

## § 8. Пространственное отражение и обращение времени

К преобразованиям, оставляющим инвариантными уравнения движения, относятся отражение пространства и обращение времени. Эти преобразования полностью определяются их действием на поле  $\Phi(\mathbf{r})$  и сопряженный ему импульс  $\Pi(\mathbf{r})$ , соответствующие (унитарный или антунитарный) операторы преобразований определяются с точностью до фазового множителя.

При отражении пространства имеем

$$\Phi(\mathbf{r}) \rightarrow \Phi(-\mathbf{r}), \quad \Pi(\mathbf{r}) \rightarrow \Pi(-\mathbf{r}). \quad (\text{I})$$

Это закон преобразования скалярного поля, соответствующий оператору преобразования  $S_0$  — *унитарный* и, следовательно, коммутационные соотношения полей при этом преобразовании не меняются. Поскольку все операторы теории являются функциями  $\Phi$  и  $\Pi$ , то из соотношений (I) легко получить закон их преобразования при пространственном отражении. В частности, для операторов  $a$  и  $a^\dagger$ , связанных с разложением по плоским волнам, получаем

$$\begin{aligned} S_0 a_{\mathbf{k}} S_0^\dagger &= a_{-\mathbf{k}}, \\ S_0 a_{\mathbf{k}}^\dagger S_0^\dagger &= a_{-\mathbf{k}}^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

В случае обращения времени поле  $\Phi$  не меняется, а скорость меняет свое направление на противоположное, следовательно,

$$\Phi(\mathbf{r}) \rightarrow \Phi(\mathbf{r}), \quad \Pi(\mathbf{r}) \rightarrow -\Pi(\mathbf{r}). \quad (\text{I}')$$

Соответствующий этому преобразованию оператор  $K$  — *антиунитарный* и коммутационные соотношения полей при преобразовании меняют знак. Закон преобразования операторов  $a$  и  $a^\dagger$  легко следует из определения этих операторов и закона (I')

$$\begin{aligned} K a_{\mathbf{k}} K^\dagger &= a_{-\mathbf{k}}, \\ K a_{\mathbf{k}}^\dagger K^\dagger &= a_{-\mathbf{k}}^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{II}')$$

Таким образом, операторы рождения и уничтожения преобразуются одинаково при пространственном отражении и обращении времени. Не следует, однако, путать эти преобразования, поскольку одно является унитарным, а другое — антиунитарным.

Преобразования (I) или (II) и (I') или (II') определяют операторы  $S_0$  и  $K$  с точностью до фазового множителя. Мы устраним произвол в фазе, потребовав чтобы вектор  $|0\rangle$  был инвариантен относительно этих преобразований

$$S_0 |0\rangle = |0\rangle, \quad K |0\rangle = |0\rangle.$$

## Раздел II. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С АТОМНОЙ СИСТЕМОЙ

### § 9. Взаимодействие с системой частиц

Рассмотрим взаимодействие поля и частицы. Нижеследующие рассуждения в существенном не изменятся, если частицу заменить системой нескольких частиц.

Динамические переменные системы частица + поле являются функциями основных переменных подсистем. В качестве основных переменных частицы, которую мы будем считать для простоты бессpinовой, возьмем вектор  $\mathbf{R}$ , описывающий ее положение

жение, и ее импульс  $\mathbf{P}$ . В качестве основных переменных поля мы можем взять  $\Phi(\mathbf{r})$  и  $\Pi(\mathbf{r})$  или определенные в предыдущем параграфе операторы рождения и уничтожения. В дальнейшем мы будем часто использовать операторы  $a_{\mathbf{k}}$  и  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ , связанные с разложением по плоским волнам.

Состояния всей системы образуют пространство, которое является произведением пространства состояний частицы  $\mathcal{E}_{\text{част}}$  и пространства состояний свободного поля  $\mathcal{E}_{\text{п.}}$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{п.}} \otimes \mathcal{E}_{\text{част.}}$$

Гамильтониан всей системы равен сумме трех слагаемых

$$H = H_{\text{част}} + H_{\text{п.}} + H'. \quad (62)$$

Первые два слагаемых отвечают свободным подсистемам, последнее представляет собой энергию взаимодействия.

Выше мы получили несколько эквивалентных выражений для гамильтониана свободного поля  $H_{\text{п.}}$ , отметим, в частности, выражение (48). Гамильтониан  $H_{\text{част}}$  описывает эволюцию частицы без поля  $\Phi$ . Предположим для определенности, что частица находится во внешнем потенциальном поле и ее масса  $M$  удовлетворяет неравенству  $M \gg \mu$ . Будем считать, что движение частицы можно рассматривать в нерелятивистском приближении, т. е.

$$H_{\text{част}} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + V(R). \quad (63)$$

Остается определить  $H'$ . Простейшее из возможных выражений для  $H'$  получится, если предположить, что взаимодействие пропорционально величине амплитуды поля в точке  $R$ , где находится частица

$$H' = g\Phi(R) = \quad (64)$$

$$= gL^{-\frac{3}{2}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}R} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}R}). \quad (64')$$

Безразмерная постоянная  $g$  называется *константой связи*. Вторая формула для  $H'$  получается из первой и разложения (46).

Такая форма взаимодействия почти однозначно определяется из требования релятивистской инвариантности. Однако в исследуемой здесь теории с самого начала используется нерелятивистское приближение. Это следует не только из того факта, что  $H_{\text{част}}$  не обладает ковариантными свойствами, вытекающими из принципа относительности, но и потому, что сама концепция материальной системы, состоящей из одной или определенного числа частиц, не может быть оправдана в релятивистской квантовой механике. Эти два ограничения, имеющиеся

в теории, следует иметь в виду при выборе  $H'$ . Выбору может помочь исследование из главы XX о нерелятивистском приближении для уравнения Дирака. Оно подсказывает нам, что взаимодействие поля и нерелятивистской частицы массы  $M$  не является локальным, как записано в формуле (64), а зависит от значений поля в области размером  $1/M$  с центром в точке, где находится частица. Поэтому выражение (64) для  $H'$  мы заменим на выражение

$$H' = g \int \Phi(r) \rho(|\mathbf{r} - \mathbf{R}|) d\mathbf{r}, \quad (65)$$

где  $\rho(\mathbf{r}) \equiv \rho(r)$  — вещественная, сферически-симметричная функция, удовлетворяющая условию нормировки

$$\int \rho(r) d\mathbf{r} = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr = 1$$

и сосредоточенная в области радиуса  $1/M$  с центром в начале координат (см. рис. 23, а). Подставляя в правую часть формулы (65) вместо этой функции  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ , мы получим формулу (64).

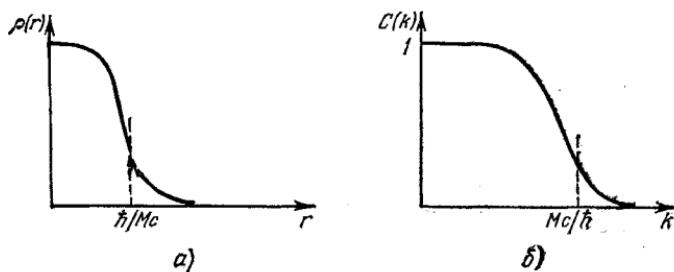


Рис. 23. Общий вид функций  $\rho(r)$  и  $C(k)$ .

Мы назовем *обрезающей* функцию  $C(k)$ , которая определяется равенством

$$C(k) = \int e^{ikr} \rho(r) d\mathbf{r}.$$

Это вещественная, сферически-симметричная функция, удовлетворяющая условию  $C(0) = 1$  и в силу хорошо известного свойства преобразования Фурье сосредоточенная в окрестности точки  $k = 0$  размером порядка  $M$  (см. рис. 23, б). Подставляя в правую часть формулы (65) разложение (46) для  $\Phi(r)$ , после несложных вычислений получаем

$$H' = g L^{-3/2} \sum_k \frac{C(k)}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k e^{ikR} + a_k^* e^{-ikR}). \quad (66)$$

Отличие от формулы (64') заключается только в присутствии множителя  $C(k)$  в каждом слагаемом. Этот множитель обрезает вклад во взаимодействие высокочастотных членов, для которых  $k \geq M$ .

Покажем, что пренебрежение вкладом высоких частот согласуется с нерелятивистским приближением. Каждое слагаемое в сумме (66) соответствует передаче определенного импульса и энергии от частицы полю и обратно. Так, член  $a_k e^{ikR}$  соответствует поглощению кванта поля с импульсом  $k$  и энергией  $\omega_k$  и передаче этого импульса и энергии частице, член  $a_k^* e^{-ikR}$  соответствует рождению кванта поля с импульсом  $k$  и энергией  $\omega_k$  и уменьшению на эти величины импульса и энергии частицы. Если  $k \geq M$ , то изменение энергии достаточно велико, так что может нарушиться закон сохранения частиц и поле может поглотить частицу или испустить вторую частицу массы  $M$ . Таким образом, нерелятивистское приближение оправдано только, если вклад высокочастотных слагаемых пренебрежимо мал, и результаты, которые дает это приближение, если они справедливы, не должны меняться при введении функции  $C(k)$ . *A fortiori*, они должны быть нечувствительны к форме этой функции. В дальнейшем мы считаем, что

$$C(k) = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq k \leq K, \\ 0 & \text{для } k > K, \end{cases} \quad (67)$$

а параметр  $K$  имеет значение порядка  $M$ .

Исследуем свойства инвариантности  $H$ . Из уравнения (65) видно, что  $H'$  инвариантен относительно сдвигов и вращений всей системы (поле + частица), поскольку легко показать, что  $H'$  коммутирует с операторами полного импульса  $P + W$  и полного момента импульса  $(R \times P) + I$  системы. Оператор  $H'$  инвариантен также относительно пространственного отражения, при котором  $\Phi(r)$  переходит в  $\Phi(-r)$  (скалярное поле). Этими же свойствами инвариантности обладают гамильтонианы  $H_n$  и (при условии, что  $V(R) = 0$ )  $H_{\text{част}}$ , а следовательно, и полный гамильтониан системы  $H$ . Если  $V(R) \neq 0$ , то  $H_{\text{част}}$  инвариантен только по отношению к вращениям и отражению и, следовательно,  $H$  инвариантен относительно вращений и отражений, но не инвариантен относительно трансляций.

