

Раздел IV. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 26. Квантование свободного поля излучения. Фотоны

И сказал Бог: «Да будет свет!» И был свет.
И увидел Бог, что свет хорош... Был день первый.

Квантовую теорию электромагнитного излучения можно построить, исходя из классической теории и используя принцип соответствия, так же как это было сделано в случае скалярного поля.

В качестве исходного пункта мы выберем гамильтонов формализм, который был развит в §§24 и 25.

Рассмотрим вначале свободное излучение. Вещественным динамическим переменным классической теории q_t , p_t соответствуют квантовые наблюдаемые, которые удовлетворяют комутационным соотношениям (см. ур. (11))

$$[q_t, q_{t'}] = [p_t, p_{t'}] = 0, \quad [q_t, p_{t'}] = i\delta_{tt'}.$$

Уравнения (203) и (205) определяют оператор H_{ray} — гамильтониан, который описывает развитие системы с течением времени. Видно, что излучение, в согласии с законом Планка, представляет собой суперпозицию квантовых осцилляторов.

Обсуждение, которое было проведено в § 3, можно повторить и в данном случае, в частности, ту часть, которая касается корпускулярной интерпретации. Кванты излучения называются *фотонами*. С каждой модой t связан фотон, который характеризуется «волновой функцией» $T^{(t)}$ и энергией k_t . Фотоны подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, что находится в прекрасном согласии с экспериментальными результатами, относящимися к термодинамическим свойствам излучения (излучение абсолютно черного тела и т. д.). Замечания в конце § 3 об энергии вакуума и вакуумных флуктуациях поля можно повторить без изменения и в этом случае.

Использованный метод не зависит от набора базисных векторных полей $T^{(t)}$, однако эти поля предполагались вещественными. Можно привести такую формулировку метода, чтобы он годился для комплексных полей $T^{(t)}$ и дословно повторить рассуждения § 5 о квантовании с использованием комплексных полей. Легко написать общие формулы, но мы здесь этого делать не будем. Мы кратко обсудим разложение по сферическим волнам и более детально — разложение по плоским волнам. Среди возможных разложений последнее применяется чаще всего. Разложение по сферическим волнам удобно использовать в задачах об излучении и поглощении квантов.

§ 27. Плоские волны. Импульс излучения

Квантование электромагнитного поля, использующее разложение по плоским волнам, аналогично приведенному в § 6 квантованию скалярного поля. В данном параграфе мы ограничимся только наиболее важными формулами, отмечая в процессе изложения отличие от случая скалярного поля.

Рассмотрим полный набор поперечных плосковолновых полей. Для того чтобы иметь дело с дискретными индексами, будем рассматривать эти поля в кубе со стороной L и потребуем выполнения обычных условий периодичности. Принадлежащее этому набору поле $\mathbf{U}^{(k\omega)}$ определяется волновым вектором \mathbf{k} и квантовым числом ω — параметризующим поляризацию ($\omega = 1, 2$)

$$\mathbf{U}^{(k\omega)} = L^{-3/2} \mathbf{e}^{(\omega)} e^{ikr}. \quad (214)$$

Выражение для $\mathbf{T}^{(k\omega)}$ из § 21 (ур. (173б)) отличается от данного только нормировкой. Векторы $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ удовлетворяют уравнениям (174), которые определяют эти векторы с точностью до унитарного преобразования.

Сопоставим каждой плоской волне $\mathbf{U}^{(k\omega)}$ оператор уничтожения $a_{(k\omega)}$ и оператор рождения $a_{(k\omega)}^\dagger$. Поле \mathbf{A} зададим разложением (см. ур. (46) и (206))

$$\mathbf{A} = \sum_k \sum_\omega (2\pi/k)^{1/2} (a_{(k\omega)} \mathbf{U}^{(k\omega)} + a_{(k\omega)}^\dagger \mathbf{U}^{(k\omega)*}), \quad (215)$$

а поле \mathcal{E}_\perp (см. ур. (47) и (207)) — разложением

$$\mathcal{E}_\perp = \sum_k \sum_\omega i (2\pi k)^{1/2} (a_{(k\omega)} \mathbf{U}^{(k\omega)} - a_{(k\omega)}^\dagger \mathbf{U}^{(k\omega)*}). \quad (216)$$

Операторы a и a^\dagger удовлетворяют коммутационным соотношениям, характеризующим операторы рождения и уничтожения:

$$[a_{(k\omega)}, a_{(k'\omega')}] = [a_{(k\omega)}^\dagger, a_{(k'\omega')}^\dagger] = 0, \quad [a_{(k\omega)}, a_{(k\omega')}^\dagger] = \delta_{kk'} \delta_{\omega\omega'}. \quad (217)$$

Оператор числа фотонов, находящихся в состоянии $U^{(k\omega)}$, есть

$$N_{(k\omega)} \equiv a_{(k\omega)}^\dagger a_{(k\omega)}. \quad (218)$$

Гамильтониан электромагнитного поля, выбранный таким образом, чтобы энергия вакуума была равна нулю, определяется равенством

$$H_{\text{ray}} = \sum_k \sum_\omega N_{(k\omega)} k. \quad (219)$$

Оператор импульса \mathbf{X} выражается через операторы \mathcal{E}_\perp и \mathbf{A} по формуле (189). Подставляя в эту формулу разложения (216) и (215), получаем (задача 6)

$$\mathbf{X} = \sum_k \sum_\omega N_{(k\omega)} \mathbf{k}. \quad (220)$$

Из приведенных выражений (219) и (220) видно, что фотон в состоянии $\mathbf{U}^{(k\omega)}$ представляет собой частицу с импульсом \mathbf{k} и энергией k , т. е. частицу нулевой массы покоя с импульсом \mathbf{k} .

Число состояний фотонов с импульсами, лежащими в интервале $(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \delta\mathbf{k})$, равно $2(L/2\pi)^3 d\mathbf{k}$. Множитель 2 возник в силу линейной независимости состояний с различной поляризацией при данном импульсе ($\omega = 1$ или 2). Плотность $\rho_L(k)$ уровней энергии k при заданных направлениях импульса Ω и поляризации ω (определение § 6) равна (см. ур. (49))

$$\rho_L(k) = L^3 k^2 / (2\pi)^3. \quad (221)$$

§ 28. Поляризация

Фотоны с одинаковым импульсом \mathbf{k} могут иметь различную поляризацию. В классической теории поляризация определяет направление осцилляций поперечного электрического поля и фиксируется (с точностью до фазы) вещественным или комплексным единичным вектором, перпендикулярным направлению распространения \mathbf{k} . Такое определение поляризации без труда переносится и на случай квантовой теории. Каждому значению импульса отвечают две линейно независимые поляризации $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ и любая другая возможная поляризация фотона задается линейной комбинацией таких поляризаций¹⁾.

