ДОПОЛНЕНИЕ В[1])

КОЭФФИЦИЕНТЫ ВЕКТОРНОГО СЛОЖЕНИЯ И МАТРИЦЫ ВРАЩЕНИЯ

§ 1. Момент импульса. Основные обозначения и принятые соглашения

В данном приложении приняты следующие условные обозначения, относящиеся к моменту импульса.

Постоянная Планка: $\hbar = 1$.

Составляющие момента импульса: $\boldsymbol{J}$ — оператор момента импульса, имеющий декартовы компоненты J_x, J_y, J_z

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y. \tag{1}$$

Коммутационные соотношения:

$$[J_x, J_y] = iJ_z, \quad [J_y, J_z] = iJ_x, \quad [J_z, J_x] = iJ_y, \tag{2}$$

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = 2J_z. \tag{3}$$

Базисные векторы в стандартном $\{J^2 J_z\}$-представлении $|\tau JM\rangle$

$$J^2 \,|\, \tau JM\rangle = J(J+1) \,|\, \tau JM\rangle, \tag{4}$$

$$J_z \,|\, \tau JM\rangle = M \,|\, \tau JM\rangle, \tag{5}$$

$$J_{\pm} \,|\, \tau JM\rangle = \sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)} \,|\, \tau J\, M \pm 1\rangle, \tag{6}$$

$$\langle \tau JM \,|\, \tau' J' M' \rangle = \delta_{\tau\tau'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \tag{7}$$

(J — целое или полуцелое число $\geqslant 0$, $M = -J, -J+1, \ldots, +J$). Буквой τ обозначены квантовые числа, которые следует добавить к J и M для того, чтобы получить полный набор; далее, там где это не ведет к недоразумению, индекс τ будет опущен.

Раздел I. КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША — ГОРДАНА (К. — Г.) И «3j»-СИМВОЛЫ

§ 2. Определение и основные обозначения

Пусть $\boldsymbol{j}_1$ и $\boldsymbol{j}_2$ — моменты импульсов квантовых систем 1 и 2 соответственно, а $\boldsymbol{J}$ — момент импульса полной системы, составленный из систем 1 и 2,

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2. \tag{8}$$

---

[1]) Это Дополнение подготовлено в сотрудничестве с Дж. Горовицем. Для более полного ознакомления с этими вопросами см. в первую очередь работу *А. Е. Эдмонс.* Угловые моменты в квантовой механике (в сб.: «Деформация атомных ядер», М., ИЛ, 1958), где приведены ссылки на основные работы. Рекомендуется также *U. Fano, G. Racah.* Irreducible tensorial sets, N. Y., Academic Press, 1959

Тензорное произведение $(2j_1+1)$ векторов системы 1

$$|j_1m_1\rangle \quad (j_1 \text{ фиксировано, } m_1=-j_1, \ldots, +j_1)$$

с $(2j_2+1)$ векторами системы 2

$$|j_2m_2\rangle \quad (j_2 \text{ фиксировано, } m_2=-j_2, \ldots, +j_2)$$

дает $(2j_1+1)(2j_2+1)$ собственных векторов операторов $j_1^2, j_2^2, j_{1z}, j_{2z}$

$$|j_1j_2m_1m_2\rangle \equiv |j_1m_1\rangle|j_2m_2\rangle, \tag{9}$$

из которых мы можем получить посредством унитарного преобразования $(2j_1+1)(2j_2+1)$ собственных векторов операторов j_1^2, j_2^2, J^2, J_z:

$$|j_1j_2JM\rangle \tag{10}$$
$$(J=|j_1-j_2|, \ldots, j_1+j_2;\ M=-J, \ldots, +J).$$

Определение. Коэффициенты Клебша — Гордана [1]) или коэффициенты векторного сложения

$$\langle j_1j_2m_1m_2|JM\rangle$$

являются коэффициентами унитарного преобразования

$$|j_1j_2JM\rangle=\sum_{m_1m_2}|j_1j_2m_1m_2\rangle\langle j_1j_2m_1m_2|JM\rangle. \tag{11}$$

Выбор фазового множителя [2]). Мы закончим определение векторов в (9) и (10), фиксируя их относительные фазовые множители следующим образом:

(i) векторы $|j_1m_1\rangle$, $|j_2m_2\rangle$ и $|j_1j_2JM\rangle$ удовлетворяют соотношениям (6);
(ii) $\langle j_1j_2j_1(j_1-J)|JJ\rangle$ — вещественная величина (>0);
«$3j$»-символы Вигнера [3]):

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \equiv \frac{(-1)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}}\langle j_1j_2m_1m_2|JM\rangle. \tag{12}$$

---

[1]) Для коэффициентов Клебша — Гордана в литературе используются различные обозначения. Приведем основные:

$\langle j_1j_2m_1m_2|j_1j_2JM\rangle$ (*Е. Кондон, Т. Шортли.* Теория атомных спектров. М., ИЛ, 1949).

