не из операторов исходного представления. Таким образом, приходят к новой интерпретации операторов нерелятивистской механики, в частности, более удовлетворительную интерпретацию получает оператор координаты.

В оставшейся части этого раздела мы будем заниматься ФВ-представлением и его применением к нерелятивистскому пределу уравнения Дирака.

§ 32. ФВ-преобразование для свободной частицы

В случае свободной частицы малые и большие компоненты можно полностью разделить во всех порядках v/c.

Рассмотрим гамильтониан Дирака

$$H_0 \equiv \alpha p + \beta m.$$

Пусть Γ_+ и Γ_- — проекторы на решения с положительной и отрицательной энергией соответственно

$$\Gamma_\pm \equiv \frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{H_0}{E_p}\right] = \frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{\alpha p + \beta m}{E_p}\right], \tag{195}$$

$$E_p \equiv \sqrt{m^2 + p^2}.$$

Пусть B_+ и B_- — проекторы на подпространства больших и малых компонент:

$$B_\pm \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \beta).$$

По определению, оператор U, который переводит величины в ФВ-представление, преобразует Γ_+ в B_+, а Γ_- в B_-. Обозначая штрихом векторы и операторы в ФВ-представлении, можно, следовательно, записать, что

$$U^\dagger U = UU^\dagger = 1,$$

$$\Gamma'_\pm \equiv U\Gamma_\pm U^\dagger = B_\pm.$$

Потребуем также, чтобы оператор U был инвариантен относительно трансляций, вращений и отражения. Предоставим читателю доказательство того, что в этом случае U определен с точностью до фазового множителя. Фиксируя эту фазу, получаем

$$U = \sqrt{\frac{2E_p}{m + E_p}}\,\frac{1}{2}\left[1 + \beta\frac{H_0}{E_p}\right] = \tag{196}$$

$$= \sqrt{\frac{m + E_p}{2E_p}} + \beta\frac{\alpha p}{\sqrt{2E_p(m + E_p)}}. \tag{196'}$$

Легко проверить, что данное выражение удовлетворяет всем упомянутым требованиям.

Поскольку оператор U не зависит от времени, гамильтониан H_F, который определяет зависимость от времени векторов состояния в ФВ-представлении, дается равенством

$$H_F = UH_DU^\dagger.$$

Используя выражение (196), получаем

$$H_F = \beta E_p \equiv \beta(m^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{197}$$

В силу четности оператора H_F, большие Φ' и малые χ' компоненты расцепились в уравнении движения

$$i\,\partial\Phi'/\partial t = E_p\Phi', \tag{198а}$$

$$i\,\partial\chi'/\partial t = -E_p\chi'. \tag{198б}$$

Если мы ограничимся решениями с положительной энергией (*a fortiori* нерелятивистскими энергиями), то теория Дирака будет эквивалентна во всех порядках v/c двухкомпонентной теории, которая описывается уравнением (198а).

Оператор U коммутирует с $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{J}$ и оператором четности P, но не коммутирует с оператором $\boldsymbol{r}$. В представлении, где оператор $\boldsymbol{r}$ диагонален, U задается интегральным оператором с матричными элементами

$$\langle \boldsymbol{r}\,|U|\,\boldsymbol{r}'\rangle = \iint \langle \boldsymbol{r}\,|\boldsymbol{p}\rangle\, d\boldsymbol{p}\, \langle \boldsymbol{p}\,|U|\,\boldsymbol{p}'\rangle\, d\boldsymbol{p}'\, \langle \boldsymbol{p}'\,|\boldsymbol{r}'\rangle.$$

Откуда, используя формулу (196′), находим

$$\langle \boldsymbol{r}\,|U|\,\boldsymbol{r}'\rangle = (2\pi)^{-3} \int \left[\sqrt{\frac{m+E_p}{2E_p}} + \beta \frac{\boldsymbol{\alpha p}}{\sqrt{2E_p(m+E_p)}} \right] e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\, d\boldsymbol{p}.$$

Матричный элемент $\langle \boldsymbol{r}|U|\boldsymbol{r}'\rangle$ является функцией $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$, которая практически исчезает при $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \gg 1/m$ и сосредоточена в области, где $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ меньше или порядка $1/m$. Следовательно, ФВ-представление является нелокальным преобразованием, при котором спинор $\Psi'(\boldsymbol{r})$ — преобразование спинора $\Psi(\boldsymbol{r})$ — получается некоторым усреднением значений спинора Ψ по окрестности точки $\boldsymbol{r}$, и линейные размеры этой окрестности имеют порядок $1/m$ — длины комптоновской волны частицы.