Рассматриваемая квантовая система интересна в силу того, что она в простейшей форме демонстрирует основные свойства атома, взаимодействующего с электромагнитным излучением. Частица является аналогом атома, а скалярное поле — аналогом электромагнитного излучения. Основное отличие заключается в том, что кванты электромагнитного поля — фотоны →

имеют нулевую массу и спин 1, в то время как кванты исследуемого скалярного поля имеют нулевой спин и отличную от нуля массу. В оставшейся части этого раздела мы воспользуемся этой упрощенной моделью для изучения характерных свойств атома, находящегося в электромагнитном поле.

## § 10. Слабая связь и рассмотрение по теории возмущений

При достаточно малых  $g$  оператор  $H'$  можно считать малым возмущением и использовать методы, развитые в главах XVI и XVII.

Невозмущенный гамильтониан имеет вид

$$H_0 = H_n + H_{\text{част.}}$$

В теории возмущений используют представление, в котором диагонален оператор  $H_0$ . Мы будем пользоваться представлением, базисные векторы которого получаются следующим образом. Обозначим  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, \dots, |\lambda\rangle, \dots$  полный ортонормированный набор собственных векторов  $H_{\text{част.}}$ , рассматриваемого как оператор в пространстве  $\mathcal{E}_{\text{част.}}$ , и  $E_\alpha, E_\beta, \dots, E_\lambda, \dots$  — соответствующие собственные значения (расположенные в порядке возрастания). Умножая данный вектор  $|\lambda\rangle$  этого множества на вакуумный вектор  $|0\rangle$  пространства  $\mathcal{E}_n$ , получаем вектор пространства  $\mathcal{E}$ , который для упрощения записи будем также обозначать  $|\lambda\rangle$ . Ясно, что

$$H_0 |\lambda\rangle = E_\lambda |\lambda\rangle.$$

Полный ортонормированный набор собственных векторов оператора  $H_n$  в пространстве  $\mathcal{E}_n$  можно получить, последовательно действуя операторами рождения  $a_k^\dagger$  на вакуумный вектор  $|0\rangle$  (см. ур. (16)). Точно так же полный ортонормированный набор собственных векторов  $H_0$  в пространстве  $\mathcal{E}$  можно получить последовательным применением операторов рождения  $a_k^\dagger$  к каждому из определенных выше векторов  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, \dots, |\lambda\rangle, \dots$ . Так будет получен требуемый базис. Пусть  $|n\rangle$  — один из векторов этого базиса и  $E_n$  — соответствующая энергия

$$H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle.$$

В динамическом состоянии  $|n\rangle$  частица находится в определенном собственном состоянии оператора  $H_{\text{част.}}$ , а поле содержит определенное число квантов с заданными импульсами.

В дальнейшем мы будем пользоваться только векторами с небольшим числом квантов и параметризовать эти векторы будем греческой буквой, соответствующей динамическому состоянию частицы, и волновыми векторами каждого из квантов поля. Так,  $|\lambda k\rangle$  представляет состояние, которое получается

добавлением кванта с импульсом  $\mathbf{k}$  к частице в состоянии  $|\lambda\rangle$ ,  $|\lambda\mathbf{k}\rangle$  — состояние, получающееся добавлением двух квантов с импульсами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  к частице в состоянии  $\lambda$  и т. д. Отметим, что

$$\begin{aligned} H_0 |\lambda\mathbf{k}\rangle &= (E_\lambda + \omega_k) |\lambda\mathbf{k}\rangle, \\ H_0 |\lambda\mathbf{k}\mathbf{k}'\rangle &= (E_\lambda + \omega_k + \omega_{k'}) |\lambda\mathbf{k}\mathbf{k}'\rangle. \end{aligned} \quad (68)$$

Имеем также  $|\lambda\mathbf{k}\rangle = a_{\mathbf{k}}^\dagger |\lambda\rangle$  и, если  $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ ,  $|\lambda\mathbf{k}\mathbf{k}'\rangle = a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}^\dagger |\lambda\rangle$ .

Характерная спектроскопическая диаграмма нижних уровней энергии гамильтониана  $H_0$  изображена на рис. 24. В соответствии с обычными соглашениями о таких диаграммах (см.

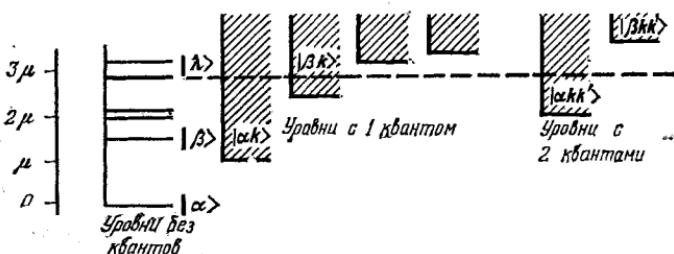


Рис. 24. Типичная схема расположения первых энергетических уровней оператора  $H_0$ .

том 1, рис. 36 и 37) высота уровней над основным состоянием равна разности их энергий и энергии основного состояния; как следствие, уровни с одинаковой энергией расположены на одной высоте. Уровни на рисунке расположены в соответствии со структурой собственных состояний. В левом столбце находятся уровни состояний без квантов. Затем идут несколько столбцов, отвечающих состояниям с одним квантами, каждый столбец соответствует определенному квантовому состоянию частицы. Первый отвечает уровням  $|\alpha\mathbf{k}\rangle$ ; когда частица находится в основном состоянии, уровни заполняют непрерывную зону (в пределе  $L \rightarrow \infty$ ), нижняя граница которой соответствует одному кванту с нулевым импульсом и, следовательно, удалена от уровня основного состояния  $|\alpha\rangle$  на расстояние  $\mu$ . Второй столбец отвечает состояниям  $|\beta\mathbf{k}\rangle$ , где частица находится в первом возбужденном состоянии, и так далее. После уровней с одним квантами следуют уровни с двумя квантами, расположенные в виде столбцов, каждый из которых соответствует определенному квантовому состоянию частицы, и так далее.

Возмущение  $H'$  связывает различные уровни. В определенном выше представлении  $H'$  задается особенно простой матрицей. Из формулы (66) видно, что оператор  $H'$  имеет отличные

от нуля матричные элементы только между базисными векторами, для которых число квантов отличается на единицу. Легко вычислить эти матричные элементы, пользуясь свойствами операторов рождения и уничтожения. Находим

$$\langle \lambda | H' | \nu k \rangle = \langle \nu k | H' | \lambda \rangle^* = (2\pi/L)^{3/2} g \frac{C(k)}{\sqrt{2\omega_k}} \langle \lambda | U(k) | \nu \rangle, \quad (69a)$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda k k' | H' | \nu k \rangle &= \langle \nu k | H' | \lambda k k' \rangle^* = \\ &= (2\pi/L)^{3/2} g \frac{C(k)}{\sqrt{2\omega_k}} \langle \lambda | U^\dagger(k') | \nu \rangle, \quad (k \neq k'). \end{aligned} \quad (69b)$$

(Если  $k = k'$ , то в последнем выражении нужно добавить множитель  $\sqrt{2}$ .) Мы использовали обозначение

$$U(k) = e^{ikR}/(2\pi)^{3/2}. \quad (70)$$

Независимо от того, насколько слабой является связь уровней, она ведет к качественному изменению спектра, поскольку большинство связанных состояний становятся неустойчивыми и частица может совершить *переходы* в состояния с меньшей энергией, излучая один или несколько квантов поля. Рассмотрим, например, изображенное на рис. 24 состояние  $|\lambda\rangle$ ; оно расположено на том же уровне, что и некоторые состояния непрерывного спектра, а именно: состояния с одним квантами  $|\alpha k\rangle$  или  $|\beta k\rangle$  и состояния с двумя квантами  $|\alpha k k'\rangle$ . Введение малого возмущения  $H'$  связывает дискретные собственные состояния и состояния с одним квантами, состояния с одним квантами и состояния с двумя квантами и т. д. Следовательно, появляется возможность «радиационных» переходов из состояния  $|\lambda\rangle$  в состояния непрерывного спектра, расположенные на том же уровне. Возможные переходы из состояния  $|\lambda\rangle$  схематически изображены на рис. 25. Остаются устойчивыми только те связанные состояния, энергия которых в сравнении с энергией основного состояния достаточно мала и излучение кванта массы  $\mu$  энергетически запрещено, т. е. состояния, энергия которых меньше  $E_\alpha + \mu$ . В примере на рис. 24 устойчивым является только основное состояние.

Появление в гамильтониане члена  $H'$  ведет также к сдвигу уровней связанных состояний. Как мы увидим, это эффект второго порядка. Тем не менее, он может влиять на устойчивость

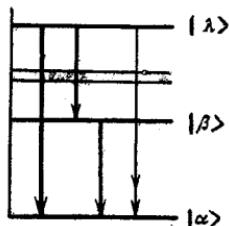


Рис. 25. Радиационные переходы с уровня  $|\lambda\rangle$ . Двойная стрелка справа соответствует переходу на основной уровень с испусканием двух квантов. Это переход более высокого порядка.

различных состояний частицы, и моды «радиационных» переходов, поскольку даже малый сдвиг уровня может оказаться достаточным, чтобы сделать энергетически возможными некоторые «радиационные» переходы, которые были запрещены, или привести к обратной ситуации.

### § 11. Сдвиги уровней

В качестве первого приложения вычислим упоминавшиеся в конце предыдущего параграфа сдвиги уровней. Эти несложные вычисления по теории возмущений познакомят нас с основными трудностями теории поля, позволяют понять физический смысл и границы применимости теории.