$C_{j_1j_2}(JM;\ m_1m_2)$ (*Дж. Блатт, В. Вайскопф.* Теоретическая ядерная физика. М., ИЛ, 1954).

$S^{j_1j_2}_{Jm_1m_2}$ (*Е. П. Вигнер.* Теория групп и ее применение в квантовой механике. М., ИЛ, 1961).

[2]) Такой выбор используется большинством автором, в частности, Вигнером, Кондоном и Шортли, Блаттом и Вайскопфом, loc. cit. и *G. Racah.* Phys. Rev. 62, 437 (1942).

[3]) Рака (см. предыдущую ссылку) использует обозначение

$$V(abc,\ \alpha\beta\gamma) \equiv (-1)^{a-b-c}\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \equiv \frac{(-1)^{c-\gamma}}{\sqrt{2c+1}}\langle ab\alpha\beta|c\ -\gamma\rangle.$$

§ 3. Основные свойства коэффициентов К. — Г.

Вещественность:

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \mid JM\rangle^* = \langle j_1 j_2 m_1 m_2 \mid JM\rangle.$$

Правила отбора:

(i) $m_1 + m_2 = M$;
(ii) $|j_1 - j_2| \leqslant J \leqslant j_1 + j_2$ («неравенство треугольника»).
Если эти два соотношения не выполняются, то $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \mid JM\rangle = 0$.

Симметрия: Символ $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$

(i) инвариантен при циклической перестановке столбцов;
(ii) умножается на $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ при перестановке двух столбцов;
(iii) умножается на $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ при одновременном изменении знака m_1, m_2, m_3.

Следствия:

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \mid JM\rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 \mid JM\rangle = \tag{13а}$$

$$= (-1)^{j_1-J+m_2} \sqrt{\frac{2J+1}{2j_1+1}} \langle J j_2 M - m_2 \mid j_1 m_1\rangle = \tag{13б}$$

$$= (-1)^{j_2-J-m_1} \sqrt{\frac{2J+1}{2j_2+1}} \langle j_1 J - m_1 M \mid j_2 m_2\rangle = \tag{13в}$$

$$= (-1)^{j_1+j_2-J} \langle j_1 j_2 - m_1 - m_2 \mid J - M\rangle. \tag{13г}$$

Соотношения ортогональности:

$$\sum_{m_1=-j_1}^{+j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{+j_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 \mid JM\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 \mid J'M'\rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'}, \tag{14а}$$

$$(|j_1 - j_2| \leqslant J \leqslant j_1 + j_2;\ -J \leqslant M \leqslant J)$$

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^{+J} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 \mid JM\rangle \langle j_1 j_2 m_1' m_2' \mid JM\rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}, \tag{14б}$$

$$(-j_1 \leqslant m_1 \leqslant +j_1;\ -j_2 \leqslant m_2 \leqslant +j_2)$$

$$\sum_{m_1=-j_1}^{+j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{+j_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ m_1 & m_2 & m_3' \end{pmatrix} = \frac{1}{2j_3+1} \delta_{j_3 j_3'} \delta_{m_3 m_3'}, \tag{15а}$$

$$\sum_{j_3=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m_3=-j_3}^{+j_3} (2j_3+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3 \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}. \tag{15б}$$

Соотношение для сферических функций:

$$\int Y_{l_1}^{m_1}(\Omega)\, Y_{l_2}^{m_2}(\Omega)\, Y_{l_3}^{m_3}(\Omega)\, d\Omega =$$

$$= \left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi}\right]^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