Оператор координаты частицы определяется в ФВ-представлении равенством

$$\boldsymbol{r}' \equiv U\boldsymbol{r}U^{\dagger}.$$

Этот оператор отличен от $\boldsymbol{r}$. Следуя Фолди и Вотхойзену, мы будем называть величину, которая задается оператором $\boldsymbol{r}$ в ФВ-представлении, *усредненной координатой*. В исходном представлении она задается некоторым оператором $\boldsymbol{R}$, и, поскольку $\boldsymbol{R}' \equiv \boldsymbol{r}$, имеем

$$\boldsymbol{R} \equiv U^{\dagger}\boldsymbol{r}U.$$

В представлении Дирака $\boldsymbol{R}$ является нелокальным оператором. Действие этого оператора на спинор $\Psi(\boldsymbol{r})$ состоит, грубо говоря, в умножении на $\boldsymbol{r}$ и замене значения в каждой точке на некоторое усредненное значение спинора по области порядка $1/m$ с центром в этой точке. Это объясняет приведенное выше название усредненной координаты.

Если Q' — четный оператор в ФВ-представлении, то в двухкомпонентной теории ему соответствует наблюдаемая $Q_{\text{п. г.}}$, которая получается, если в Q' оставить только матричные элементы между векторами из подпространства больших компонент: $Q_{\text{п.г.}} \equiv B_+ Q' B_+$. В частности, наблюдаемая $\boldsymbol{r}$, соответствующая координате в двухкомпонентной теории, отвечает «средней координате» $\boldsymbol{R}$, а не оператору координаты собственно теории Дирака [1]).

§ 33. ФВ-преобразование для частицы во внешнем поле

В присутствии внешнего поля гамильтониан Дирака имеет вид

$$H = \beta m + \mathcal{T} + \mathcal{P}, \quad \mathcal{T} \equiv \boldsymbol{\alpha\pi} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}), \quad \mathcal{P} \equiv e\varphi.$$

Вообще говоря, не существует «представления», в котором гамильтониан был бы в точности «четным» оператором. Однако применяя последовательно унитарные преобразования, можно получить «представления», в которых «нечетная» часть соответствующего гамильтониана имеет все более высокий порядок по v/c. Для доказательства рассмотрим унитарный оператор

$$U = \exp(\beta\mathcal{T}/2m).$$

Гамильтониан H_1, который определяет зависимость от времени в новом представлении, дается равенством

$$H_1 = UHU^\dagger - iU\,\partial U^\dagger/\partial t.$$

Используя тот факт, что $\beta\mathcal{T}$ антикоммутирует с $(\beta m + \mathcal{T})$, а $U^\dagger = \exp(-\beta\mathcal{T}/2m)$, получаем

$$U(\beta m + \mathcal{T})U^\dagger = U^2(\beta m + \mathcal{T}) = \\ = \beta m[\cos(\mathcal{T}/m) + (\mathcal{T}/m)\sin(\mathcal{T}/m)] + \\ + m[(\mathcal{T}/m)\cos(\mathcal{T}/m) - \sin(\mathcal{T}/m)].$$

Члены $U\mathcal{P}U^\dagger$ и $-iU\partial U^\dagger/\partial t$ можно представить в виде рядов по степеням $\mathcal{T}/m$, используя следующее операторное тожде-

---

[1]) В соответствии с данной здесь интерпретацией орбитальный момент $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ и спин $\boldsymbol{\sigma}$ двухкомпонентной теории соответствуют не орбитальному моменту и спину теории Дирака, а «усредненному моменту импульса» $\mathbf{R} \times \boldsymbol{p}$ и усредненному спину $\boldsymbol{\Sigma}$. Здесь $\boldsymbol{\Sigma}$ — оператор, которому в ФВ-представлении отвечает оператор $\boldsymbol{\sigma}$; $\boldsymbol{\Sigma}' \equiv \boldsymbol{\sigma}$. Читатель может убедиться в том, что каждая из компонент среднего спина и среднего момента импульса коммутирует с гамильтонианом свободной частицы, собственно спин и орбитальный момент этим свойством не обладают. Отметим также, что

$$\boldsymbol{J} \equiv (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{p}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}.$$