В качестве базиса можно выбрать две ортогональных линейных поляризации, т. е. два вещественных вектора $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$. Эти векторы можно выбрать таким образом, чтобы тройка $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$ и \mathbf{k} образовывала орты правоориентированной декартовой системы координат, что фиксирует $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ с точностью до вращений вокруг оси распространения

$$\mathbf{e}^{(\omega)} = \mathbf{e}^{(\omega)*}, \quad \mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{k}/k.$$

Используют также в качестве базиса круговые поляризации $\mathbf{e}^{(+)}$ и $\mathbf{e}^{(-)}$

$$\mathbf{e}^{(+)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}^{(1)} + i\mathbf{e}^{(2)}), \quad \mathbf{e}^{(-)} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}^{(1)} - i\mathbf{e}^{(2)}). \quad (222)$$

Отметим, что $\mathbf{e}^{(+)} = -\mathbf{e}^{(-)*}$. Символом \wedge будем обозначать величины, выраженные в этом базисе. Так можно определить операторы рождения $\hat{a}_{(k\eta)}^+$ и уничтожения $\hat{a}_{(k\eta)}$ фотонов с круговой поляризацией; соответствующая плоская волна равна

$$\hat{\mathbf{U}}^{(k\eta)} = L^{-3/2} \mathbf{e}^{(\eta)} e^{ikr} \quad (\eta = + \text{ или } -).$$

¹⁾ Мы рассматриваем только чистые состояния, которые называют также полностью поляризованными. Состояние частично поляризованное является статистической смесью, оно определяется оператором плотности, действующим в двумерном пространстве состояний поляризации.

Интерес к круговой поляризации вызван следующим свойством.

Фотон с круговой поляризацией имеет определенное значение момента импульса вдоль направления распространения, соответствующая компонента момента импульса равна +1 или -1 в зависимости от поляризации (правой $\eta = +$ или левой $\eta = -$).

Для доказательства предположим, что излучение находится в одном из состояний $|\mathbf{k} \pm\rangle$, определяемых равенством

$$|\mathbf{k} \pm\rangle \equiv \hat{a}_{(\mathbf{k} \pm)}^\dagger |0\rangle.$$

Такое состояние представляет фотон с импульсом \mathbf{k} и правой (+) или левой (-) круговой поляризацией. Можно показать (задача 8), что

$$(\mathbf{k}, \mathbf{G}^{(0)}) |\mathbf{k} \pm\rangle = 0, \quad (223)$$

$$(\mathbf{k}, \mathbf{G}^{(s)}) |\mathbf{k} \pm\rangle = (\pm k) |\mathbf{k} \pm\rangle, \quad (224)$$

где векторные операторы $\mathbf{G}^{(0)}$ и $\mathbf{G}^{(s)}$ определены равенствами (191а) и (191б). Согласно уравнению (190) полный момент импульса \mathbf{G} равен сумме этих операторов. Обозначая компоненту \mathbf{G} вдоль вектора \mathbf{k} через G_k

$$G_k = (\mathbf{k}\mathbf{G})/k$$

и используя предыдущие уравнения, получаем требуемый результат

$$G_k |\mathbf{k} \pm\rangle = (\pm 1) |\mathbf{k} \pm\rangle. \blacksquare$$

Это свойство характеризует частицу спина 1. Точнее, если частица спина 1 имеет определенное значение импульса \mathbf{k} , то компонента орбитального момента импульса вдоль \mathbf{k} исчезает, а соответствующая компонента спина может принимать три значения: 1, 0, -1. Однако в случае фотона продольные плоские волны, отвечающие нулевому значению компоненты спина, отсутствуют.

§ 29. Разложение по мультипольям.

Фотоны с определенным моментом импульса и четностью

Кроме разложения по плоским волнам можно использовать разложение по сферическим волнам, каждая из которых отвечает вполне определенному значению момента импульса и четности. Мы ограничимся тем, что приведем здесь основные формулы, опуская несложные доказательства.

Векторное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ можно рассматривать как трехкомпонентную волновую функцию, определяющую динамическое со-

стояние частицы спина 1. В представлении поля \mathbf{B} посредством компонент существует некоторый произвол. Например, можно было бы задавать B_x , B_y , B_z , однако для нас предпочтительнее использовать стандартные компоненты

$$B_+ = -\frac{\sqrt{2}}{2}(B_x - iB_y), \quad B_0 = B_z, \quad B_- = \frac{\sqrt{2}}{2}(B_x + iB_y).$$

Волновая функция зависит от координаты r и индекса μ , который параметризует рассматриваемые компоненты ($\mu = +, 0, -$)

$$\Psi(r, \mu) \equiv B_\mu(r).$$

Здесь можно отметить явную параллель между частицами спина 1 и частицами спина 1/2 (см. §§ XIII. 20—21).

Наблюдаемые для частицы спина 1 являются функциями ее координаты r , импульса p и спина s . В используемом нами представлении $p = -i\nabla$ матрицы компонент спина s_+, s_z, s_- определены уравнениями (XIII.28), в которых следует считать $j = j' = 1$. Легко показать, что $s^2 = 2$ — число, соответствующее моменту, равному 1.

Орбитальный момент импульса l частицы определяется формулой

$$l = r \times p,$$

а полный момент j равен

$$j = l + s.$$

Компоненты оператора j связаны с инфинитезимальными вращениями векторного поля в соответствии с обычным определением оператора момента импульса.

Аналогичным образом определим оператор четности P , действие которого на поле $\mathbf{B}(r)$ соответствует преобразованию отражения относительно начала координат¹⁾

$$PB_\mu(r) = -B(-r).$$

Построим полный набор векторных полей с заданным моментом импульса (jm), которые удовлетворяют волновому уравнению

$$(\Delta + k^2)\mathbf{B}(r) = 0.$$

Это эквивалентно отысканию набора общих собственных функций операторов \mathbf{p}^2 , \mathbf{j}^2 и j_z . Соответствующие собственные значения

¹⁾ Мы предполагаем, что значениями поля $\mathbf{B}(r)$ являются полярные векторы. В результате появляется знак минус при пространственном отражении. С точностью до знака четности все приводимые ниже свойства справедливы и для аксиальных векторных или псевдовекторных полей (см. сноску в § XX. 11).

ния обозначим k^2 , $j(j+1)$ и m ; k может быть любым вещественным числом от 0 до ∞ (спектр k можно сделать дискретным, рассматривая поле внутри сферы конечного радиуса R), j может принимать любое целое значение от 0 до ∞ , m — целые значения от $-j$ до $+j$.

Используя свойства сложения моментов импульса, можно показать, что операторы p^2 , l^2 , j^2 , j_z образуют полный набор коммутирующих наблюдаемых и каждой тройке (kjm) отвечают:

(i) если $j \neq 0$, три линейно независимых состояния:

$$l = j+1, j, j-1;$$

(ii) если $j = 0$, то одно и только одно состояние с $l = 1$. Эти состояния имеют определенную четность $P = (-1)^{l+1}$.

Вместо классификации состояний (kjm) по возможным значениям l , можно классифицировать их по свойствам поперечности или продольности и четности. Поперечный или продольный характер поля связан с оператором (sp) .