отсюда следует

$$Y_{l_1}^{m_1}(\Omega)\,Y_{l_2}^{m_2}(\Omega)=\sum_{L=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2}\sum_{M=-L}^{L}\left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2L+1)}\right]^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\langle l_1l_200\,|\,L0\rangle\langle l_1l_2m_1m_2\,|\,LM\rangle\,Y_L^M(\Omega)= \quad (17а)$$

$$=\sum_{L=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2}\sum_{M=-L}^{L}(-1)^M\left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2L+1)}{4\pi}\right]^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L\\ m_1 & m_2 & M\end{pmatrix}Y_L^{-M}(\Omega). \quad (17б)$$

§ 4. Методы вычисления

Рекуррентные соотношения. Приведем соотношения между коэффициентами К. — Г., аргументы которых отличаются на величины:

(i) $\Delta J=0,\ \Delta M=+1$

$$\sqrt{J(J+1)-M(M+1)}\,\langle j_1j_2m_1m_2\,|\,JM\rangle=$$
$$=\sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1+1)}\,\langle j_1j_2\,m_1+1\,m_2\,|\,J\,M+1\rangle+$$
$$+\sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2+1)}\,\langle j_1j_2\,m_1m_2+1\,|\,J\,M+1\rangle. \quad (18)$$

(ii) $\Delta J=0,\ \Delta M=-1,$

$$\sqrt{J(J+1)-M(M-1)}\,\langle j_1j_2m_1m_2\,|\,JM\rangle=$$
$$=\sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1-1)}\,\langle j_1j_2\,m_1-1\,m_2\,|\,J\,M-1\rangle+$$
$$+\sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2-1)}\,\langle j_1j_2m_1\,m_2-1\,|\,J\,M-1\rangle. \quad (19)$$

(iii) $\Delta J=\pm 1,\ \Delta M=0,$

$$A_0\langle j_1j_2m_1m_2\,|\,JM\rangle=A_+\langle j_1j_2m_1m_2\,|\,J+1\,M\rangle+A_-\langle j_1j_2m_1m_2\,|\,J-1M\rangle, \quad (20)$$

где

$$A_0=m_1-m_2+M\frac{j_2(j_2+1)-j_1(j_1+1)}{J(J+1)}\qquad(M=m_1+m_2),$$
$$A_+=f(J+1),\quad A_-=f(J),$$
$$f(x)=\sqrt{x^2-M^2}\left[\frac{[(j_1+j_2+1)^2-x^2]\,[x^2-(j_1-j_2)^2]}{4x^2(2x-1)(2x+1)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Формула Рака:

$$\begin{pmatrix} a & b & c\\ \alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}=(-1)^{a-b-\gamma}\sqrt{\Delta(abc)}\times$$
$$\times\sqrt{(a+\alpha)!\,(a-\alpha)!\,(b+\beta)!\,(b-\beta)!\,(c+\gamma)!\,(c-\gamma)!}\times$$
$$\times\sum_t(-1)^t\,[t!\,(c-b+t+\alpha)!\,(c-a+t-\beta)!\,(a+b-c-t)!\times$$
$$\times(a-t-\alpha)!\,(b-t+\beta)!]^{-1} \quad (21)$$
$$(\alpha+\beta+\gamma=0,\ |a-b|\leqslant c\leqslant a+b),$$

где

$$\Delta(abc)=\frac{(a+b-c)!\,(b+c-a)!\,(c+a-b)!}{(a+b+c+1)!}. \quad (22)$$

Суммирование происходит по всем целым значениям t, для которых факториалы имеют смысл, т. е. для которых аргументы факториалов положительны или равны нулю ($0! = 1$). Число членов в этой сумме равно $\nu + 1$, где ν — наименьшее из девяти чисел:

$$a \pm \alpha, \qquad b \pm \beta, \qquad c \pm \gamma,$$
$$a + b - c, \qquad b + c - a, \qquad c + a - b.$$

§ 5. Специальные значения и таблицы

Специальные значения

(i) Если J и M принимают наибольшее значение, то

$$\langle j_1 j_2 j_1 j_2 \mid j_1 + j_2 \;\; j_1 + j_2 \rangle = 1.$$

(ii) Если одно из j равно нулю, то

$$\langle j0m0 \mid jm \rangle = 1 \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}}$$

(iii) $m_1 = m_2 = m_3 = 0$:

если $l_1 + l_2 + l_3$ нечетно, то

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{23а}$$

если $2p = l_1 + l_2 + l_3$ четно, то

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^p \sqrt{\Delta(l_1 l_2 l_3)} \frac{p!}{(p - l_1)!\,(p - l_2)!\,(p - l_3)!} \tag{23б}$$

(l_1, l_2, l_3 — целые числа $\geqslant 0$, удовлетворяющие неравенствам треугольника).