ство, которое справедливо для любых двух операторов A и B (см. задачу VIII. 4):

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \\ + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \ldots + \frac{1}{n!}\overbrace{[A, [A, \ldots [A, [A, B]] \ldots]]}^{n \text{ скобок}} + \ldots$$

Мы приведем только результат вычисления H' в случае, когда $\mathcal{T}$ не зависит от времени. В первом приближении справедливо равенство $H' = H_1$. Находим

$$H_1 = \beta m + \mathcal{P}_1 + \mathcal{T}_1,$$

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} + \beta\frac{\mathcal{T}^2}{2m} - \frac{1}{8}m\left[\frac{\mathcal{T}}{m}, \left[\frac{\mathcal{T}}{m}, \frac{\mathcal{P}}{m}\right]\right] - \frac{1}{8}\beta m\left(\frac{\mathcal{T}}{m}\right)^4 + \ldots,$$

$$\mathcal{T}_1 = m\left(\frac{1}{2}\beta\left[\frac{\mathcal{T}}{m}, \frac{\mathcal{P}}{m}\right] - \frac{1}{3}\left(\frac{\mathcal{T}}{m}\right)^3\right) + \ldots$$

Эти разложения для «четной» и «нечетной» частей оператора H_1 определяют $\mathcal{P}_1$ с точностью до $(\mathcal{T}/m)^6$ или $(\mathcal{P}/m)(\mathcal{T}/m)^4$ и $\mathcal{T}_1$ — с точностью до $(\mathcal{T}/m)^5$ или $(\mathcal{P}/m)(\mathcal{T}/m)^3$, в зависимости от того какая из этих величин больше. Следовательно, «нечетная» часть гамильтониана H_1 меньше «нечетной» части H на множитель порядка $\mathcal{P}/m$ или $(\mathcal{T}/m)^2$. В нерелятивистском пределе величины $\mathcal{P}/m$ и $\mathcal{T}/m$ имеют порядок $(v/c)^2$ и v/c соответственно. Таким образом, $\mathcal{T}_1$ имеет порядок $(v/c)^3$.

Для оператора H_1 повторим ту же операцию, что была сделана для H, т. е. совершим унитарное преобразование с оператором

$$U_1 = \exp(\beta\mathcal{T}_1/2m),$$

и новый гамильтониан обозначим H_2. «Нечетная» часть этого гамильтониана меньше $\mathcal{T}_1$ на множитель порядка $\mathcal{P}_1/m$ или $(\mathcal{T}_1/m)^2$. В нерелятивистском пределе $\mathcal{P}_1/m$ имеет порядок $(v/c)^2$, а $(\mathcal{T}_1/m)^2$ — порядок $(v/c)^6$, следовательно, $\mathcal{T}_2$ имеет порядок $(v/c)^5$. Если пренебречь членами такого порядка, то гамильтониан H_2 будет «четным» оператором, который имеет вид

$$H_2 \approx \beta m + \mathcal{P}_1 + O(v^5) \approx \\ \approx \beta m + \mathcal{P} + \beta\frac{\mathcal{T}^2}{2m} - \frac{1}{8}m\left[\frac{\mathcal{T}}{m}, \left[\frac{\mathcal{T}}{m}, \frac{\mathcal{P}}{m}\right]\right] - \frac{1}{8}\beta m\left(\frac{\mathcal{T}}{m}\right)^4 + O(v^5) \approx \\ \approx \beta m + e\varphi + \frac{1}{2m}\beta(\sigma\pi)^2 - \frac{1}{8m^2}[(\sigma\pi), [(\sigma\pi), \varphi]] - \frac{1}{8m^3}\beta(\sigma\pi)^4 + O(v^5).$$