Рассмотрим устойчивый уровень, например, основное состояние, и вычислим порожденный членом  $H'$  сдвиг, пользуясь стационарной теорией возмущений. Для простоты будем считать уровень невырожденным. Поскольку свойства инвариантности  $H'$  и  $H_{\text{част}}$  совпадают, то рассмотрение вырожденного уровня не имеет принципиальных различий. В первом порядке сдвиг определяется формулой (XVI. 12). Из свойств  $H'$  следует, что

$$\langle \alpha | H' | \alpha \rangle = 0,$$

и вычисления необходимо проводить во втором порядке. Пусть  $\delta E_a$  — поправка к энергии второго порядка, тогда имеем (см. § XVI. 6)

$$\delta E_a = \langle \alpha | H' \frac{1}{E_a - H_0} H' | \alpha \rangle. \quad (71)$$

Вычислим это выражение, используя определенное выше представление. Из промежуточных состояний вклад будут давать только состояния, содержащие один квант. Принимая во внимание соотношения (68), (69а) и (70), последовательно получаем

$$\begin{aligned} \delta E_a &= \sum_n \langle \alpha | H' | n \rangle \frac{1}{E_a - E_n} \langle n | H' | \alpha \rangle = \\ &= \sum_v \sum_k |\langle \alpha | H' | v k \rangle|^2 / (E_a - E_v - \omega_k) = \\ &= g^2 (2\pi/L)^3 \sum_v \sum_k [(C^2(k)/2\omega_k) |\langle \alpha | U_k | v \rangle|^2 / (E_a - E_v - \omega_k)]. \end{aligned}$$

Заменяя суммирование по  $k$  интегрированием согласно правилам, описанным в § 6, и используя обрезающую функцию (67), имеем

$$\delta E_a = -g^2 \int_{k \leq K} dk \sum_v \frac{|\langle \alpha | U(k) | v \rangle|^2}{2\omega(\omega + E_v - E_a)}. \quad (72)$$

Отметим, что

$$\delta E_a < 0.$$

Действительно, все слагаемые в правой части формулы (72) неотрицательны, так как речь идет об основном состоянии и  $(\omega + E_v - E_a) > 0$  для любого  $v$ .

Чтобы получить оценку сверху для  $|\delta E_a|$ , можно заменить величину  $E_v - E_a$  в знаменателе ее минимальным значением, т. е. нулем. Тогда суммирование по  $v$  легко выполнить, используя соотношение полноты  $\sum_v |v\rangle \langle v| = 1$ . Поскольку  $UU^\dagger = (2\pi)^{-3}$ , сумма равна  $(2\pi)^{-3}/2\omega^2$  и после интегрирования по углам имеем

$$|\delta E_a| < (g^2/4\pi^2) \int_0^K (k^2/\omega^2) dk. \quad (73)$$

Интеграл в неравенстве (73) можно легко вычислить, и так как  $K \gg \mu$ , он лишь незначительно меньше  $K$ . Следовательно,

$$|\delta E_a| < g^2 K / 4\pi^2. \quad (74)$$

Более точную оценку правой части формулы (72) можно получить следующим образом. Если воспользоваться соотношением полноты и заменить  $U(k)$  согласно формуле (70), то получим

$$\delta E_a = -\frac{g^2}{8\pi^3} \int_{k \leq K} \langle a | e^{ikR} (\omega + H_{\text{част}} - E_a)^{-1} e^{-ikR} | a \rangle \frac{dk}{2\omega}. \quad (75)$$

Унитарный оператор  $\exp(ikR)$  коммутирует с  $R$  и преобразует оператор  $P$  в  $(P - k)$ . Следовательно,

$$e^{ikR} H_{\text{част}} e^{-ikR} = \frac{(P - k)^2}{2M} + V(R) = H_{\text{част}} + \frac{k^2}{2M} - \frac{Pk}{M}$$

и

$$e^{ikR} (\omega + H_{\text{част}} - E_a)^{-1} e^{-ikR} = \left( \omega + \frac{k^2}{2M} + H_{\text{част}} - E_a - \frac{Pk}{M} \right)^{-1}.$$

Подставляя это выражение в правую часть формулы (75), находим

$$\delta E_a = -\frac{g^2}{8\pi^3} \int_{k \leq K} \langle a | \left( \omega + \frac{k^2}{2M} + H_{\text{част}} - E_a - \frac{Pk}{M} \right)^{-1} | a \rangle \frac{dk}{2\omega}.$$

Членом  $Pk/M$  в правой части можно пренебречь, поскольку среднее значение скорости частицы  $P/M$  в состоянии  $|a\rangle$  много меньше 1 (нерелятивистское приближение). В этом приближении после интегрирования по углам получаем

$$\delta E_a \approx -\frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^K \frac{k^2}{\omega^2} (1 + (k^2/2M\omega))^{-1} dk \quad (76)$$

выражение, которое отличается от правой части неравенства (73) только множителем  $(1 + (k^2/2M\omega))^{-1}$  под знаком интеграла. Поскольку  $\mu \ll K \approx M$ , значение этого множителя меняется от 1 до 2/3 на промежутке интегрирования, и мы можем написать

$$\delta E_a = -sg^2K/4\pi^2, \quad (s \leq 1). \quad (77)$$

Фигурирующая в этой формуле константа  $s$  имеет значение между 2/3 и 1.

Для оценки этого эффекта вычислим порядок его величины в случае, когда различные параметры модели имеют численные значения того же порядка, что и встречающиеся в атомах<sup>1)</sup>. Так,  $M$  равна массе электрона,  $g^2$  — постоянная тонкой структуры

$$g^2 \approx 10^{-1}. \quad (78)$$

Пусть  $D/M$  — расстояние от рассматриваемого уровня до ближайшего соседнего уровня

$$D/M \approx 10^{-4} - 10^{-5}. \quad (79)$$

С данными числами

$$|\delta E_a/D| \approx g^2 M/4\pi^2 D \approx 100.$$

Таким образом, это очень сильный эффект, значительно превосходящий сдвиги, наблюдаемые экспериментально. Естественно, возникает вопрос о справедливости рассмотрения по теории возмущений и физическом смысле результата.

Однако разумное сравнение теории и эксперимента должно учитывать следующее. Масса  $M$ , которая фигурирует в вычислениях невозмущенных уровней, не есть экспериментально наблюдаемая масса. Последняя получается на основании измерений энергии и импульса «свободной» частицы, т. е. частицы вне потенциала  $V(R)$ . Такая «свободная» частица, тем не менее, взаимодействует с полем и, следовательно, измерение дает:  $M_{\text{эксп}} = M + \delta M$ , где  $\delta M$  представляет собой вклад в энергию покоя «свободной» частицы, порожденной наличием поля. В данном случае несложные вычисления дают  $\delta M \approx -g^2 K/4\pi^2$ . Точнее, вычисление  $\delta M$  во втором порядке по теории возмущений приводит к правой части формулы (76) (задача 2). Следова-

<sup>1)</sup> В силу того, что вид взаимодействия в данном случае отличается от случая атома и электромагнитного поля, численные результаты скалярной теории не могут точно согласовываться с результатами квантовой теории излучения. Для того чтобы сравнивать соответствующие величины, константу  $g^2$  фиксируют так, что значение вероятности дипольного перехода получается величиной того же порядка, что и вероятность дипольных переходов в атомах (см. (81) и (245)), т. е.  $g^2/4\pi \approx 1/137$ .

тельно, сдвиг  $\delta E_a$  почти полностью вызван «перенормировкой» массы<sup>1)</sup>.

В вычислениях уровней атома водорода в теории Шредингера или Дирака фигурирует экспериментальная масса электрона. Таким образом, учитывается основная часть взаимодействия электрона с полем излучения, что объясняет замечательное согласие вычисленного спектра с наблюдаемым.

«Экспериментально наблюдаемый сдвиг»  $\delta E'_a$  равен разности между вычисленным сдвигом  $\delta E_a$  и сдвигом, порожденным заменой теоретического значения массы на экспериментальное («перенормированная» масса) в гамильтониане частицы. Для нашей модели подстановка «перенормированной» массы ведет к замене  $H_{\text{част}}$  на

$$\delta M + \frac{\mathbf{P}^2}{2(M + \delta M)} + V(R)$$

и к сдвигу всех уровней на величину  $\delta M$ . Тем самым, имеем

$$\delta E_a^{(0)} = \delta M \left( 1 - \langle \alpha | \frac{\mathbf{P}^2}{2M^2} | \alpha \rangle \right).$$

Если ограничиться вторым порядком теории возмущений, то вычисление  $\delta E'_a = \delta E_a - \delta E_a^{(0)}$  не представляет серьезных затруднений, и для  $|\delta E'_a/D|$  получается значение порядка  $10^{-3}$ , что является разумным по порядку величины.

Тем не менее, к полученному значению  $\delta E'_a$  следует относиться с осторожностью, поскольку оно очень чувствительно к выбору обрезающей функции. Реалистические вычисления должны основываться на полностью релятивистской теории. В действительности мы встречаемся здесь с трудной проблемой квантовой теории поля, которая в настоящее время не имеет удовлетворительного решения. Взаимодействие в релятивистской теории является локальным, и для  $\delta M$  получается выражение вида:  $\delta M = ZM$ , где  $Z$  представляется расходящимся интегралом (см. предыдущую сноску). Точно так же  $\delta E_a$  и  $\delta E_a^{(0)}$  представляются расходящимися интегралами, так что выражение для  $\delta E'_a$  является неопределенностью типа  $\infty - \infty$ .

Несмотря на упомянутые ограничения, мы продолжим исследование нашей упрощенной модели, которая корректно описывает большое количество экспериментальных фактов. Такие эффекты как «перенормировка» массы, удовлетворительное рассмотрение которых возможно только в рамках ковариантного формализма, мы оставляем в стороне.

<sup>1)</sup> Считая  $K \approx M$ , получаем  $\delta M/M \approx 10^{-3}$ . Следовательно, относительное изменение массы мало, что оправдывает *a posteriori* использование теории возмущений. Однако если не вводить обрезающей функции, то  $\delta M$  выражается расходящимся интегралом. К этому вопросу мы еще вернемся.

## § 12. Излучение квантов

Вернемся к рассмотрению состояний частицы, которые являются нестабильными в силу взаимодействия  $H'$ .

В этом параграфе мы вычислим вероятности перехода в единицу времени для различных «радиационных переходов», пользуясь нестационарной теорией возмущений (§ XVII. 4).

Предположим для определенности, что спектр оператора  $H'$  совпадает со спектром, изображенным на рис. 24, и рассмотрим состояние  $|\lambda\rangle$ . Из этого состояния энергетически возможны только переходы в основное состояние с излучением одного или двух квантов ( $3\mu > E_\lambda - E_\alpha > 2\mu$ ) и переходы в первое возбужденное состояние с излучением одного кванта ( $2\mu > E_\lambda - E_\beta > \mu$ ). Ниже мы будем рассматривать только переходы с излучением одного кванта. Испускание двух квантов представляет собой процесс высшего порядка и при прочих равных условиях происходит в  $g^2$  раз реже, чем испускание одного кванта. Поэтому, интересуясь только первым порядком теории возмущений, мы такие процессы рассматривать не будем.