В используемом представлении имеем (ур. (XIII. 93))

$$(sp) = \text{rot},$$

$$(sp)^2 - p^2 = \text{grad div} (= \text{rot rot} + \Delta).$$

Для продольного поля $(sp)^2 = 0$, для поперечного поля $(sp)^2 - p^2 = 0$. Можно показать, что операторы p^2 , $(sp)^2$, P , j^2 и j_z образуют полный набор коммутирующих наблюдаемых, и каждой тройке (kjm) отвечают:

(i) если $j \neq 0$, три линейно независимых состояния

$$(sp)^2 = 0, \quad k^2, \quad k^2,$$

$$P = (-1)^l, \quad (-1)^l, \quad (-1)^{l+1};$$

(ii) если $j = 0$, то одно и только одно состояние — четное и продольное

$$(sp)^2 = 0, \quad P = +1$$

(т. е. уже упоминавшееся p -состояние).

Для построения базисных функций будем использовать функции u_{kjm} , которые были введены в § 7 при рассмотрении скалярного поля. Константу в определении (60) будем считать такой функцией k , что множество u_{kjm} образует полный ортонормированный набор скалярных функций. Каждому набору (kjm) отвечает одно и только одно продольное состояние. Соответствующая базисная функция равна

$$\Lambda_{kjm} = \text{grad } u_{kjm}/k$$

(векторное поле четности $(-1)^l$). Каждому набору (kjm) , исключая случай $j = m = 0$, отвечают два поперечных состоя-

ния противоположной четности. Соответствующие базисные функции равны¹⁾

$$\Theta_{kjm}^{(-)} = \mathbf{Iu}_{kjm}/\sqrt{j(j+1)} \quad (P = (-1)^{j+1}), \quad (225a)$$

$$\Theta_{kjm}^{(+)} = \nabla \times \mathbf{Iu}_{kjm}/k \sqrt{j(j+1)} \quad (P = (-1)^j). \quad (225b)$$

Отметим, что

$$\Theta_{kjm}^{(\pm)} = \text{rot } \Theta_{kjm}^{(\omega)} / k.$$

Множество полей $\Theta_{kjm}^{(\omega)}$ (k меняется от 0 до ∞ ; $j = 1, 2, \dots, \infty$; $m = -j, \dots, +j$; $\omega = +, -$) образует полный ортонормированный набор поперечных полей, которые можно использовать для разложений операторов \mathbf{A} и \mathcal{E}_\perp :

$$\mathbf{A} = \sum_{k, j, m, \omega} (2\pi/k)^{1/2} [a_{kjm}^{(\omega)} \Theta_{kjm}^{(\omega)} + a_{kjm}^{(\omega)\dagger} \Theta_{kjm}^{(\omega)*}], \quad (226)$$

$$\mathcal{E}_\perp = \sum_{k, j, m, \omega} (2\pi k)^{1/2} i [a_{kjm}^{(\omega)} \Theta_{kjm}^{(\omega)} - a_{kjm}^{(\omega)\dagger} \Theta_{kjm}^{(\omega)*}]. \quad (227)$$

Согласно принятой терминологии слагаемые $\Theta_{kjm}^{(+)}$ в этих разложениях отвечают *электрическому* 2^l -поляльному вкладу, а слагаемые $\Theta_{kjm}^{(-)}$ — *магнитному* 2^l -поляльному вкладу. Все рассуждения § 27, где рассматривалось разложение по плоским волнам, можно повторить здесь для разложения по мультипольям. Операторы $a_{kjm}^{(\omega)}$ и $a_{kjm}^{(\omega)\dagger}$ можно интерпретировать как операторы уничтожения и рождения фотонов с энергией k , моментом импульса (jm) и четностью $(-1)^j\omega$. Спектры значений k , j , m и ω уже приводились ранее, следует отметить только, что не существует фотонов с нулевым моментом импульса.

§ 30. Взаимодействие с атомной системой

И сказал Бог: «Да будут светила на тверди небесной для отделения дня от ночи...»

И увидел Бог, что это хорошо... Был день четвертый.

Рассмотрим взаимодействие излучения с системой частиц. Рассуждения будут подобны тем, которые проводились в случае скалярного поля, и мы выделим здесь только наиболее существенные пункты.

¹⁾ Четности этих функций отличаются знаком от тех, которые встречаются в большинстве монографий (см., в частности *Блатт и Вайскопф*, loc. cit.). Это связано с тем, что мы используем полярные векторные поля, в то время как другие авторы используют аксиальные.

Гамильтониан системы, с точностью до очевидных модификаций, совпадает с гамильтонианом классической теории (см. ур. (211)). Упомянутые изменения связаны с динамическими свойствами и спином рассматриваемых частиц. Мы ограничимся случаем атомной системы, состоящей из Z электронов и ядра с зарядом — Ze , где e — заряд электрона.

Предположим, что ядро отсутствует, и напишем гамильтониан системы из Z электронов + излучение. Такой гамильтониан дается формулой (211), где H_{ray} соответствует свободному излучению, H_{coul} — кулоновскому взаимодействию электронов и H_n — гамильтониан Дирака для n -го электрона в поле \mathbf{A} , т. е.

$$H_n = \alpha_n (\mathbf{P}_n - e\mathbf{A}(n)) + \beta_n m, \quad (228)$$

матрицы Дирака α_n и β_n относятся к n -му электрону.

В нерелятивистском приближении, вычитая массу покоя из H_n , получаем

$$(H_n)_{NR} = \frac{(\mathbf{P}_n - e\mathbf{A}(n))^2}{2m} - \frac{e}{2m} (\sigma_n \mathcal{H}(n)). \quad (229)$$

Отметим, что слагаемое в H_n (ур. (228)), описывающее взаимодействие электрона с излучением, имеет вид

$$H'_n = -e \int (\mathbf{j}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) d\mathbf{r}, \quad (230)$$

где $\mathbf{j}_n(\mathbf{r})$ — дираковская плотность потока электронов в точке \mathbf{r} , т. е. (см. ур. (XX. 143))

$$\mathbf{j}_n(\mathbf{r}) = \alpha_n \delta(\mathbf{R}_n - \mathbf{r}). \quad (231)$$

Беличина $e\mathbf{j}_n(\mathbf{r})$ есть плотность электрического тока для n -го электрона. Подставляя в формулу (230) нерелятивистское приближение для \mathbf{j}_n (ур. (189), (190)), получаем оператор взаимодействия $(H'_n)_{NR}$ в нерелятивистском приближении

$$(H'_n)_{NR} = H_n^{(I)} + H_n^{(II)} + H_n'', \quad (232)$$

$$H_n^{(I)} = -\frac{e}{2m} ((\mathbf{P}_n \cdot \mathbf{A}(n)) + (\mathbf{A}(n) \cdot \mathbf{P}_n)), \quad (233a)$$

$$H_n^{(II)} = -i \frac{e}{2m} [\sigma_n ((\mathbf{P}_n \times \mathbf{A}(n)) + (\mathbf{A}(n) \times \mathbf{P}_n))] = -\frac{e}{2m} (\sigma_n \mathcal{H}(n)), \quad (233b)$$

$$H_n'' = \frac{e}{2m} \mathbf{A}^2(n). \quad (233b)$$

Таким образом, мы пришли к выражению для взаимодействия электрона с излучением, которое фигурирует в формуле (229).