Специальные случаи формулы Рака. Следующие формулы, а также те, которые получаются при использовании соотношений симметрии, дают коэффициенты К. — Г. в специальных случаях:

(i) $m_1 = \pm j_1$, или $m_2 = \pm j_2$, или $M = \pm J$:

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \mid JJ \rangle = \langle j_2 j_1 \; -m_2 \; -m_1 \mid J \; -J \rangle =$$
$$= (-1)^{j_1 - m_1} \sqrt{\frac{(2J+1)!\,(j_2 + j_2 - J)!}{(j_1 + j_2 + J + 1)!\,(J + j_1 - j_2)!\,(J + j_2 - j_1)!}} \times$$
$$\times \sqrt{\frac{(j_1 + m_1)!\,(j_2 + m_2)!}{(j_1 - m_1)!\,(j_2 - m_2)!}} \quad (m_1 + m_2 = J). \tag{24}$$

(ii) одно из j есть сумма двух других:

если $J = j_1 + j_2$, то

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \mid JM \rangle =$$
$$= \sqrt{\frac{(2j_1)!\,(2j_2)!}{(2J)!}} \sqrt{\frac{(J+M)!\,(J-M)!}{(j_1 + m_1)!\,(j_1 - m_1)!\,(j_2 + m_2)!\,(j_2 - m_2)!}}, \tag{25}$$

$$\langle J j_2 M \; -m_2 \mid j_1 m_1 \rangle = (-1)^{j_2 - m_2} \sqrt{\frac{2j_1 + 1}{2J + 1}} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 \mid JM \rangle. \tag{26}$$

Таблицы «3j»-символов. Таблицы I—IV дают выражения для символа

$$\begin{pmatrix} j & s & (j+e) \\ m & \mu & (-m-\mu) \end{pmatrix}$$

как функции j и m для значений $s=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2;\ 0\leqslant e\leqslant s;\ 0\leqslant\mu\leqslant s$.

Таблица I

Таблица Φ^0_{00} и $\Phi^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$

$s=0$	$\Phi^0_{00}=1$
$s=\frac{1}{2}$	$\Phi^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=1$

Таблица II

Таблица $\Phi^1_{\mu e}$.

$s=1$	$e=0$	$e=1$
$\mu=0$	$-2m$	$-\sqrt{2(j-m+1)}$
$\mu=1$	$-\sqrt{2(j-m)}$	1

Таблица III

Таблица $\Phi^{\frac{3}{2}}_{\mu e}$

$s=\frac{3}{2}$	$e=\frac{1}{2}$	$e=\frac{3}{2}$
$\mu=\frac{1}{2}$	$j-3m$	$-\sqrt{3(j-m+1)}$
$\mu=\frac{3}{2}$	$-\sqrt{3(j-m)}$	1

Таблица IV

Таблица $\Phi^2_{\mu e}$

$s=2$	$e=0$	$e=1$	$e=2$
$\mu=0$	$2[3m^2-j(j+1)]$	$2m\sqrt{6(j-m+1)}$	$\sqrt{6(j-m+2)(j-m+1)}$
$\mu=1$	$(2m+1)\sqrt{6(j-m)}$	$2(j-2m)$	$-2\sqrt{j-m+1}$
$\mu=2$	$\sqrt{6(j-m)(j-m-1)}$	$-2\sqrt{(j-m)}$	1

Используя эти выражения, а также соотношения симметрии, мы можем просто вычислить любые из коэффициентов К. — Г., для которых одно из j равно $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ или 2.

В таблицах приведены значения функций $\Phi^s_{\mu e}(jm)$, которые определяются посредством соотношений

$$\begin{pmatrix} j & s & (j+e) \\ m & \mu & (-m-\mu) \end{pmatrix} = (-1)^{j+m} \sqrt{\frac{(2j+e-s)!}{(2j+e+s+1)!} \frac{(j+m+\mu+e)!}{(j+m)!}}\, \Phi^s_{\mu e}. \tag{27}$$

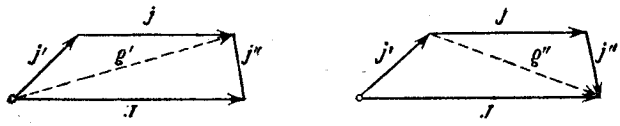
Раздел II. КОЭФФИЦИЕНТЫ РАКА И «6j»-СИМВОЛЫ