Пусть частица первоначально находится в состоянии  $|\lambda\rangle$ . Тогда вероятность в единицу времени перехода частицы в состояние  $|\alpha\rangle$  с излучением кванта в телесный угол  $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ , т. е. вероятность в единицу времени перехода  $\lambda \rightarrow \alpha k$ , где  $k$  — вектор в данном телесном угле, в первом порядке дается выражением (см. ур. (XVII. 50))

$$w_{\lambda \rightarrow \alpha k} d\Omega = 2\pi |\langle \lambda | H' | \alpha k \rangle|^2 \rho_L(\omega) d\Omega, \quad (80)$$

в котором энергия кванта  $\omega$  вычисляется из закона сохранения

$$\omega = \omega_{\lambda\alpha} \equiv E_\lambda - E_\alpha.$$

Принимая во внимание соотношения (49), (69a) и (70), из формулы (80) получаем

$$w_{\lambda \rightarrow \alpha k} = 2\pi g^2 \frac{|\langle \lambda | e^{ikR} | \alpha \rangle|^2}{2\omega} \frac{\omega k}{(2\pi)^3} = \frac{g^2 k}{8\pi^2} |\langle \lambda | e^{ikR} | \alpha \rangle|^2. \quad (81)$$

Интегрируя по углам, получаем вероятность перехода в единицу времени из состояния  $\lambda$  в  $\alpha$ , которую мы обозначим  $\Gamma_{\lambda \rightarrow \alpha}$ :

$$\Gamma_{\lambda \rightarrow \alpha} = \int w_{\lambda \rightarrow \alpha} d\Omega = \frac{g^2 k}{8\pi^2} \int |\langle \lambda | e^{ikR} | \alpha \rangle|^2 d\Omega. \quad (82)$$

Аналогичные выражения можно получить для переходов в состояние  $\beta$ . Полная вероятность перехода в единицу времени  $\Gamma_\lambda$  равна

$$\Gamma_\lambda = \Gamma_{\lambda \rightarrow \alpha} + \Gamma_{\lambda \rightarrow \beta}. \quad (83)$$

Величина  $\Gamma_\lambda$  обратна времени жизни состояния  $|\lambda\rangle$ , что можно увидеть из следующих полуклассических рассуждений. Рассмотрим статистический ансамбль частиц и обозначим  $N_\lambda(t)$  число частиц в состоянии  $|\lambda\rangle$  в момент времени  $t$ . Число частиц, участвующих в радиационном переходе в интервале времени  $(t, t + dt)$ , равно  $\Gamma_\lambda N_\lambda(t) dt$ . Следовательно,

$$N_\lambda(t + dt) = (1 - \Gamma_\lambda dt) N_\lambda(t)$$

или

$$\frac{dN_\lambda}{dt} = -\Gamma_\lambda N_\lambda$$

и

$$N_\lambda(t) = N_\lambda(0) \exp(-\Gamma_\lambda t). \quad (84)$$

Это хорошо известный экспоненциальный закон распада, и время жизни равно  $1/\Gamma_\lambda$ . В рассмотренном нами случае имеется две моды распада,  $\lambda \rightarrow \alpha$  и  $\lambda \rightarrow \beta$ , и отношение первой ко второй равно  $\Gamma_{\lambda \rightarrow \alpha}/\Gamma_{\lambda \rightarrow \beta}$ .

Ясно, что приведенные полуклассические рассуждения не могут считаться доказательством экспоненциального закона, поскольку вычисление вероятностей перехода по теории возмущений оправдано только для  $\Gamma_\lambda t \ll 1$  (см. обсуждение в конце § XVII. 4), т. е. для достаточно малых  $t$ , пока вектор состояния мало отличается от начального. Для больших времен требуется более глубокий анализ, который будет проделан в § 13.

Чтобы определить  $\Gamma$  по порядку величины, вернемся к обозначениям и численным данным § 11. Для не слишком больших энергий возбуждения имеем  $k \approx D$  и, поскольку размеры  $\langle R \rangle$  области, где сосредоточена волновая функция, порядка  $(2MD)^{-1/2}$ , получаем

$$k \langle R \rangle \approx (D/2M)^{1/2} \approx 5 \cdot 10^{-3} \ll 1.$$

Величину  $|\langle \lambda | e^{ikR} | \alpha \rangle|$  можно оценить, заменив экспоненту первым членом ряда Тейлора, который дает отличный от нуля вклад (длинноволновое приближение); порядок этого члена определяется в основном правилами отбора по моменту импульса. В наиболее благоприятной ситуации (дипольные переходы) имеем

$$|\langle \lambda | e^{ikR} | \alpha \rangle| \approx |\langle \lambda | kR | \alpha \rangle| \approx k \langle R \rangle,$$

откуда

$$\Gamma_{\lambda \rightarrow \alpha} \approx \frac{g^2 k}{2\pi} (k \langle R \rangle)^2 \approx 10^{-6} D.$$

Если взять это же значение для величины  $\Gamma_\lambda$ , то получим время жизни  $1/\Gamma_\lambda$ , значительно превосходящее (в  $10^6$  раз) характерный период  $1/D$  движения частицы во внешнем потенциале. Следовательно, разумно рассматривать, что и было сделано выше, взаимодействие  $H'$ , которое ответственно за излучение кванта, как малое возмущение.

Можно получить формально очень простое и общее выражение для  $\Gamma_\lambda$ , исходя непосредственно из формулы (80) и ис-

пользуя определение плотности уровней, закон сохранения энергии и соотношение полноты. Последовательно имеем<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned}\Gamma_\lambda &= 2\pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \sum_v \int dk |\langle \lambda | H' | v k \rangle|^2 \delta(E_\lambda - E_v - \omega) = \\ &= 2\pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \sum_v \int dk \langle \lambda | H' \delta(E_\lambda - H_v) | v k \rangle \langle v k | H' | \lambda \rangle = \\ &= 2\pi \langle \lambda | H' \delta(E_\lambda - H_0) H' | \lambda \rangle.\end{aligned}\quad (85)$$

Полученное выражение будет использоваться в дальнейшем.

### § 13. Квантовая теория распадающихся состояний. Ширина линии

В этом параграфе мы используем квантовую теорию для анализа точной зависимости от времени распадающихся квазистационарных состояний. Мы покажем, что результаты, которые были получены в § 12 с помощью упрощенных рассуждений, в существенном не меняются, и, в частности, распад с очень хорошим приближением имеет экспоненциальный характер. Будут введены также такие важные понятия, как сдвиг уровня и ширина линии.

Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  система находилась в связанном состоянии, отвечающем собственному значению  $E_\lambda$  гамильтониана  $H_0$ , и рассмотрим изменение этого состояния с течением времени.

До сих пор мы считали собственное значение  $E_\lambda$  невырожденным. Это упрощение потребуется нам при обсуждении результатов, однако приводимые ниже рассуждения применимы также и к случаю вырожденного собственного значения. Обозначим  $\mathcal{E}_\lambda$  подпространство, натянутое на векторы, которые описывают связанные состояния, отвечающие собственному значению  $E_\lambda$ . Пусть  $P_\lambda$  и  $Q_\lambda$  — проекторы на  $\mathcal{E}_\lambda$  и его ортогональное дополнение соответственно

$$H_0 P_\lambda = P_\lambda H_0 = E_\lambda P_\lambda, \quad P_\lambda + Q_\lambda = 1.$$

Оператор эволюции, как обычно, имеет вид

$$U(t) = e^{-iHt}, \quad (86)$$

<sup>1)</sup> Выражение (85) возникает во многих задачах. Оно представляет собой общее выражение для вероятности перехода в единицу времени в первом порядке теории возмущений и его можно вывести согласно общей теореме § XVII. 4 из формулы (XVII. 40), используя для фигурирующей в этой формуле функции  $f$  асимптотический вид (XVII. 43).

и наша задача состоит в вычислении для  $t > 0$  величины  $P_\lambda U(t) P_\lambda$ .

Введем резольвенту оператора  $H$

$$G(z) = \frac{1}{z - H}, \quad (87)$$

сингулярности которой как функции комплексной переменной  $z$  совпадают со спектром  $H$  (дискретному спектру соответствуют полюса, а непрерывному спектру — разрез). Справедливо равенство<sup>1)</sup>

$$U(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} [G(x^+) - G(x^-)] dx, \quad (x^\pm \equiv x \pm ie). \quad (88)$$

Операторы  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{G}$ , определенные в пространстве  $\mathcal{E}_\lambda$  соотношениями

$$\mathcal{U}(t) = P_\lambda U(t) P_\lambda, \quad \mathcal{G}(z) = P_\lambda G(z) P_\lambda, \quad (90)$$

связаны по формуле

$$\mathcal{U}(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} [\mathcal{G}(x^+) - \mathcal{G}(x^-)] dx, \quad (x^\pm \equiv x \pm ie). \quad (91)$$

Чтобы получить удобное для работы выражение для  $\mathcal{G}(z)$ , воспользуемся соотношениями:

$$H = H_1 + H'',$$

$$H_1 \equiv P_\lambda H P_\lambda + Q_\lambda H Q_\lambda = H_0 + Q_\lambda H' Q_\lambda,$$

$$H'' \equiv P_\lambda H Q_\lambda + Q_\lambda H P_\lambda = P_\lambda H' Q_\lambda + Q_\lambda H' P_\lambda.$$

<sup>1)</sup> Соотношение (88) непосредственно следует из формулы \*)

$$G(x^\pm) = \frac{1}{x - H \pm ie} = v. P. \frac{1}{x - H} \mp i\pi\delta(x - H), \quad (89)$$

которая справедлива для бесконечно малого положительного  $e$  (см. ур. (A.15д)). Отметим, что при  $t > 0$  вклад  $G(x^-)$  в интеграл в правой части соотношения (88) равен нулю. Более общие формулы, связывающие  $U(t)$  и  $G(z)$ , имеют вид

$$G(z) = -i \int_0^{+\infty} e^{itz} U(t) dt, \quad U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-itz} G(z) dz,$$

где  $\eta$  — знак  $\text{Im } z$ ,  $C$  — контур в комплексной плоскости  $z$ , идущей из  $\infty + ie$  в  $\infty - ie$ , по отношению к которому спектр  $H$  лежит слева. Эти формулы легко вывести в представлении, где оператор  $H$  диагонален.