Наличие атомного ядра заставляет нас добавить к гамильтониану оператор кулоновского взаимодействия ядра и Z электронов и гамильтониан, описывающий ядро в электромагнитном поле. Последний гамильтониан состоит из двух слагаемых, соответствующих кинетической энергии ядра и взаимодействию с излучением¹⁾). В нерелятивистском приближении, когда ядро предполагается бесконечно тяжелым, эти два слагаемых пренебрежимо малы, и расположенные в начале координат ядро требует добавления к гамильтониану только Z кулоновских членов — $-Ze^2/R_n$. В этом случае атом рассматривается как система, состоящая из Z электронов во внешнем кулоновском потенциале $-Ze^2/R$, которые взаимодействуют с электромагнитным полем. Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H = H_{\text{ray}} + H_{\text{at}} + H', \quad (234)$$

где H_{ray} — оператор энергии свободного излучения, H_{at} — гамильтониан электронов во внешнем кулоновском поле ядра с кулоновским взаимодействием между электронами и H' — оператор взаимодействия электронов атома с излучением. Оператор H' равен сумме Z членов взаимодействия H'_n (см. ур. (230)). В дальнейшем мы будем использовать нерелятивистское приближение, и, следовательно, H'_n определяется формулами (232) и (233), т. е.

$$H' = H^{(I)} + H^{(II)} + H'', \quad (235)$$

$$H^{(I)} = \sum_n H_n^{(I)}, \quad H^{(II)} = \sum_n H_n^{(II)}, \quad H'' = \sum_n H_n''. \quad (235')$$

При исследовании такой системы обычно пользуются одним из двух приближенных методов.

В первом методе *электромагнитное поле считают классическим*. Это предположение оправдано в тех случаях, когда обмен энергией между атомом и полем столь велик по сравнению с энергией каждого испущенного или поглощенного фотона, что можно не учитывать дискретного характера этого обмена. Следовательно, таким приближением можно пользоваться при больших интенсивностях и малых частотах, когда присутствует много фотонов. В частности, метод годится для исследования атома в статическом электромагнитном поле или в поле радиоволнового диапазона. В этом случае электромагнитное поле рассматривается как заданное, возможно, зависящее от времени внешнее поле, и задача сводится к исследованию атома во внешнем поле.

¹⁾ Предполагается, что ядро может рассматриваться как точечный заряд. Такое рассмотрение оправдано до тех пор, пока участвующие в анализе частоты малы по сравнению с энергией возбуждений ядра.

При втором методе *оператор взаимодействия* H' рассматривают как малое возмущение. Мы уже пользовались этим методом в случае скалярного поля.

Рассуждения § 10 здесь можно повторить почти дословно. Невозмущенный гамильтониан имеет вид

$$H_0 \equiv H_{\text{ray}} + H_{\text{at}}.$$

Для применения теории возмущений нужно использовать представление, в котором оператор H_0 диагонален. Воспользовавшись определенным в § 27 представлением плоских волн для электромагнитного поля, мы определим базисные векторы H_0 как одновременные собственные векторы оператора H_{at} и операторов числа фотонов с заданным импульсом и поляризацией $N_{(k\omega)}$.

Матричные элементы H' в этом представлении легко вычислить, если использовать выражение этого оператора через операторы $a_{(k\omega)}$ и $a_{(k\omega)}^\dagger$. Подставляя разложение для \mathbf{A} (215) в выражение (233), находим

$$H_n^{(\text{I})} = -\frac{e}{m} \sum_s \left(\frac{2\pi}{kL^3} \right)^{1/2} (a_s(\mathbf{P}\mathbf{e}) e^{i\mathbf{kR}} + \text{эрм. сопр.}), \quad (236\text{a})$$

$$H_n^{(\text{II})} = -\frac{e}{2m} \sum_s \left(\frac{2\pi}{kL^3} \right)^{1/2} (ia_s(\sigma\mathbf{k} \times \mathbf{e}) e^{i\mathbf{kR}} + \text{эрм. сопр.}), \quad (236\text{b})$$

$$\begin{aligned} H_n'' = & \frac{e^2}{2m} \sum_s \sum_{s'} \frac{\pi}{\sqrt{kk'L^3}} ((a_s a_{s'} (\mathbf{e}\mathbf{e}') e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{R}} + \text{эрм. сопр.}) + \\ & + (a_s^\dagger a_{s'} (\mathbf{e}^*\mathbf{e}') e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\mathbf{R}} + \text{эрм. сопр.})). \end{aligned} \quad (237)$$

(Чтобы упростить запись, мы ввели обозначения $s \equiv (k\omega)$, $s' \equiv (k'\omega')$, а векторы \mathbf{R}_n , \mathbf{P}_n , σ_n , $\mathbf{e}^{(\omega)}$, $\mathbf{e}^{(\omega')}$ записали как \mathbf{R} , \mathbf{P} , σ , \mathbf{e} , \mathbf{e}' .) Полученные формулы и формулы (235), (235') дают требуемое выражение для H' .

Добавление к гамильтониану H_0 оператора взаимодействия H' приводит к сдвигу всех атомных уровней и делает все уровни, за исключением основного состояния, нестабильными (напомним, что масса фотона равна нулю). Эти эффекты можно изучать в рамках теории возмущений. Однако несмотря на малость константы связи e ($e^2 \approx 1/137$) здесь встречаются те же трудности, что и в случае скалярного поля. В частности, как следствие локальности взаимодействия H' (см. ур. (230) и (231)) возникает «ультрафиолетовая катастрофа». Эта трудность устраняется из вычислений введением подходящего обрезающего параметра. По тем же причинам, что и выше, в качестве такого параметра выбирают частоту порядка m . Мы уже обсуждали вопросы, относящиеся к введению обрезающего па-

раметра и к трудностям, которые связаны с необходимостью перенормировки массы и заряда частиц. Весь материал раздела II о сдвиге уровней и свойствах квазистационарных состояний (время жизни, ширина линии, моды распада...) можно без больших изменений перенести на случай взаимодействия с электромагнитным полем¹). Рассмотренные в разделе II задачи о столкновении можно исследовать в случае излучения теми же методами. Заканчивая эту главу, мы приведем два простых примера применения квантовой теории излучения: вычисление вероятности испускания фотона атомом и вычисление сечения комптоновского рассеяния в пределе низких частот.

§ 31. Излучение фотона атомом. Дипольное излучение

Рассмотрим атом, находящийся в одном из возбужденных состояний $|\lambda\rangle$ с энергией E_λ . Такой атом может перейти в любое из состояний $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, \dots$ с энергиями E_α, E_β, \dots , меньшими чем E_λ , и испустить при этом фотон, энергия которого равна разности энергий начального и конечного состояний.