§ 6. Определение и основные обозначения

Сложение трех моментов импульса. Пусть $\boldsymbol{J}$ — полный момент импульса системы, которая состоит из трех отдельных частей, обладающих моментами $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}', \boldsymbol{j}''$ соответственно:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}' + \boldsymbol{j}''.$$

В $(2j+1)(2j'+1)(2j''+1)$-мерном пространстве, натянутом на векторы $|mm'm''\rangle \equiv |jm\rangle\,|j'm'\rangle\,|j''m''\rangle$ (j, j', j'' — заданы; m, m', m'' — переменные), подпространство момента (JM) обычно имеет размерность, большую единицы ($2J$ и $2M$ — целые числа, четные или нечетные в зависимости от числа $2(j+j'+j'')$; $\min|j \pm j' \pm j''| \leqslant J \leqslant j+j'+j''$; $-J \leqslant M \leqslant +J$).



а) $j'+j=g'$, $g'+j''=J$ б) $j+j''=g''$, $j'+g''=J$

Рис. 28. $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}' + \boldsymbol{j}''$. Различные схемы сложения.

Следующие две схемы сложения дают конструкцию двух, вообще говоря, различных систем базисных векторов из этого подпространства[1]):

а) $\boldsymbol{j}' + \boldsymbol{j} = \boldsymbol{g}'$, $\boldsymbol{g}' + \boldsymbol{j}'' = \boldsymbol{J}$ (рис. 28, *а*) — векторы $|(j'j)\,g', j''; JM\rangle$

$$|(j'j)\,g', j''; JM\rangle = \sum_{\substack{mm'm'' \\ \mu'}} |mm'm''\rangle\langle j'jm'm\,|\,g'\mu'\rangle\langle g'j''\mu'm''\,|JM\rangle.$$

б) $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}'' = \boldsymbol{g}''$, $\boldsymbol{j}' + \boldsymbol{g}'' = \boldsymbol{J}$ (рис. 28, *б*) — векторы $|j', (jj'')\,g''; JM\rangle$

$$|j', (jj'')\,g''; JM\rangle = \sum_{\substack{mm'm'' \\ \mu''}} |mm'm''\rangle\langle jj''mm''\,|\,g''\mu''\rangle\langle j'g''m'\mu''\,|\,JM\rangle.$$

Можно перейти от одной системы к другой с помощью некоторого унитарного преобразования.

Определение «6j»-символов Вигнера $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix}$.

---

[1]) Здесь важен порядок, в котором складываются различные векторы. При изменении порядка, например, векторов $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{j}''$ при сложении по схеме (а) изменяется знак результирующего вектора.

Эти символы связаны с коэффициентами упомянутого унитарного преобразования посредством соотношений

$$\langle j', (jj'')\, g''; \; JM \,|\, (j'j)\, g', j''; \; J'M' \rangle = \\ = \delta_{JJ'}\delta_{MM'} \sqrt{(2g'+1)(2g''+1)}\, (-1)^{J+J'+j''+j} \begin{Bmatrix} j' & j & g' \\ j'' & J & g'' \end{Bmatrix}, \tag{28}$$

$$|(j'j)\, g', j''; \; JM\rangle = \sum_{g''} |j', (jj'')\, g''; \; JM\rangle \times \\ \times \sqrt{(2g'+1)(2g''+1)}\, (-1)^{J+J'+j''+j} \begin{Bmatrix} j' & j & g' \\ j'' & J & g'' \end{Bmatrix}. \tag{29}$$

W-коэффициенты Рака[1]). Рака использовал коэффициенты W, которые совпадают с «6j»-символами с точностью до знака:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+J_1+J_2}\, W\,(j_1 j_2 J_2 J_1;\; j_3 J_3). \tag{30}$$

Присоединенные коэффициенты. В выражениях для угловых распределений иногда встречаются коэффициенты $Z(LJL'J';\, j\lambda)$ и $F_\lambda(LL'J_1J_2)$, для которых имеются подробные таблицы и которые определяются соотношениями:

$$Z(LJL'J';\, j\lambda) = (-1)^{J+J'+\frac{1}{2}(L'-L+\lambda)} \times \\ \times \sqrt{(2L+1)(2L'+1)(2J+1)(2J'+1)(2\lambda+1)} \begin{pmatrix} L & L' & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L & L' & \lambda \\ J' & J & j \end{Bmatrix}. \tag{31а}$$

$$F_\lambda(LL'J_1J_2) = (-1)^{J_1+J_2-1} \times \\ \times \sqrt{(2L+1)(2L'+1)(2J_2+1)(2\lambda+1)} \begin{pmatrix} L & L' & \lambda \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L & L' & \lambda \\ J_2 & J_2 & J_1 \end{Bmatrix}. \tag{31б}$$

Коэффициенты $F_\lambda(LL'J_1J_2)$ используются главным образом в тех случаях, когда в результате реакции появляются частицы со спином 1 и не регистрируется поляризация.