\*) Символ  $v. P.$  означает, что интеграл с этим ядром понимается в смысле главного значения. (Прим. перев.)

Заметим, что

$$\begin{aligned} H_1 P_\lambda &= P_\lambda H_1 = E_\lambda P_\lambda, \quad [Q_\lambda, H_1] = 0, \\ P_\lambda H'' &= H'' Q_\lambda, \quad Q_\lambda H'' = H'' P_\lambda. \end{aligned}$$

Из этих соотношений и операторного тождества

$$(A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(A - B)^{-1}$$

следуют равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - H} &= \frac{1}{z - H_1} + \frac{1}{z - H_1} H'' \frac{1}{z - H} = \\ &= \frac{1}{z - H_1} + \frac{1}{z - H_1} H'' \frac{1}{z - H_1} + \frac{1}{z - H_1} H'' \frac{1}{z - H_1} H'' \frac{1}{z - H} \end{aligned} \quad (93)$$

$$P_\lambda \frac{1}{z - H} P_\lambda = \frac{P_\lambda}{z - E_\lambda} + \frac{1}{z - E_\lambda} \left( P_\lambda H'' \frac{1}{z - H_1} H'' P_\lambda \right) P_\lambda \frac{1}{z - H} P_\lambda \quad (94)$$

Формула (94) представляет собой соотношение между операторами, действующими в пространстве  $\mathcal{E}_\lambda$ , а именно

$$\mathcal{G}(z) = \frac{1}{z - E_\lambda} [1 + \mathcal{W}(z) \mathcal{G}(z)], \quad (95)$$

где

$$\mathcal{W}(z) = P_\lambda H'' \frac{1}{z - H_1} H'' P_\lambda = P_\lambda H' Q_\lambda \frac{1}{z - Q_\lambda H Q_\lambda} Q_\lambda H' P_\lambda. \quad (96)$$

Из уравнения (95) получаем

$$\mathcal{G}(z) = \frac{1}{z - E_\lambda - \mathcal{W}(z)}. \quad (97)$$

Выражения (96), (97) и (91) представляют собой точные соотношения, которые могут служить основой для вычисления  $\mathcal{U}(t)$ .

Формулы (96) и (97) определяют  $\mathcal{W}(z)$  и  $\mathcal{G}(z)$  как функции комплексной переменной  $z$  в плоскости с разрезом вдоль непрерывного спектра  $H$ . Нас будет интересовать поведение этих функций в окрестности разреза. Используя соотношение (89), выпишем отдельно эрмитову и антиэрмитову части  $\mathcal{W}(x^\pm)$ , т. е.

$$\mathcal{W}(x^\pm) = \Delta(x) \mp \frac{1}{2} i\Gamma(x), \quad (98)$$

$$\Delta(x) = P_\lambda H' v. P \cdot \frac{1}{x - Q_\lambda H Q_\lambda} H' P_\lambda, \quad (99)$$

$$\Gamma(x) = 2\pi P_\lambda H' \delta(x - Q_\lambda H Q_\lambda) H' P_\lambda. \quad (100)$$

Отметим, что  $\Gamma(x)$  — положительно определенный эрмитов оператор.

В дальнейшем будем предполагать, что собственное значение  $E_\lambda$  оператора  $H_0$  невырождено<sup>1)</sup>.

По предположению система в начальный момент времени  $t = 0$  находилась в состоянии  $|\lambda\rangle$ . Требуется определить состояние системы в момент времени  $t$

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)|\lambda\rangle \quad (101)$$

и, в частности, проекцию этого состояния на вектор  $|\lambda\rangle$ .

Всюду ниже операторы  $\mathcal{U}(t)$ ,  $\mathcal{G}(z)$ ,  $\mathcal{W}(z)$ ,  $\Delta(x)$  и  $\Gamma(x)$  можно заменить их средними значениями по состоянию  $|\lambda\rangle$  и рассматривать как числовые функции своих аргументов. Определения (90), (99) и (100) перейдут в

$$\mathcal{U}(t) \equiv \langle \lambda | U(t) | \lambda \rangle, \quad \mathcal{G}(z) \equiv \langle \lambda | G(z) | \lambda \rangle, \quad (102)$$

$$\Delta(x) \equiv \langle \lambda | H' v. P. \left( \frac{1}{x - Q_\lambda H Q_\lambda} \right) H' | \lambda \rangle, \quad (103)$$

$$\Gamma(x) \equiv 2\pi \langle \lambda | H' \delta(x - Q_\lambda H Q_\lambda) H' | \lambda \rangle, \quad (104)$$

а из уравнений (97) и (91) получаем

$$\mathcal{G}(x^\pm) = \left[ x - E_\lambda - \Delta(x) \pm \frac{1}{2} i \Gamma(x) \right]^{-1}, \quad (105)$$

$$\mathcal{U}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} F(x) dx, \quad (106)$$

где

$$F(x) \equiv i(\mathcal{G}(x^+) - \mathcal{G}(x^-)) = \frac{\Gamma(x)}{(x - E_\lambda - \Delta(x))^2 + \frac{1}{4} \Gamma(x)^2}. \quad (107)$$

<sup>1)</sup> В большинстве случаев вырождение  $E_\lambda$  связано с симметрией  $H_0$ , которая не нарушается при добавлении взаимодействия  $H'$ . Например, при радиоактивном распаде ядра со спином  $J$  вырождение кратности  $2J+1$  связано с инвариантностью относительно вращений, которая сохраняется при включении взаимодействия, ответственного за распад. Поскольку в этом случае  $\mathcal{E}_\lambda$  — не-приводимое подпространство, а операторы  $\mathcal{W}(z)$ ,  $\mathcal{G}(z)$  и  $\mathcal{U}(t)$  инвариантны, то эти операторы в пространстве  $\mathcal{E}_\lambda$  пропорциональны единичному оператору и их вычисление проводится точно так же, как и в невырожденном случае. Все состояния из  $\mathcal{E}_\lambda$  описывают один и тот же закон радиоактивного распада с определенным временем жизни и сдвигом уровня.

С другой стороны, если эти условия симметрии не выполняются, то могут возникнуть несколько времен жизни и несколько сдвигов. Эта ситуация имеет место для первого возбужденного уровня атома водорода (см. обсуждение лэмбовского сдвига в конце § XX. 27). В качестве другого примера укажем  $K^0$ -мезон. Рассмотрение общего случая по существу можно провести аналогично. Воспользовавшись тем же приближением для  $\mathcal{U}(t)$ , получаем

$$\mathcal{U}(t) \approx \exp[-i(E_\lambda + \mathcal{W}(E_\lambda^+))t],$$

что является обобщением выражения (109). вещественная и мнимая части собственных значений неэрмитова оператора  $\mathcal{W}(E_\lambda^+)$  определяют сдвиги и соответствующие времена жизни.

До сих пор мы не пользовались какими-либо приближениями. Для вычисления  $F(x)$  и  $\mathcal{U}(t)$  будем предполагать взаимодействие слабым и в выражениях (103) и (104) оставим только члены младшего порядка по  $H'$ . Это сводится к замене  $Q_\lambda H Q_\lambda$

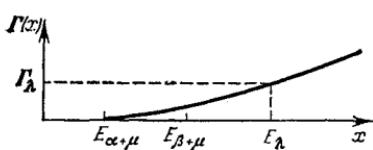


Рис. 26. Общий вид функции  $\Gamma(x)$ . Заметим, что  $\Gamma(x) = 0$  при  $x < E_\alpha + \mu$ .

на  $H_0$ , после чего величины  $\Delta(x)$  и  $\Gamma(x)$  легко вычисляются. Форма  $\Gamma(x)$  приведена на рис. 26. При достаточно малых  $\Delta(x)$  и  $\Gamma(x)$  функция  $F(x)$  имеет четко выраженный максимум около точки  $x = E_\lambda$ , наибольший вклад в интеграл (106) дает окрестность этой точки. Следовательно, можно оценить этот интеграл, подставляя вместо медленно меняющихся функций  $\Delta(x)$  и  $\Gamma(x)$  их значения в точке  $x = E_\lambda$

$$\Delta(E_\lambda) \equiv \delta E_\lambda, \quad \Gamma(E_\lambda) \equiv \Gamma_\lambda, \quad (108)$$

что сводится к замене функции  $F(x)$  (см. рис. 27) на функцию

$$F_1(x) = \frac{\Gamma_\lambda}{(x - E_\lambda - \delta E_\lambda)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_\lambda^2}.$$

На рис. 27 для функций  $\Delta$  и  $\Gamma$  использовалась зависимость от  $x$ , типичная для дипольных переходов

$$\Delta(x) \approx \text{const} = \delta E_\lambda, \quad \frac{\Gamma(x)}{\Gamma_\lambda} \approx \frac{(x - E_\lambda + \xi)^3}{\xi^3} \quad (\xi = E_\lambda - E_\alpha - \mu)$$

и следующие значения  $\delta E_\lambda/\xi = 0,2$ ,  $\Gamma_\lambda/\xi = 0,1$ .

Ошибка при вычислении  $\mathcal{U}(t)$  не превосходит величины

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - F_1(x)| dx.$$

При  $\Gamma_\lambda$  и  $\delta E_\lambda$  достаточно малых по сравнению с  $E_\lambda - E_\alpha - \mu$  и  $E_\lambda - E_\beta - \mu$  вне области больших времен ( $t \gg 1/\Gamma_\lambda$ ) эта величина пренебрежимо мала относительно  $\mathcal{U}(t)$ .

После упомянутой выше замены интегрирование проводится несложно и дает в результате

$$\mathcal{U}(t) \approx \exp \left[ -i(E_\lambda + \delta E_\lambda)t - \frac{1}{2} \Gamma_\lambda t^2 \right]. \quad (109)$$

Следовательно,

$$|\mathcal{U}(t)|^2 = e^{-\Gamma_\lambda t}, \quad (110)$$

и мы получили экспоненциальный закон распада<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Более строгое рассмотрение приводит к наличию дополнительных неэкспоненциальных членов в законе распада. Из работы: Н. С. Крылов, В. А. Фок. ЖЭТФ 17, 93 (1947) — следует, что амплитуда распада полностью определяется энергетическим спектром начального состояния. (Прим. перев.)