Будем исследовать переход

$$\lambda \rightarrow \mu k e,$$

где μ — конечное состояние атома, k , e — импульс и поляризация испущенного фотона и

$$k = E_\lambda - E_\mu. \quad (238)$$

Вероятность перехода в единицу времени $w_{\lambda \rightarrow \mu k e}$ в первом порядке теории возмущений дается формулой (см. § 12)

$$w_{\lambda \rightarrow \mu k e} = 2\pi |\langle \lambda | H' | \mu k e \rangle|^2 (L^3 k^2 / (2\pi)^3). \quad (239)$$

Как видно из уравнения (235), H' является суммой трех слагаемых. Вклад третьего члена H'' в интересующий нас матричный элемент исчезает²). Вклады первого и второго членов легко

¹⁾ Изменения связаны с тем, что фотоны представляют собой частицы нулевой массы и спина 1. Тот факт, что масса фотона равна нулю, приводит к дополнительным трудностям. Кроме «ультрафиолетовой» возникает «инфракрасная катастрофа» — расходимость в области низких частот некоторых интегралов теории возмущений по заряду. Эти расходимости связаны непосредственно с используемым методом и их можно избежать, если модифицировать теорию возмущений. «Ультрафиолетовая катастрофа» представляет действительную трудность собственно теории, полностью удовлетворительного решения которой в настоящее время не существует.

²⁾ Действуя на состояния, H'' либо сохраняет число фотонов, либо увеличивает или уменьшает это число на две единицы. Отметим, что H'' содержит множителем e^2 , и, следовательно, при вычислении по теории возмущений в первом порядке по e этот оператор можно не учитывать. При вычислении сдвига уровней, который является эффектом второго порядка (см. § 11), вкладом H'' нельзя пренебрегать. Его необходимо учитывать также при вычислении рассеяния фотонов (см. § 32).

вычислить, используя выражения (236). В результате имеем

$$\langle \lambda | H^{(I)} | \mu k e \rangle = -\frac{e}{m} \left(\frac{2\pi}{kL^3} \right)^{1/2} F^{(I)}, \quad (240a)$$

$$\langle \lambda | H^{(II)} | \mu k e \rangle = \frac{ie}{m} \left(\frac{2\pi}{kL^3} \right)^{1/2} F^{(II)}, \quad (240b)$$

где

$$F^{(I)} \equiv \langle \lambda | \sum_n (eP_n) e^{ikR_n} | \mu \rangle, \quad (241a)$$

$$F^{(II)} \equiv \langle \lambda | \frac{1}{2} \sum_n (ek \times \sigma_n) e^{ikR_n} | \mu \rangle. \quad (241b)$$

Подставляя полученные выражения в формулу (239), окончательно находим

$$w_{\lambda \rightarrow \mu k e} = \frac{e^2 k}{2\pi m^2} |F^{(I)} - iF^{(II)}|^2. \quad (242)$$

Для атомов вероятность перехода по порядку величины существенно зависит от моментов импульса j_λ , j_μ и от четностей Π_λ , Π_μ состояний $|\lambda\rangle$, $|\mu\rangle$ соответственно.

Если $j_\lambda = j_\mu = 0$, то вероятность перехода исчезает, поскольку матричные элементы $F^{(I)}$ и $F^{(II)}$ тождественно равны нулю (задача 10). Это — известное правило отбора $0 \rightarrow 0$. Оно связано с тем, что не существует фотона с нулевым моментом импульса (см. § 29).

Если j_λ или j_μ отличны от нуля, то вероятность перехода можно оценить, используя приближение больших длин волн. Пусть R — длина порядка атомных размеров для обычных атомных переходов

$$k \leq e^2/R \approx me^4,$$

так что

$$kR \leq e^2 \ll 1.$$

Следовательно, величины (241) можно оценить, если заменить экспоненты первым, дающим неисчезающий вклад членом их ряда Тейлора. Порядок величины этого вклада в основном определяется *правилами отбора* по моменту импульса и четности, но вникать в эти детали мы здесь не будем¹⁾). При прочих рав-

¹⁾ Более естественным образом эти результаты получаются при использовании разложения по мультипольям, а не по плоским волнам. В этом случае из правил отбора следует, что большинство вкладов обращается в нуль, а оставшиеся вклады легко оценить, заменяя мультипольные поля Θ первым членом их разложения по степеням kr . Отметим (см. ур. (225)), что при $kr \ll 1$

$$\Theta_{klm}^{(+)} \approx (kr)^{l-1}, \quad \Theta_{klm}^{(-)} \approx (kr)^l.$$

Подробное изложение этого метода с приложением к радиационным переходам в ядрах можно найти в книге: Д. Блатт, В. Вайскопф. Теоретическая ядерная физика. М., ИЛ, 1954 (гл. XII).

ных условиях наибольшая вероятность перехода получается для так называемых *электрических дипольных* переходов, когда

$$\Delta j \equiv |j_\lambda - j_\mu| \leq 1, \quad \Delta \Pi \equiv \Pi_\lambda \Pi_\mu = -1 \quad (243)$$

(исключая $j_\lambda + j_\mu = 0$).

Далее следуют магнитные дипольные ($\Delta j \leq 1, \Delta \Pi = 1, j_\lambda + j_\mu \neq 0$) и электрические квадрупольные ($\Delta j \leq 2, \Delta \Pi = 1, j_\lambda + j_\mu \neq 0$ или 1) переходы, порядок величины которых в $(kR)^{-2}$ раз меньше электрических дипольных переходов.

Если выполнены условия для электрического дипольного излучения (243), то мы можем записать

$$F^{(I)} \approx \langle \lambda | \sum_n (\epsilon \mathbf{P}_n) | \mu \rangle,$$

$$F^{(II)} \approx \frac{1}{2} i \langle \lambda | \sum_n (\epsilon \mathbf{k} \times \sigma_n) (\mathbf{k} \mathbf{R}_n) | \mu \rangle.$$

Грубая оценка этих матричных элементов

$$F^{(I)} \approx 1/R, \quad F^{(II)} \approx k^2 R, \quad |F^{(II)}/F^{(I)}| \approx (kR)^2 \ll 1$$

показывает, что слагаемое $F^{(II)}$ значительно меньше $F^{(I)}$ и им можно пренебречь. Для вычисления $F^{(I)}$ удобно ввести электрический дипольный момент электронов

$$\mathbf{D} \equiv e \sum_n \mathbf{R}_n. \quad (244)$$

(Это векторный оператор, который мы в §§ XIII. 33 и XVII. 3 обозначали $\mathbf{Q}^{(1)}$ см. ур. (XVII. 35).)