Аналогично, если пренебречь членами порядка $(v/c)^3$, то H_1 также является «четным» оператором и имеет вид

$$H_1 \approx \beta m + e\varphi + \frac{1}{2m}\beta(\sigma\pi)^2 + O(v^3).$$

После этих преобразований мы можем перейти к двухкомпонентной теории, так же как и в случае свободной частицы. С точностью до $(v/c)^5$ решения с положительной энергией задаются волновыми функциями Φ' из пространства больших компонент, которые удовлетворяют уравнению

$$i\,\partial\Phi'/\partial t = (m + H'_{\text{п. г.}})\,\Phi'.$$

Здесь $(m + H'_{\text{п. г.}})$ — проекция приведенного выше приближенного выражения для H_2 на пространство больших компонент, т. е.

$$H'_{\text{п. г.}} = e\varphi + \frac{1}{2m}(\sigma\pi)^2 - \frac{e}{8m^2}[(\sigma\pi), [(\sigma\pi), \varphi]] - \frac{1}{8m^3}(\sigma\pi)^4. \quad (199)$$

Два первых слагаемых представляют собой гамильтониан теории Паули, следующие два слагаемых — релятивистские поправки порядка $(v/c)^2$ к нерелятивистской энергии $H_{\text{п.г.}}$.

Несложные вычисления приводят нас к равенствам

$$(\sigma\pi)^4 = (\pi^2 - e(\sigma\mathscr{H}))^2, \quad (200)$$

$$[(\sigma\pi), [(\sigma\pi), \varphi]] = \operatorname{div}\mathscr{E} + 2\sigma(\mathscr{E}\times\pi), \quad (201)$$

которые позволяют записать $H'_{\text{п г.}}$ в более привычной форме.

Производя последовательно такие унитарные преобразования достаточное число раз, можно построить двухкомпонентную теорию, которая определяет состояния с положительной энергией с точностью до любого заданного порядка по v/c. Каждое новое преобразование увеличивает точность на множитель $(v/c)^2$. Исследование сходимости получившихся рядов является довольно деликатным вопросом. Весьма вероятно, что в большинстве случаев мы имеем лишь асимптотическое разложение. Это разложение по степеням операторов $\boldsymbol{p}/m$, т. е. $(\hbar/mc)$ grad, и $\partial/m\partial t$, т. е. $(\hbar/mc^2)\,\partial/\partial t$. А следовательно, скорость сходимости этого ряда зависит от характера изменения потенциала $(\boldsymbol{A}, \varphi)$ на расстояниях порядка $\hbar/mc$ (и за время порядка $\hbar/mc^2$ — отношение комптоновской длины волны к скорости света).

§ 34. Электрон в центральном электростатистическом потенциале

В качестве приложения описанной в предыдущем параграфе техники рассмотрим электрон в центральном электростатическом потенциале $V(r) \equiv e\varphi(r)$. В этом случае $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0$ и гамильтониан Паули совпадает с гамильтонианом теории Шредингера

$$H_{\text{п. г.}} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(r).$$

Если учесть поправки порядка v^2/c^2, то к гамильтониану $H_{\text{н.г.}}$ добавятся два последних слагаемых выражения (199). В данном случае

$$e\mathscr{E} = -\operatorname{grad} V = -\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{dV}{dr},$$

$$e \operatorname{div} \mathscr{E} = -\Delta V,$$

и принимая во внимание соотношения (200) и (201), получаем

$$H'_{\text{н. г.}} = H_{\text{н. г.}} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}(\boldsymbol{\sigma L}) + \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\Delta V. \quad (202)$$

Первое дополнительное слагаемое, $-p^4/8m^3c^2$, представляет собой релятивистскую поправку к кинетической энергии $p^2/2m$, следующее — спин-орбитальное взаимодействие (см. формулу (XIII. 95)). Третье слагаемое, $\hbar^2\Delta V/8m^2c^2$, определяет поправку к центральному потенциалу, которая называется поправкой Дарвина; в случае чисто кулоновского потенциала $V(r) = -Ze^2/r$. Эта поправка имеет вид

$$(\pi Ze^2\hbar^2/2m^2c^2)\,\delta(\boldsymbol{r})$$

и влияет только на s-состояния.