Величина  $1/\Gamma_\lambda$  — время жизни — была сосчитана нами в § 12 (см. ур. (84), (85), (104) и (108)).

Как видно из формулы (109), взаимодействие  $H'$  привело к изменению временной зависимости для уровня  $\lambda$ , а именно,

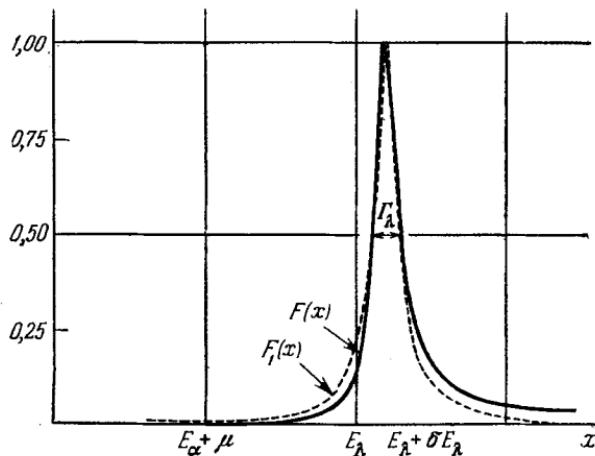


Рис. 27. Характерный вид функций  $F(x)$  и  $F_1(x)$ . Функции  $\Delta$  и  $\Gamma$  имеют энергетическую зависимость, типичную для дипольных переходов:

$$\Delta(E_\lambda + x) \approx \text{const} = \delta E_\lambda, \quad \frac{\Gamma(E_\lambda + x)}{\Gamma_\lambda} = \frac{(x + \xi)^3}{\xi^3}.$$

На рисунке  $\delta E_\lambda/\xi = 0,2$  и  $\Gamma_\lambda/\xi = 0,1$ .

в показателе экспоненты к  $E_\lambda$  добавилась комплексная энергия

$$\delta E_\lambda - \frac{1}{2} i \Gamma_\lambda.$$

Вещественная часть  $\delta E_\lambda$  представляет собственно *сдвиг уровня*, и формула для нее аналогична формуле для сдвига уровня стационарного состояния (см. ур. (71), (103) и (108)). Характеризующая квазистационарное состояние мнимая часть равна, с точностью до знака, полуширине уровня и отвечает за экспоненциальный характер закона распада.

Вычислим другие компоненты состояния  $|\Psi(t)\rangle$  в приближении слабой связи, когда отличны от нуля только проекции на состояния, содержащие один и только один квант

$$|\Psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t)|\lambda\rangle + \sum_{vk} h_{vk}(t)|vk\rangle, \quad (111)$$

$$h_{vk}(t) = \langle vk | U(t) | \lambda \rangle. \quad (112)$$

Учитывая уравнения (92), имеем

$$\langle vk | G(z) | \lambda \rangle = \langle vk | (z - H_1)^{-1} H'' | \lambda \rangle \mathcal{G}(z).$$

Это точное уравнение. Приближение слабой связи состоит в замене  $H_1$  на  $H_0$  в знаменателе, что дает

$$\langle v\mathbf{k} | G(z) | \lambda \rangle = \langle v\mathbf{k} | H' | \lambda \rangle (z - \omega - E_v)^{-1} \mathcal{G}(z).$$

Зная приближенное значение матричного элемента  $G(z)$ , получаем приближенное значение соответствующего матричного элемента  $U(t)$ . Для этого используется формула (88), интеграл в которой можно взять по вычетам. Для достаточно больших  $t$  главный вклад дает полюс на вещественной оси, и мы имеем

$$h_{v\mathbf{k}}(t) \approx \langle v\mathbf{k} | H' | \lambda \rangle \left. \frac{e^{-ixt}}{x - E_\lambda - \Delta(x) + \frac{1}{2}i\Gamma(x)} \right|_{x=\omega+E_v} \quad (\Gamma t \gg 1).$$

Квадрат модуля этого выражения равен вероятности обнаружить систему в состоянии  $(v\mathbf{k})$  при больших по сравнению с временем жизни значениях времен  $t$ . Квадрат модуля можно записать в виде

$$|h_{v\mathbf{k}}(\infty)|^2 = |\langle v\mathbf{k} | H' | \lambda \rangle|^2 \frac{F(\omega + E_v)}{\Gamma(\omega + E_v)}, \quad (113)$$

где функция  $F(x)$  определена формулой (107). Квадрат модуля  $|h_{v\mathbf{k}}(\infty)|^2$ , в силу указанных выше свойств функции  $F(x)$  (см. рис. 27), близок к нулю вне окрестности точки  $\omega + E_v \approx E_\lambda$ , т. е. наблюдаемые переходы в основном сохраняют невозмущенную энергию. Для таких переходов — в рассматриваемом здесь примере это переходы с  $v = \alpha$  и  $v = \beta$  — мы можем заменить  $F(x)$  на  $F_1(x)$ . Таким образом, для переходов  $\lambda \rightarrow \alpha\mathbf{k}$  мы получаем формулу

$$|h_{\alpha\mathbf{k}}(\infty)|^2 = \frac{|\langle \alpha\mathbf{k} | H' | \lambda \rangle|^2}{(\omega + E_\alpha - E_\lambda - \delta E_\lambda)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_\lambda^2}. \quad (114)$$

Следовательно, распределение энергии квантов, испущенных в этом переходе, подчиняется закону Лоренца с шириной  $\Gamma_\lambda$  центром в точке  $E_\lambda + \delta E_\lambda - E_\alpha$ , т. е. положение максимума распределения совпадает с боровской частотой перехода при учете сдвига  $\delta E_\lambda$ .

Таким образом, ширина линии испущенных в радиационном переходе квантов равна величине, обратной к времени жизни (в системе единиц, где  $\hbar = 1$ ), в соответствии с соотношением неопределенности энергия — время.

Необходимо сделать несколько замечаний о применимости полученных результатов.

Прежде всего при сравнении закона распределения (114) с данными опыта необходимо указать, как можно эксперимен-

тально приготовить состояние  $|\lambda\rangle$ . Мы вернемся к этому вопросу в § 15.

Кроме этого, приведенное рассмотрение имеет довольно существенные ограничения. Если воспользоваться численными результатами § 11, то мы увидим, что  $\delta E_\lambda$  является величиной того же порядка, что и  $\delta E_a$ , и, следовательно, значительно пре-восходит расстояние между уровнями. Однако если обозначить  $\delta E_\lambda^{(0)}$  вклад, связанный с перенормировкой массы, то можно по-казать, что разность

$$\delta E'_\lambda \equiv \delta E_\lambda - \delta E_\lambda^{(0)}$$

является малой поправкой по сравнению с расстоянием между уровнями. Это затруднение в точности совпадает с тем, которое обсуждалось в § 11, и приведенные там рассуждения можно дословно повторить здесь.

Наконец, и это, очевидно, связано с приближением слабого взаимодействия при вычислении амплитуд  $h_{vk}$ , мы не учитывали сдвиги уровней, на которые происходит переход, и *a fortiori* тот факт, что некоторые из этих уровней из-за взаимодействия  $H'$  сами могут стать квазистационарными.

Для переходов на стационарные уровни или на уровни, время жизни которых больше времени жизни начального состояния, формула (114) корректна при учете упомянутых выше эффектов. Если обозначить  $E_a^{(0)}, \dots, E_\lambda^{(0)}, \dots$  уровни, которые получаются при замене в гамильтониане  $H_{\text{част}}$  параметра  $M$  на экспериментально наблюдаемое значение массы, то корректная формула запишется в виде

$$|h_{vk}|_{\text{korr}}^2 = \frac{|\langle a\vec{k} | H' | \lambda \rangle|^2}{(\omega + E_a^{(0)} + \delta E'_a - E_\lambda^{(0)} - \delta E'_\lambda)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_\lambda^2}. \quad (114')$$

Результаты, вычисленные по этой формуле, находятся в отличном согласии с экспериментальными данными.

## § 14. Упругое рассеяние. Дисперсионная формула

В заключение этого раздела рассмотрим несколько простых задач о столкновении.

Первой задачей будет вычисление сечения упругого рассеяния кванта поля на частице, находящейся в основном состоянии. Пусть  $\vec{k}_i$  — волновой вектор налетающего кванта, а  $\vec{k}_f$  — вектор той же длины, указывающий направление, в котором квант наблюдается после столкновения. Таким образом, нас интересует процесс

$$i \rightarrow f \equiv (\alpha \vec{k}_i) \rightarrow (\alpha \vec{k}_f).$$

Положим

$$k_i = k_f = k, \quad \omega_i = \omega_f = \omega,$$

и обозначим  $E$  начальную энергию системы

$$E = \omega + E_a. \quad (115)$$

Общая формула для сечения имеет вид

$$\frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\text{падающий поток}} |T_{i \rightarrow f}|^2 \rho_f(E), \quad (116)$$

где  $T_{i \rightarrow f}$  — амплитуда перехода

$$T_{i \rightarrow f} \equiv \langle f | T | i \rangle = \langle \alpha k_f | T | \alpha k_i \rangle, \quad (117)$$

$$T = H' + H' \frac{1}{E - H + i\epsilon} H'. \quad (118)$$

Падающий поток равен произведению начальной скорости  $k/\omega$  на плотность квантов в состоянии  $|\alpha k_i\rangle$ , что с учетом принятой нормировки дает  $L^{-3}k/\omega$ . Величина  $\rho_f(E)$  есть плотность конечных состояний с энергией  $E$  (см. ур. (49)). Таким образом, получаем

$$\frac{2\pi\rho_f(E)}{\text{падающий поток}} = \frac{L^6\omega^2}{4\pi^2},$$

$$\frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\Omega} = \frac{L^6\omega^2}{4\pi^2} |T_{i \rightarrow f}|^2. \quad (119)$$

При этом мы неявно предполагали, что в рассматриваемом случае применимы все основные формулы теории рассеяния. Так, уравнения (116) и (118) совпадают с уравнениями (XIX. 115) и (XIX. 144) соответственно. Незначительные отличия связаны с выбором обозначений, системы единиц и условий нормировки волновых функций, участвующих в определении амплитуды перехода.