Оператор \mathbf{D} удовлетворяет уравнению

$$[\mathbf{D}, H_{\text{at}}] = ie \sum_n \mathbf{P}_n/m.$$

Следовательно,

$$(ie/m) \langle \lambda | \sum_n \mathbf{P}_n | \mu \rangle = \langle \lambda | (\mathbf{D} H_{\text{at}} - H_{\text{at}} \mathbf{D}) | \mu \rangle =$$

$$= (E_\mu - E_\lambda) \langle \lambda | \mathbf{D} | \mu \rangle = -k \langle \lambda | \mathbf{D} | \mu \rangle,$$

откуда $F^{(I)} = imk \langle \lambda | (\mathbf{D} \epsilon) | \mu \rangle / e$ и

$$\omega_{\lambda \rightarrow \mu \text{ke}} = \frac{k^3}{2\pi} |\langle \lambda | (\mathbf{D} \epsilon) | \mu \rangle|^2. \quad (245)$$

Здесь удобно взять определенные магнитные квантовые числа m_λ и m_μ начального и конечного состояний и ввести в соответствии с определением (XIII. 125) приведенный матричный элемент $\langle \lambda | \mathbf{D} | \mu \rangle$. Если D_q есть q -я стандартная компонента векторного оператора \mathbf{D} , то согласно теореме Вигнера — Эккарта имеем

$$\langle \lambda j_\lambda m_\lambda | D_q | \mu j_\mu m_\mu \rangle = (2j_\lambda + 1)^{-1/2} \langle j_\mu 1 m_\mu q | j_\lambda m_\lambda \rangle \langle \lambda || \mathbf{D} || \mu \rangle.$$

Поскольку $\langle \epsilon D \rangle = \sum_q \epsilon_q D_q$, где ϵ_q ($q = +, 0, -$) есть стандартные компоненты вектора поляризации (определение (XIII. 94)), то окончательно получаем

$$w_{\lambda \rightarrow \mu k\epsilon} = (k^3 |\langle \lambda \| D \| \mu \rangle|^2 / 2\pi) \left(\sum_q \epsilon_q \langle j_\mu | m_\mu q | j_\lambda m_\lambda \rangle^2 / (2j_\lambda + 1) \right). \quad (246)$$

Если атом в начальном состоянии неполяризован и в конечном состоянии поляризация не измеряется, то нам следует просуммировать по m_μ и усреднить по m_λ , т. е.

$$\langle w_{\lambda \rightarrow \mu k\epsilon} \rangle \equiv \frac{1}{2j_\lambda + 1} \sum_{m_\lambda, m_\mu} w_{\lambda \rightarrow \mu k\epsilon}.$$

Вычисления легко проделать, используя свойства симметрии и ортогональности коэффициентов Клебша — Гордана (см. ур. (B. 13в) и (B. 14а)), в результате получим

$$\langle w_{\lambda \rightarrow \mu k\epsilon} \rangle = \frac{k^3 |\langle \lambda \| D \| \mu \rangle|^2}{6\pi (2j_\lambda + 1)}.$$

Как и следовало ожидать, это выражение не зависит ни от направления излучения, ни от поляризации испущенного фотона. Полная вероятность перехода $\lambda \rightarrow \mu$ в единицу времени получается после суммирования по двум состояниям поляризации и интегрирования по направлениям излучения, т. е. после умножения этого выражения на 8π

$$w_{\lambda \rightarrow \mu}^{(\text{tot})} = \frac{4k^3}{3(2j_\lambda + 1)} |\langle \lambda \| D \| \mu \rangle|^2. \quad (247)$$

§ 32. Комптоновское рассеяние при низких энергиях. Формула Томсона

В качестве примера задачи рассеяния, отличной от приведенных в разделе II, но которая может быть решена теми же методами, рассмотрим комптоновское рассеяние (рассеяние фотонов свободными электронами)¹⁾.

В начальном состоянии системы имеются электрон с импульсом P_i и фотон с импульсом k_i и поляризацией ϵ_i . Такое состояние представляется кет-вектором $|i\rangle = |P_i k_i \epsilon_i\rangle$. Нас интересует сечение рассеяния из начального состояния в конечное, которое содержит электрон и фотон с импульсами и поляризацией P_f, k_f, ϵ_f соответственно. Конечное состояние обозначим $|f\rangle = |P_f k_f \epsilon_f\rangle$. Энергия и импульс при рассеянии сохраняются.

¹⁾ Для скалярного поля сечение рассеяния кванта поля на свободной частице исчезает.

Для вычисления сечения рассеяния при всех энергиях электрон следует рассматривать как частицу, удовлетворяющую уравнению Дирака и взаимодействующую с излучением по закону — $eaA(\mathbf{R})$. В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением рассеяния в области малых частот¹⁾.

Пусть в начальном состоянии электрон поконится ($\mathbf{P}_i = 0$) и энергия налетающего фотона достаточно мала, чтобы переданная электрону в результате рассеяния энергия была мала по сравнению с его массой

$$k_i \ll m$$

(следовательно, $k_f \approx k_i$, $P_f \approx k_f$). В этом случае можно использовать нерелятивистское приближение для электрона и в качестве гамильтониана системы взять оператор

$$H = H_0 + H',$$

где

$$H_0 = H_{\text{ray}} + \frac{P^2}{2m}.$$

Согласно формуле (235) H' есть сумма трех слагаемых $H^{(1)}$, $H^{(11)}$ и H'' , которые определяются уравнениями (236а), (236б) и (237) соответственно.

Для вычисления сечения рассеяния воспользуемся формулами теории рассеяния (глава XIX). Ясно, что все оговорки, сделанные в аналогичной задаче из § 14, остаются в силе и в данном случае. Мы не будем повторять их здесь, а предположим, как и в § 14, что формулы теории рассеяния применимы при условии замены в этих формулах массы электрона m на экспериментально измеряемую величину.

Непосредственное применение формализма теории рассеяния сталкивается с дополнительной трудностью, которая связана с невозможностью определить и отделить переменные центра масс. Однако трудность эта только кажущаяся. Отделение движения центра масс играет в нерелятивистской теории столкновений вспомогательную роль: в силу сохранения при столкновении полного импульса системы формулы становятся проще. Можно сформулировать теорию рассеяния, не прибегая к отделению движения центра масс, тогда закон сохранения импульса будет фигурировать в формулах явно.

Мы воспользуемся здесь такой формулировкой. Единственное изменение связано с определением амплитуды перехода

¹⁾ В общем случае задачу можно решить таким же методом (см. Гейтлер, loc. cit.) и получить формулу Клейна — Нишины. Вычисления будут несложными, но длинными. Их можно значительно сократить, если воспользоваться ковариантной формулировкой квантовой теории излучения (см. Яух и Рорлих, loc. cit.).

$T_{i \rightarrow f}$. Примем для T формальное определение

$$T \equiv H' + H' \frac{1}{E - H + i\epsilon} H'.$$

Поскольку оператор T инвариантен относительно трансляций, то матричный элемент $\langle f | T | i \rangle$ пропорционален δ -функции, обеспечивающей закон сохранения полного импульса. Амплитуда перехода $T_{i \rightarrow f}$ определяется равенством

$$\langle f | T | i \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{P}_f + \mathbf{k}_f - \mathbf{P}_i - \mathbf{k}_i) T_{i \rightarrow f}. \quad (248)$$

Множитель $(2\pi)^3$ учитывает принятую нормировку плоских волн

$$\langle \mathbf{P} | \mathbf{P}' \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}').$$

При таких определениях сечение рассеяния дается общей формулой (XIX. 116).