§ 35. Обсуждения и выводы

Независимо от того, имеется ли внешнее поле или оно равно нулю, операторы двухкомпонентной нерелятивистской теории представляют собой проекции операторов представления Фолди — Вотхойзена на пространство больших компонент. В частности, оператор нерелятивистской теории $\boldsymbol{r}$ следует отождествить с оператором $\boldsymbol{R}$, который мы назвали «усредненной координатой». В теории Дирака взаимодействие частицы с электромагнитным потенциалом локально, другими словами, частицы взаимодействуют с электромагнитным потенциалом в точке $\boldsymbol{r}$. При переходе к ФВ-представлению, где $\boldsymbol{r}$ представляет усредненную координату, взаимодействие становится нелокальным и оно зависит от значений электромагнитного потенциала в области с линейными размерами порядка $\hbar/mc$, содержащий точку $\boldsymbol{r}$. Если изменение потенциала в этой области незначительное, то это взаимодействие можно представить посредством ряда Тейлора, включающим в себя значения потенциала и его производных в точке $\boldsymbol{r}$. Так, гамильтониан $H'_{\text{н. г.}}$ (ур. (199) или (202)) содержит первые члены этого разложения.

Следовательно, в нерелятивистском пределе электрон представляет собой не точечный заряд, а распределение заряда и тока в области с линейными размерами $\hbar/mc$. Это объясняет появление членов взаимодействия, которые связаны с магнитным

моментом (взаимодействие $-\mu\mathcal{H}$, спин-орбитальное взаимодействие) и распределенной плотностью заряда (дарвиновское слагаемое).

Наконец, следует отметить, что использование нерелятивистского приближения для потенциалов, которые сингулярны в начале координат, таких как $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{r}/r^3$ или $\varphi = -Ze/r$, не обосновано, поскольку в окрестности точки $r = 0$ изменение величин $e\boldsymbol{A}/m$ и $e\varphi/m$ не мало. Если воспользоваться описанным выше методом последовательных приближений достаточное число раз, то в нерелятивистском гамильтониане появятся слагаемые, которые будут иметь достаточно сильную сингулярность в начале координат и будут давать бесконечный вклад в энергию. Пути преодоления этой трудности уже были предложены в предыдущих обсуждениях. В нерелятивистском гамильтониане величины $\boldsymbol{A}$ и φ заменяются их средними значениями по области с линейными размерами порядка $\hbar/mc$. Если нерелятивистское приближение является обоснованным, то это ведет к эффективному обрезанию сингулярностей на расстоянии $\hbar/mc$ от начала координат во всех сингулярных выражениях, которые возникают при вычислениях. Для того чтобы нерелятивистское приближение было обоснованным в упомянутых выше двух случаях, достаточно чтобы в точке $r = \hbar/mc$ выполнялись неравенства [1])

$$e|\boldsymbol{A}| \ll mc^2, \quad e\varphi \ll mc^2.$$

Раздел VI. РЕШЕНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ И ТЕОРИЯ ПОЗИТРОНОВ

Θαλασσα!θαλασσα! *)
(*Анабасис*, IV. 8)

§ 36. Свойства зарядово-сопряженных решений

В дальнейшем мы будем использовать понятие зарядового сопряжения, которое было введено в § 19. Зарядовое сопряжение представляет собой антилинейное взаимнооднозначное соответствие между волновыми функциями, которые описывают поведение двух различных частиц с одной и той же массой m, но с противоположными зарядами $+e$ и $-e$ в заданном электромагнитном поле $(\boldsymbol{A}, \varphi)$.

Если физическая величина, связанная с первой частицей, представлена наблюдаемой $Q(e)$, то для второй частицы та же

---

[1]) Если m_N — масса атомного ядра, то $|\boldsymbol{M}| \approx Ze\hbar/m_N c$; величина $e\boldsymbol{A}/mc^2$ в точке $r = \hbar/mc$ имеет порядок $(e^2/\hbar c)(Zm/m_N)$, т. е. 10^{-5}—10^{-6}. Таким образом, наши вычисления сверхтонкой структуры полностью обоснованы. Что касается примера из § 34, то величина $e\varphi/mc^2$ имеет порядок $e^2Z/\hbar c$ и вычисления являются обоснованными, если $Z \ll 137$.

*) *Море! Море!* (*греч., прим. перев.*).