Однако использование этих формул в интересующем нас случае не совсем корректно. При выводе формул предполагалось, что эволюция системы до и после столкновения почти точно описывается гамильтонианом  $H_0$ , а оператором взаимодействия можно пренебречь. Такое предположение было оправданым в главах X и XIX, но оно не выполняется здесь.

Рассмотрим, например, состояние системы до столкновения. Частица находится в основном состоянии, а квант описывается волновым пакетом, который движется по направлению к частице. Волновой пакет еще не достиг области в окрестности начала координат, где находится частица. Следовательно, на первый взгляд представляется, что ситуация не отличается от имеющейся в обычной теории рассеяния: взаимодействие кванта с частицей пренебрежимо мало, и движение кванта свободно. Однако оператором  $H'$  пренебречь нельзя, поскольку частица, даже находясь достаточно далеко от налетающего кванта, взаимодействует с полем. Поэтому ее начальное состояние не совпадает с собственным состоянием  $|\alpha\rangle$  гамильтониана  $H_0$ , отвечающим энергии  $E_a$ , а является собственным состоянием  $|\tilde{\alpha}\rangle$  гамильтониана  $H$ . Соответствующая со-

состоянию  $|\bar{\alpha}\rangle$  энергия  $E_\alpha + \delta E_\alpha$  была вычислена в § 11, и состояние  $|\bar{\alpha}\rangle$  совпадает с  $|\alpha\rangle$  только в пределе  $g \rightarrow 0$ .

Точная теория должна учитывать отличие «физического состояния»  $|\bar{\alpha}\rangle$ , от невозмущенного состояния  $|\alpha\rangle$ . Если взаимодействие достаточно мало, то это отличие в основном сводится к эффекту перенормировки массы, не влияя на процесс рассеяния<sup>1)</sup>.

В этом случае применимы обычные формулы теории рассеяния, но с заменой массы  $M$  в определении невозмущенного гамильтонiana на экспериментально измеряемую массу  $M + \delta M$ .

Для вычисления сечения рассеяния будем рассматривать  $H'$  как возмущение, и заменим оператор  $T$  борновским разложением (см. ур. (XIX. 143)). Так как амплитуда в первом порядке равна нулю, то имеем

$$\langle a\mathbf{k}_f | H' | a\mathbf{k}_i \rangle = 0,$$

и необходимо учитывать второй порядок по  $H'$ . Амплитуду во втором порядке обозначим

$$T_{i \rightarrow f}^{(B)} \equiv \langle a\mathbf{k}_f | H' \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} H' | a\mathbf{k}_i \rangle = \quad (120)$$

$$= \sum_n \langle a\mathbf{k}_f | H' | n \rangle \frac{1}{E - E_n + i\epsilon} \langle n | H' | a\mathbf{k}_i \rangle. \quad (120')$$

Суммирование во второй строке происходит по всем базисным векторам гамильтонiana  $H_0$ . Благодаря специфике оператора  $H'$  большинство слагаемых в сумме исчезает. Виртуальные состояния, вклад которых отличен от нуля, можно разделить на две категории:

- (i) состояния без квантов  $|v\rangle$ ;
- (ii) состояния  $|v\mathbf{k}_i \mathbf{k}_f\rangle$ , содержащие два кванта с импульсами  $\mathbf{k}_i$  и  $\mathbf{k}_f$  соответственно.

Первые состояния отвечают переходам

$$(a\mathbf{k}_i) \rightarrow (v) \rightarrow (a\mathbf{k}_f),$$

в которых частица поглощает налетающий квант прежде, чем испустит квант конечного состояния; вторые отвечают переходам

$$(a\mathbf{k}_i) \rightarrow (v\mathbf{k}_i \mathbf{k}_f) \rightarrow (a\mathbf{k}_f),$$

в которых квант конечного состояния излучается прежде, чем произойдет поглощение налетающего кванта.

Введя частоты Бора

$$\omega_{v\alpha} = E_v - E_\alpha \quad (> 0), \quad (121)$$

<sup>1)</sup> В высших порядках необходимо учитывать модификацию взаимодействия между налетающим квантлом и частицей, что связано с наличием окружающих частицу виртуальных квантов. Эта модификация в существенном сводится к изменению константы взаимодействия («перенормировка заряда»).

получаем

$$T_{i \rightarrow f}^{(B)} = \sum_v \left[ \frac{\langle \alpha k_f | H' | v \rangle \langle v | H' | \alpha k_i \rangle}{\omega - \omega_{va}} - \frac{\langle \alpha k_f | H' | v k_i k_f \rangle \langle v k_i k_f | H' | \alpha k_i \rangle}{\omega + \omega_{va}} \right]. \quad (122)$$

Воспользовавшись равенствами (69) и (70), в которых мы считаем  $C(k) = 1$  (что является обоснованным, если  $k \ll M$ ), находим

$$T_{i \rightarrow f}^{(B)} = \frac{L^{-3} g^2}{2\omega} \sum_v \left[ \frac{X_v}{\omega - \omega_{va}} - \frac{X'_v}{\omega + \omega_{va}} \right], \quad (123)$$

где

$$X_v \equiv \langle \alpha | e^{-ik_f R} | v \rangle \langle v | e^{ik_i R} | \alpha \rangle, \quad (124)$$

$$X'_v \equiv \langle \alpha | e^{ik_i R} | v \rangle \langle v | e^{-ik_f R} | \alpha \rangle. \quad (124')$$

Подстановка полученного выражения в правую часть формулы (119) дает сечение рассеяния во втором порядке борновского приближения

$$\frac{d\sigma_{i \rightarrow f}^{(B)}}{d\Omega} = \frac{g^4}{16\pi^2} \left| \sum_v \left( \frac{X_v}{\omega - \omega_{va}} - \frac{X'_v}{\omega + \omega_{va}} \right) \right|^2. \quad (125)$$

Каждое слагаемое в этой сумме отвечает вкладу одного из упомянутых выше переходов. Этот вклад возрастает с уменьшением разности энергии системы и энергии виртуального состояния, которое соответствует этому переходу. При совпадении этих энергий вклад становится бесконечно большим. Для каждого перехода первой категории существует одно значение  $\omega$ , когда промежуточное состояние может распасться на частицу в основном состоянии и излученный квант.

При переходе энергии  $\omega$  через одно из таких критических значений, например,  $E_\lambda (\omega_{\lambda} > \mu)$ , знаменатель  $\omega - \omega_{\lambda}$  обращается в нуль и меняет знак, слагаемое  $X_\lambda / (\omega - \omega_{\lambda})$  неограниченно растет и выражение для сечения расходится. Борновское приближение в этой области становится неприменимым<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> В длинноволновом пределе ( $k \langle R \rangle \ll 1$ ) имеем  $|X_\lambda| \approx (k \langle R \rangle)^2$ . Обозначив  $\Delta\omega = |E - E_\lambda|$  и сохранив только вклад главного члена, из выражения (125) получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{g^4}{16\pi^2} \left( \frac{k^2 \langle R \rangle^2}{\Delta\omega} \right)^2.$$

Согласно известному критерию (§ XIX. 7) борновское приближение не применимо, когда полное сечение является величиной одного порядка с геометриче-

независимо от малости значения константы связи. В действительности, сечение остается конечным, но имеет в этой точке четкий максимум. Как мы увидим ниже, здесь имеет место резонансное явление, аналогичное тому, которое исследовалось нами в главе X (§ 14—16).

## § 15. Резонансное рассеяние.

### Образование метастабильного состояния

Для вычисления сечения упругого рассеяния в окрестности одной из критических энергий, например  $E_\lambda$ , вернемся к точному выражению для амплитуды перехода. Согласно определениям (117) и (118)

$$\langle f | T | i \rangle = \sum_{n, n'} \langle f | H' | n \rangle \langle n | \frac{1}{E - H + i\epsilon} | n' \rangle \langle n' | H' | i \rangle. \quad (126)$$

Борновское приближение состоит в замене в каждом члене этого разложения точной функции Грина  $(E - H + i\epsilon)^{-1}$  на функцию Грина  $(E - H_0 + i\epsilon)^{-1}$  невозмущенного оператора (см. ур. (120) и (120')). Если константа связи достаточно мала, то такое приближение оправдано для всех слагаемых, за исключением члена с  $n = \lambda$  и  $n' = \lambda$ , для которого множитель  $\langle \lambda | (E - H_0 + i\epsilon)^{-1} | \lambda \rangle$  неограниченно возрастает при стремлении энергии к  $E_\lambda$ . Обозначим слагаемое, характеризующее резонанс

$$A^{(\text{рез})} = \langle f | H' | \lambda \rangle \langle \lambda | \frac{1}{E - H + i\epsilon} | \lambda \rangle \langle \lambda | H' | i \rangle, \quad (127)$$

а остаток, связанный с потенциалом рассеяния,  $A^{(\text{пот})}$ , т. е.

$$\langle f | T | i \rangle = A^{(\text{рез})} + A^{(\text{пот})}. \quad (128)$$

Для вычисления  $A^{(\text{пот})}$  будем использовать борновское приближение. Полученное в результате выражение отличается от формулы (123) только отсутствием в сумме по состояниям  $v$  слагаемого  $X_\lambda / (\omega - \omega_{\lambda\alpha})$ . Остается вычислить величину  $A^{(\text{рез})}$ .

ским сечением  $4\pi \langle R \rangle^2$ . Именно это имеет место в рассматриваемом случае, поскольку

$$\Delta\omega \leq \frac{g^2 k}{4\pi} (k \langle R \rangle).$$

Используя численные значения, приведенные в § 11, мы видим, что это происходит в очень узкой области порядка  $10^{-4} D$ , которая, тем не менее, много больше ширины  $\Gamma_\lambda$ .