Присоединенный тетраэдр для «6j»-символов. Чтобы избежать путаницы при обращении с W-коэффициентами и «6j»-символами, удобно связать с каждым символом $\begin{Bmatrix} j' & j & g' \\ j'' & J & g'' \end{Bmatrix}$ некоторый тетраэдр, каждое ребро которого представляет один из шести моментов импульса, входящих в этот символ (рис. 29). В этом представлении каждая пара противолежащих ребер ассоциируется с двумя моментами данного столбца, а три момента первой строки соответствуют ребрам одной из граней тетраэдра. Кроме того, каждая грань соответствует трем моментам импульса, один из которых получен с помощью векторного сложения двух других, как это следует из определения «6j»-символов.

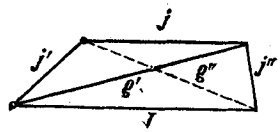


Рис. 29. Тетраэдр, ассоциированный с символом $\begin{Bmatrix} j' & j & g' \\ j'' & J & g'' \end{Bmatrix}$.

---

[1]) *Racah*, loc. cit. Знаковый множитель исчезает из двух предыдущих соотношений при подстановке W вместо «6j»-символов. Однако «6j»-символы имеют более простые соотношения симметрии (см. § 7).

§ 7. Основные свойства «6j»-символов

Вещественность. Все «6j»-символы вещественны.

Правила отбора. Для того чтобы

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix} \neq 0,$$

три момента импульса, составляющие каждую грань тетраэдра, должны быть таковы, чтобы каждой из них был векторной суммой двух других. Иными словами, необходимо, чтобы элементы каждой тройки

$$(j_1j_2j_3),\ (j_1J_2J_3),\ (J_1j_2J_3),\ (J_1J_2j_3):$$

(i) удовлетворяли неравенствам треугольника;

(ii) имели целочисленную сумму

(*N. B.* Отметим, что каждое из шести j — целое, или три j одной и той же грани — целые, или же два j, соответствующие противоположным ребрам, — целые числа.)

Соотношение симметрии. «6j»-символы инвариантны:

(i) относительно перестановки столбцов, т. е.

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ J_2 & J_1 & J_3 \end{Bmatrix};$$

(ii) относительно перестановки двух элементов первой строки с двумя соответствующими элементами второй строки, т. е.

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & j_3 \\ j_1 & j_2 & J_3 \end{Bmatrix}.$$

Иначе говоря, для задания «6j»-символа достаточно задать шесть моментов импульса и их относительное расположение на присоединенном тетраэдре.

Основные соотношения между «6j»-символами и коэффициентами К. — Г. Следующие соотношения связывают символ $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix}$ с коэффициентами К. — Г., которые составлены из троек $(j_1j_2j_3)$, $(j_1J_2J_3)$, $(J_1j_2J_3)$, $(J_1J_2j_3)$, соответствующих четырем граням присоединенного тетраэдра:

$$\sum_{\substack{M_1M_2M_3 \\ m_1m_2}} (-1)^{J_1+J_2+J_3+M_1+M_2+M_3} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & j_3 \\ M_1 & -M_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_2 & J_3 & j_1 \\ M_2 & -M_3 & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_3 & J_1 & j_2 \\ M_3 & -M_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ m_1 & m_2 & m_3' \end{pmatrix} =$$

$$= \delta_{j_3j_3'}\delta_{m_3m_3'} \frac{1}{2j_3+1} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix}. \qquad (32)$$

(*N. B.* Фактически суммирование сводится к суммированию по двум индексам, поскольку M и m связаны.)

$$\sum_{M_1M_2M_3} (-1)^{J_1+J_2+J_3+M_1+M_2+M_3} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & j_3 \\ M_1 & -M_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_2 & J_3 & j_1 \\ M_2 & -M_3 & m_1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} J_3 & J_1 & j_2 \\ M_3 & -M_1 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix}. \qquad (33)$$