Будем вычислять амплитуду перехода $\langle f | T | i \rangle$, раскладывая T в ряд по степеням e и ограничиваясь только низшим нетривиальным порядком, т. е. e^2 :

$$\begin{aligned} \langle f | T | i \rangle &= \langle f | H'' | i \rangle + \\ &+ \langle f | (H^{(I)} + H^{(II)}) \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} (H^{(I)} + H^{(II)}) | i \rangle + O(e^4). \end{aligned} \quad (249)$$

Из выражений (236а, б) и (237) видно, что каждое слагаемое в правой части содержит множитель

$$\int e^{i(P_i + \mathbf{k}_i - \mathbf{P}_f - \mathbf{k}_f) \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{R} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{P}_f + \mathbf{k}_f - \mathbf{P}_i - \mathbf{k}_i).$$

Это и есть упоминавшийся выше множитель, выражающий закон сохранения импульса. Используя выражение (237), получаем

$$\langle f | H'' | i \rangle = \frac{2\pi e^2}{mkL^3} (\mathbf{e}_f^* \mathbf{e}_i) \int e^{i(P_i + \mathbf{k}_i - \mathbf{P}_f - \mathbf{k}_f) \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{R}, \quad (250)$$

где $k = (k_i k_f)^{1/2}$. Поскольку мы интересуемся только областью малых частот, то членами порядка k/m по сравнению с единицей пренебрегаем и можем считать

$$k_i \approx k_f \approx k.$$

Легко показать, что вклад второго слагаемого в правой части уравнения (249) порядка k/m по сравнению с вкладом первого слагаемого. Таким образом, в данном приближении ($e^2 \ll 1, k \ll m$) имеем

$$T_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi e^2}{mkL^3} (\mathbf{e}_f^* \mathbf{e}_i). \quad (251)$$

Следовательно, сечение рассеяния (см. ур. (116)) равно

$$\frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\Omega} = 2\pi L^3 |T_{i \rightarrow f}|^2 (L^3 k^2 / (2\pi)^3) = \frac{e^4}{m^2} |(\mathbf{e}_f^* \mathbf{e}_i)|^2. \quad (252)$$

Чтобы получить сечение рассеяния неполяризованных фотонов, следует усреднить по двум возможным начальным поляризациям и просуммировать по двум конечным поляризациям. Вводя обозначение θ для угла рассеяния фотона ($\cos \theta = (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_f) / k^2$), получаем

$$\left. \frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\Omega} \right|_{\text{неполяр}} = \frac{1}{2} \sum_{\epsilon_i, \epsilon_f} \frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{e^4}{m^2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (253)$$

Интегрируя по всем направлениям излучения, приходим к формуле для полного сечения рассеяния фотонов

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2}. \quad (254)$$

Эти результаты хорошо согласуются с экспериментальными наблюдениями.

Выражения (252) — (254) совпадают с теми, которые получаются в классической теории излучения¹⁾. В частности, для полного сечения мы получили *классическую формулу Томсона*. Такое совпадение результатов двух теорий убеждает нас в справедливости сказанного в § I. 5 о значении и пределах применимости классической теории эффекта Комптона. Очевидно, что классическая теория не может учесть корпускулярный характер излучения и тот факт, что обмен импульсом и энергией между излучением и электроном осуществляется посредством квантов. Но эта теория правильно предсказывает целый ряд характеристик, таких как среднее значение за единицу времени и на единичный падающий поток переданного электрону импульса (ур. (254)), угловое распределение и поляризацию рассеянного излучения (ур. (252)), а также, при учете эффекта Допплера, изменение длины волны рассеянного излучения (ур. (I. 5) и (I. 6)).

Полное совпадение результатов двух теорий происходит только в пределе малых частот, когда длина волны электромагнитного излучения $1/k$ настолько велика, что процесс рассеяния практически не зависит от внутренней структуры электрона. Поскольку электрон является квантовым объектом, то его раз-

¹⁾ В эти формулы не входит постоянная Планка \hbar . Каждая из формул содержит множителем квадрат классического радиуса электрона $r_0 = e^2/mc^2$. Например, выражение (252) можно записать как $r_0^2 \cos^2 \alpha$, где α — угол между направлениями начальной и конечной поляризаций (предполагается их линейность).

меры порядка $1/m$, и эффекты, обусловленные его структурой¹⁾, по порядку величины равны k/m . В нерелятивистском пределе они определяются вторым слагаемым в выражении (249). С ростом энергии налетающего фотона квантовая природа электрона проявляется все отчетливее, становится все более существенной для описания процесса рассеяния и наблюдаются растущие и ярко выраженные отклонения от предсказаний классической теории.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $\Phi(r)$ — вещественное скалярное поле, которое было введено в разделе I, и мы хотим измерить интеграл от этой наблюдаемой по конечной области. Точнее, рассмотрим интеграл

$$\hat{\Phi} = \int \Phi(r) P(r) dr,$$

где $P(r)$ — вещественная неотрицательная функция, интеграл от которой по всему пространству равен 1. Положим

$$\chi(x) = \int \exp(i\pi r) P(r) dr \quad (\chi(0) = 1).$$

Показать, что статистическое распределение $\hat{\Phi}$ по вакуумному состоянию является гауссовым и что

$$(\Delta\hat{\Phi})^2 = \int \frac{|\chi(x)|^2}{16\pi^3 (\mu^2 + x^2)^{1/2}} dx.$$

В частности, если весовая функция $P(r)$ сосредоточена в области с линейными размерами a и $\mu a \ll 1$, то $\Delta\hat{\Phi} \approx 1/a$.

Рассмотреть эту же задачу для электромагнитного поля и показать, что $\Delta\mathcal{E}_\perp \approx \Delta\mathcal{H} \approx 1/a^2$.

2. Показать, что определенная в § 11 поправка к массе δM с точностью до второго порядка дается выражением, стоящим в правой части уравнения (76).

3. Рассмотрим задачу упругого рассеяния из § 14. Будем считать мишень неполяризованной, и угол рассеяния обозначим θ : $\cos\theta = \mathbf{k}_f \cdot \mathbf{k}_i / k^2$. Показать, что во втором порядке борновского приближения и в длинноволновом пределе ($k(R) \ll 1$) угловое распределение квантов при упругом рассеянии пропорционально $\cos^2\theta$ и сечение рассеяния стремится к нулю в пределе $k \rightarrow 0$ (это свойство характеризует скалярную связь).

4. Рассмотрим резонансное рассеяние из § 15, используя введенные там обозначения. Предположим, что момент импульса атомной системы в начальном состоянии $|\alpha\rangle$ равен нулю, а момент импульса резонансного состояния $|\lambda\rangle$ равен l . Показать, что если пренебречь вкладом $A^{(\text{нот})}$, то амплитуда пере-

¹⁾ Такие эффекты в классической теории по порядку величины равны ke^2/m — отношению классического радиуса электрона к длине электромагнитных волн.