Заменяя в выражении (127) матричные элементы оператора  $H'$  их точными значениями (см. ур. (69) и (124)), получаем

$$A^{(\text{рез})} = L^{-3} g^2 \frac{\chi_\lambda}{2\omega} \mathcal{G}(E^+), \quad (129)$$

где  $\mathcal{G}(E^+)$  — введенное в § 13 среднее значение функции Грина

$$\mathcal{G}(E^+) \equiv \langle \lambda | \frac{1}{E - H + ie} | \lambda \rangle. \quad (130)$$

Подставляя выражение для этой функции, вычисленное в § 13 (см. ур. (105)), в уравнение (129), находим

$$A^{(\text{рез})} = \frac{L^{-3} g^2}{2\omega} \frac{\chi_\lambda}{E - E_\lambda - \Delta(E) + \frac{1}{2} i\Gamma(E)}. \quad (131)$$

Это точный ответ для  $A^{(\text{рез})}$ . Он отличается от борновского приближения только наличием в знаменателе устраниющей сингулярность комплексной добавки  $\Delta(E) - \frac{1}{2} i\Gamma(E)$ , свойства которой обсуждались в § 13. Заменяя  $E$  на  $E_\lambda$  (см. ур. (103), (104) и (108)), что, конечно, оправдано в приближении слабой связи, поскольку зависимость этой добавки от энергии в интересующем нас интервале несущественна, имеем

$$A^{(\text{рез})} = \frac{L^{-3} g^2}{2\omega} \frac{\chi_\lambda}{E - E_\lambda - \delta E_\lambda + \frac{1}{2} i\Gamma_\lambda}. \quad (132)$$

Полученное выражение характеризует амплитуду рассеяния ширины  $\Gamma_\lambda$ , сосредоточенную в окрестности точки  $E_\lambda + \delta E_\lambda$ .

Здесь можно повторить рассуждения главы X о рассеянии резонансов и их связи с распадающимися состояниями. Конкретизируя модель, легко получить выражения для амплитуды рассеяния, дифференциального и полного сечений и времени задержки прохождения рассеянной волны, которые практически совпадают с приведенными в § X.15 (при условии, что  $A^{(\text{рез})}$  можно опустить (см. задачу 4)). Упомянутый резонанс связан с распадающимся состоянием  $|\lambda\rangle$ , свойства которого мы уже обсуждали в §§ 12 и 13.

Для достаточно точного измерения сечения и, в частности, для определения его характеристической зависимости от энергии необходимо, чтобы неопределенность в энергии падающего волнового пакета  $\Delta\omega$  была достаточно мала, а амплитуда рассеяния оставалась практически постоянной в интервале энергий  $\Delta\omega$ . В области резонанса это требование можно записать так:

$$\Delta\omega \ll \Gamma_\lambda. \quad (133)$$

Тем самым, время столкновения  $1/\Delta\omega$  должно быть значительно больше времени жизни  $1/\Gamma_\lambda$ , а последнее и не наблюдается в данном процессе.

Если же выполняется условие дополнительное к предыдущему

$$\Delta\omega \gg \Gamma_\lambda, \quad (134)$$

то можно изучить временную зависимость явления и обнаружить экспоненциальный закон распада, характерный для нестабильного состояния  $|\lambda\rangle$ . Все это возможно в силу специальной формы амплитуды рассеяния в резонансной области (ур. (132)) и может быть легко обосновано, если повторить вычисления § X. 16.

Полученный результат является общим, он справедлив не только для процесса рассеяния, но и для всех остальных столкновений. Любой резонанс, возникающий при столкновении и характеризуемый энергией  $E$  и шириной  $\Gamma$ , соответствует метастабильному состоянию с той же энергией и с временем жизни  $\hbar/\Gamma$ , которое можно наблюдать при условиях эксперимента дополнительных к тем, при которых обычно наблюдают резонанс<sup>1)</sup>.

## § 16. Поглощение кванта (фотоэлектрический эффект). Радиационный захват

До сих пор мы рассматривали задачи, в которых речь шла о частице, находящейся только в связанных состояниях. В этом параграфе мы исследуем процессы поглощения кванта и радиационного захвата, в которых появляются состояния непрерывного спектра.

Будем предполагать, что  $\lim V(R) = 0$  при  $R \rightarrow \infty$  и, следовательно, спектр подсистемы, содержащей частицу, состоит из дискретного множества отрицательных энергий  $E_\alpha, E_\beta, \dots, E_\lambda, \dots$ , которым отвечают связанные состояния, и расположенного от 0 до  $\infty$  непрерывного спектра, которому отвечает

<sup>1)</sup> Здесь мы встречаемся с дополнительными проявлениями одного и того же свойства системы, поскольку они связаны с одной и той же характеристической резольвентой  $G(z)$ . Последняя определяется равенством  $G(z) = (z - H)^{-1}$  на комплексной плоскости  $z$  с разрезом вдоль непрерывного спектра оператора  $H$ . Единственно допустимые сингулярности резольвенты на этой плоскости могут лежать на вещественной оси, они отвечают собственным значениям дискретного спектра оператора  $H$ . Однако аналитическое продолжение резольвенты на другой лист римановой поверхности может иметь дополнительные сингулярности. Резонанс и квазистационарное состояние связаны с такой характеристикой  $G(z)$ , как полюс в точке  $z = E - \frac{1}{2}i\Gamma$  вблизи вещественной оси на втором листе римановой поверхности в нижней полуплоскости.

континуум несвязанных ненормируемых состояний. Пусть  $\Psi_q^{(+)}$  и  $\Psi_q^{(-)}$  — стационарные волны, соответствующие согласно определению § XIX. 2 волновому вектору  $q$ . Это собственные состояния оператора  $H_{\text{част}}$ , отвечающие собственному значению

$$E = \frac{q^2}{2M}. \quad (135)$$

Их можно рассматривать и как собственные состояния гамильтониана  $H_0$ , задающие стационарные состояния рассеяния всей системы в случае, когда не учитывается оператор взаимодействия. Мы будем обозначать соответствующие стационарные состояния рассеяния при учете взаимодействия символами  $\Psi_q^{(+)}$  и  $\Psi_q^{(-)}$ .

Предположим теперь, что частица, находясь в основном состоянии, облучается потоком моноэнергетических квантов, движущихся со скоростью  $k/\omega$ . Если энергия падающих квантов достаточно велика для того, чтобы «ионизировать атом», т. е. если  $\omega > (-E_a)$ , то может произойти поглощение кванта частицей и она приобретет кинетическую энергию  $E$ , равную разности полученной энергии  $\omega$  и энергии связи  $(-E_a)$

$$E = \omega + E_a.$$

В этом процессе мы узнаем фотоэлектрический эффект (§ I. 4).

Вычислим сечение поглощения кванта с импульсом  $k$  и испускания частицы в заданном направлении. Пусть вектор  $q$  задает направление, а его длина связана с энергией  $E$  соотношением (135). Таким образом, нас интересует процесс

$$i \rightarrow f \equiv (ak) \rightarrow (q).$$

Так же, как и в случае упругого рассеяния, будем пользоваться формулами теории столкновений (здесь справедливы те же замечания, что и в § 14). Следовательно, сечение рассеяния определяется формулой (116) с тем же выражением для падающего потока, но  $\rho_f(E) = Mq/(2\pi)^3$ , а амплитуда перехода равна (см. ур. (XIX. 122))

$$T_{i \rightarrow f} \equiv \langle q | T | ak \rangle = \langle \Psi_q^{(-)} | H' | ak \rangle.$$

Если ограничиться низшим порядком по  $H'$ , то в этом матричном элементе состояние  $\Psi_q^{(-)}$  можно заменить на  $\Psi_q^{(-)}$  (см. ур. (XIX. 129, 130)). В результате получим

$$T_{i \rightarrow f} \approx \langle \Psi_q^{(-)} | H' | ak \rangle = (L^{-3} g^2 / 2\omega)^{1/2} \langle \Psi_q^{(-)} | e^{i k R} | a \rangle$$

и, следовательно,

$$\frac{d\sigma(ak \rightarrow q)}{d\Omega} \approx \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{Mq}{k} \left| \langle \Psi_q^{(-)} | e^{i k R} | a \rangle \right|^2. \quad (136)$$

Таким же образом можно вычислить сечение обратного процесса, когда частица, движущаяся с импульсом  $q$ , излучает квант с импульсом  $k$  и оказывается захваченной потенциалом  $V(R)$  в состояние  $\alpha$ :

$$q \rightarrow \alpha k.$$

В первом порядке по  $H'$  находим

$$\frac{d\sigma(q \rightarrow \alpha k)}{d\Omega} \approx \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{Mk}{q} |\langle \alpha | e^{-ikR} | \psi_q^{(+)} \rangle|^2. \quad (137)$$

Это выражение можно вычислить непосредственно или получить из предыдущего, воспользовавшись соотношением микрообразимости (XIX. 190) для двух реакций  $q \rightarrow \alpha k$  и  $(K\alpha)(-k) \rightarrow (-q)$ , переходящих друг в друга при обращении времени. Действительно,

$$\langle \alpha | e^{-ikR} | \psi_q^{(+)} \rangle = \langle \psi_{-q}^{(-)} | e^{-ikR} (K | \alpha \rangle).$$

### Раздел III. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

#### § 17. Уравнения классической теории Максвелла — Лоренца

В основе классической теории излучения лежат уравнения Максвелла<sup>1)</sup>

$$\text{rot } \mathcal{E} + \partial \mathcal{H} / \partial t = 0, \quad (138a)$$

$$\text{div } \mathcal{H} = 0, \quad (138b)$$

$$\text{rot } \mathcal{H} - \partial \mathcal{E} / \partial t = 4\pi s, \quad (139a)$$

$$\text{div } \mathcal{E} = 4\pi s^0. \quad (139b)$$

Эти уравнения определяют электрическое и магнитное поля  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  при наличии распределенной плотности заряда  $s^0$  и плотности тока  $s$ . Последние удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\text{div } s + \partial s^0 / \partial t = 0,$$

которое следует из уравнений (139) и выражает закон сохранения заряда.

Уравнения Максвелла должны быть дополнены уравнением Лоренца, определяющим движение электрических зарядов в электромагнитном поле. Согласно этому уравнению, плотность инерциальных сил равна плотности электромагнитных сил

$$f = s^0 \mathcal{E} + (s \times \mathcal{H}). \quad (140)$$

<sup>1)</sup> В отличие от случая скалярного поля мы не пользуемся здесь rationalized systemой единиц, как следствие этого в правых частях уравнений (139) появляются множители  $4\pi$ .