(*N.B.* Здесь индекс суммирования только один.)

$$\sum_{M_3} (-1)^{j_2+J_2-m_1-M_1} \begin{pmatrix} j_1 & J_2 & J_3 \\ m_1 & M_2 & -M_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_3 & j_2 & J_1 \\ M_3 & m_2 & -M_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j_3 m_3} (2j_3+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & J_2 & J_1 \\ m_3 & M_2 & -M_1 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

(*N.B.* Суммы по M_3 и m_3 имеют всего лишь одно слагаемое.)

Соотношения Рака—Эллиота и соотношение ортогональности:

$$\sum_x (-1)^{2x} (2x+1) \begin{Bmatrix} a & b & x \\ a & b & f \end{Bmatrix} = 1, \quad (35а)$$

$$\sum_x (-1)^{a+b+x} (2x+1) \begin{Bmatrix} a & b & x \\ b & a & f \end{Bmatrix} = \delta_{f_1} \sqrt{(2a+1)(2b+1)}, \quad (35б)$$

$$\sum_x (2x+1) \begin{Bmatrix} a & b & x \\ c & d & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & x \\ a & b & g \end{Bmatrix} = \delta_{fg} \frac{1}{2f+1}, \quad (35в)$$

$$\sum_x (-1)^{f+g+x} (2x+1) \begin{Bmatrix} a & b & x \\ c & d & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & x \\ b & a & g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & d & f \\ b & c & g \end{Bmatrix}, \quad (35г)$$

$$\sum_x (-1)^{a+b+c+d+e+f+g+h+x+l} (2x+1) \begin{Bmatrix} a & b & x \\ c & d & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & x \\ e & f & h \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} e & f & x \\ b & a & j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g & h & j \\ e & a & d \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} g & h & j \\ f & b & c \end{Bmatrix}. \quad (35д)$$

§ 8. Формула Рака, таблицы

Формула Рака:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix} = [\Delta(j_1 j_2 j_3)\, \Delta(j_1 J_2 J_3)\, \Delta(J_1 j_2 J_3)\, \Delta(J_1 J_2 j_3)]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sum_t \frac{(-1)^t (t+1)!}{A(t, j_1, j_2, j_3, J_1, J_2, J_3)}, \quad (36)$$

где

$$A(t, j_1, \ldots, J_3) = (t-j_1-j_2-j_3)!\ (t-j_1-J_2-J_3)! \times$$
$$\times (t-J_1-j_2-j_3)!\ (t-J_1-J_2-j_3)!\ (j_1+j_2+J_1+J_2-t)! \times$$
$$\times (j_2+j_3+J_2+J_3-t)!\ (j_3+j_1+J_3+J_1-t)!$$

Определение $\Delta(abc)$ и соглашение о суммировании то же самое, что и в формуле (22). Число слагаемых в $\sum_t$ равно $1+\sigma$, где σ — наименьшее из двенадцати чисел:

$$j_1+j_2-j_3,\quad j_1+J_2-J_3,\quad J_1+j_2-J_3,\quad J_1+J_2-j_3,$$
$$j_2+j_3-j_1,\quad J_2+J_3-j_1,\quad j_2+J_3-J_1,\quad J_2+j_3-J_1,$$
$$j_3+j_1-j_2,\quad J_3+j_1-J_2,\quad J_3+J_1-j_2,\quad j_3+J_1-J_2.$$

Специальные случаи

(i) одно из j равно нулю

$$\begin{Bmatrix} j & j' & 0 \\ J & J' & g \end{Bmatrix} = (-1)^{j+J+g} \frac{\delta_{jj'}\delta_{JJ'}}{\sqrt{(2j+1)(2J+1)}} \quad (|j-J| \leqslant g \leqslant j+J); \tag{37}$$