хода T для процесса упругого рассеяния $k_i \rightarrow k_f$ дается формулой

$$T = \frac{\Gamma}{\omega L^3} \frac{2l+1}{k} P_l(\cos \theta) \frac{\Gamma_{\lambda \rightarrow \alpha}}{(E - E_\lambda - \delta E_\lambda) + \frac{1}{2} i \Gamma_\lambda},$$

где θ — угол рассеяния, а $\Gamma_{\lambda \rightarrow \alpha}$ — вероятности радиационного перехода $\lambda \rightarrow \alpha$ (см. ур. (82)). В качестве следствия получить формулу упругого рассеяния

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \frac{(2l+1)^2}{k^2} P_l^2(\cos \theta) \frac{\Gamma_{\lambda \rightarrow \alpha}^2}{4(E - E_\lambda - \delta E_\lambda)^2 + \Gamma_\lambda^2}.$$

Показать, что эти выражения являются простым обобщением тех, которые были получены для резонансного рассеяния частицы на центральном потенциале (ур. (Х. 64) и (Х. 65)), и что приведенные в § X. 15 и X. 16 обсуждения понятий резонанса и метастабильного состояния применимы и в этом случае.

5. Пусть $A_j(r)$ и $\mathcal{E}_j(r')$ обозначают соответственно j и i компоненты потенциала A (в радиационной калибровке) и поперечного электрического поля \mathbf{E}_\perp . Доказать, что выполняются коммутационные соотношения

$$[\mathcal{E}_i(r), A_j(r')] = 4\pi i \theta_{ij}(r - r'),$$

где

$$\theta_{ij}(r - r') = \delta_{ij} \delta(r - r') - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x'_j} \left(\frac{1}{4\pi |r - r'|} \right)$$

$(\theta_{ii}(r - r'))$ — проектор на подпространство поперечных векторных полей).

6. Вывести для полного импульса свободного электромагнитного поля формулу (220).

7. Показать, что для внутреннего момента импульса излучения $\mathbf{G}^{(s)}$ справедлива формула

$$\mathbf{G}^{(s)} = -i \sum_{k\omega\omega'} \mathbf{a}_{(k\omega)}^\dagger \mathbf{a}_{(k\omega')} (\mathbf{e}^{(\omega)*} \times \mathbf{e}^{(\omega)})$$

(обозначения § 27). В частности, если N_{k+} и N_{k-} — обозначают число правови- и левополяризованных фотонов с импульсом k (см. ур. (222)), то имеем

$$\mathbf{G}^{(s)} = \sum_k (N_{k+} - N_{k-}) \mathbf{k}/k.$$

8. Доказать равенства (223) и (224).

9. 1° Пусть $u^{LM}(r)$ — скалярное поле, которое преобразуется при вращениях как сферическая функция $Y_L^M(\theta, \phi)$, а $V(r, p)$ — (полярный или аксиальный) вектор, построенный из векторов r и p . Показать, что векторное поле $U^{LM}(r)$, определяемое равенством

$$U^{LM}(r) = V(r, -i\nabla) u^{LM}(r),$$

где V — действующий на функцию u^{LM} оператор, задает состояние с моментом импульса (LM) .

(В силу этого утверждения определенные в § 29 векторные поля Λ_{kjm} в $\Theta_{kjm}^{(\pm)}$ задают состояния с моментом импульса (jm)).

2° Точно так же, как 3-компонентная волновая функция частицы спина 1 образует векторное поле, $(2s + 1)$ -компонентная волновая функция частицы целого спина s образует неприводимое тензорное поле порядка $(2s + 1)$. Пусть $X_{\mu}^{(s)}(r, p)$ есть μ -компоненты неприводимого тензора порядка s , построенного из векторов r и p . Показать, что тензорное поле $U_{\mu}^{LM}(r)$, μ -компоненты которого определены равенством

$$U_{\mu}^{LM}(r) = X_{\mu}^{(s)}(r, -i\nabla) u^{LM}(r) \quad (\mu = -s, \dots, +s),$$

задает состояние частицы спина s с моментом импульса (LM) .

10. Используя явные формулы для матричных элементов уравнений (241а, б), показать, что вероятность излучения фотона обращается в нуль, если спины начального и конечного состояний равны нулю ($0 \rightarrow 0$ правила отбора).

(N. B. Это свойство становится очевидным, если вместо разложения по плоским волнам использовать разложение по мультипольям).

11. Вычислить вероятность за единицу времени радиационного перехода $2p \rightarrow 1s$ в атоме водорода (ответ: $w_{2p \rightarrow 1s} = 6,25 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$).

12. Показать, что в длинноволновом приближении вероятность магнитно-дипольного радиационного перехода $\lambda \rightarrow \mu k e$ (обозначения § 30) дается формулой (см. ур. (245))

$$w_{\lambda \rightarrow \mu k e} = \frac{k}{2\pi} |\langle \lambda | [M(e \times k)] | \mu \rangle|^2,$$

где M — полный магнитный момент атомной системы

$$M = \frac{e}{2m} \sum_i (l_i + 2s_i).$$

(N. B. Эта формула дает правильный ответ для вероятности радиационного перехода, если $\Delta\Pi = +1$ и $j_{\lambda} + j_{\mu} \leq 1$; если же $j_{\lambda} + j_{\mu} \geq 2$, то вклад электрического квадрупольного момента отличен от нуля, и, вообще говоря, им нельзя пренебречь).

Вывести отсюда, что вероятность полного магнитного дипольного перехода дается формулой (см. ур. (247))

$$w_{\lambda \rightarrow \mu}^{(\text{tot})} = \frac{4k^3}{3(2j_{\lambda} + 1)} |\langle \lambda || M || \mu \rangle|^2.$$

Показать, что для перехода $2s \rightarrow 1s$ в атоме водорода эта величина в иерархическом приближении исчезает (т. е., если использовать волновую функцию теории Шредингера).

13. Вычислить сечение фотоэлектрического эффекта на основном состоянии атома водорода. Предположим, что $me^4 \ll k \ll m$ (m — масса электрона, k — импульс налетающего фотона, $\hbar = c = 1$). Следовательно, переданная фотозелектрону энергия достаточно велика для того, чтобы его конечное состоя-

ние можно было считать плоской волной, а его скорость достаточно мала для того, чтобы можно было рассматривать его как нерелятивистскую частицу. Поскольку магнитное взаимодействие (член $H^{(II)}$) дает пренебрежимо малый вклад, то находим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4\sqrt{2} e^8 \left(\frac{m}{k}\right)^{7/2} \cdot \frac{e^4}{m^2} \frac{\cos^2 \varphi}{(1 - v \cos \theta)^4},$$

где φ, θ обозначают соответственно углы между направлением излучения и направлениями поляризации (линейной) и импульса налетающего фотона. Считая в этой формуле $v = 0$, получаем результат полуклассической теории (см. задачу XVII. 2).