(ii) одно из j равно $\frac{1}{2}$

$$\begin{Bmatrix} j & j+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ J & J+\frac{1}{2} & g+\frac{1}{2} \end{Bmatrix} = (-1)^{1+g+j+J} \left[\frac{(1+g+j-J)(1+g-j+J)}{(2j+1)(2j+2)(2J+1)(2J+2)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{38}$$

$$(|j-J| \leqslant g \leqslant j+J);$$

$$\begin{Bmatrix} j & j+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ J+\frac{1}{2} & J & g \end{Bmatrix} = (-1)^{1+g+j+J} \left[\frac{(1-g+j+J)(2+g+j+J)}{(2j+1)(2j+2)(2J+1)(2J+2)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{39}$$

$$(|j-J| \leqslant g \leqslant j+J).$$

Раздел III. **«9j»-СИМВОЛЫ**

§ 9. Определение и основные свойства

Сложение четырех моментов импульса и определение «9j»-символа. Пусть полный момент импульса $\boldsymbol{J}$ относится к системе, составленной из четырех отдельных систем, моменты которых соответственно равны $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{j}_2$, $\boldsymbol{j}_3$, $\boldsymbol{j}_4$:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2 + \boldsymbol{j}_3 + \boldsymbol{j}_4.$$

В $\prod_{i=1}^{4}(2j_i+1)$-мерном пространстве, натянутом на векторы

$$|m_1m_2m_3m_4\rangle \equiv \prod_{i=1}^{4} |j_im_i\rangle \quad (j_i - \text{const}, \ m_i \text{ меняются}),$$

следующие две схемы сложения ведут к двум различным системам базисных векторов подпространства с моментом импульса (JM):

а) $\boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2 = \boldsymbol{J}_{12}, \quad \boldsymbol{j}_3 + \boldsymbol{j}_4 = \boldsymbol{J}_{34}, \quad \boldsymbol{J}_{12} + \boldsymbol{J}_{34} = \boldsymbol{J},$

векторы $|(j_1j_2)J_{12}, (j_3j_4)J_{34}; JM\rangle$;

б) $\boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_3 = \boldsymbol{J}_{13}, \quad \boldsymbol{j}_2 + \boldsymbol{j}_4 = \boldsymbol{J}_{24}, \quad \boldsymbol{J}_{13} + \boldsymbol{J}_{24} = \boldsymbol{J},$

векторы $|(j_1j_3)J_{13}, (j_2j_4)J_{24}; JM\rangle$.

«9j»-символы Вигнера при этом определяются как коэффициенты унитарного преобразования от одного базиса к другому:

$$\langle (j_1j_2)\,J_{12},\ (j_3j_4)\,J_{34};\ JM \mid (j_1j_3)\,J_{13},\ (j_2j_4)\,J_{24};\ J'M'\rangle = \\ = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}\sqrt{(2J_{12}+1)(2J_{34}+1)(2J_{13}+1)(2J_{24}+1)}\times \\ \times\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix}. \qquad (40а)$$

Можно также определить «9j»-символы следующим образом:

$$\langle [(j_1j_2)\,J_{12},\ j_3]\,J_{123}j_4;\ JM \mid [(j_4j_2)\,J_{42},\ j_3]\,J_{423}j_1;\ J'M'\rangle = \\ = (-1)^{J_{423}+j_1-J_{123}-j_4}\delta_{JJ'}\delta_{MM'}\times \\ \times\sqrt{(2J_{12}+1)(2J_{123}+1)(2J_{42}+1)(2J_{423}+1)}\begin{Bmatrix} j_2 & J_{12} & j_1 \\ J_{42} & j_3 & J_{423} \\ j_4 & J_{123} & J \end{Bmatrix}. \qquad (40б)$$

Используется также обозначение

$$X\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix}.$$

Связь «9j»-символов с «3j»-символами:

$$\begin{pmatrix} J_{13} & J_{24} & J \\ M_{13} & M_{24} & M \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} = \sum_{\substack{m_1m_2m_3m_4 \\ M_{12}M_{34}}}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ m_1 & m_2 & M_{12} \end{pmatrix}\times \\ \times\begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J_{34} \\ m_3 & m_4 & M_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_3 & J_{13} \\ m_1 & m_3 & M_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_2 & j_4 & J_{24} \\ m_2 & m_4 & M_{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_{12} & J_{34} & J \\ M_{12} & M_{34} & M \end{pmatrix}. \qquad (40в)$$

Соотношения симметрии. Символ

$$\begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_4 & J_5 & J_6 \\ J_7 & J_8 & J_9 \end{Bmatrix}$$

(i) при перестановке двух строк или двух столбцов умножается на $(-1)^R$, где $R = \sum_{i=1}^{9} J_i$;

(ii) инвариантен при зеркальных отражениях относительно диагоналей.

Соотношение ортогональности:

$$\sum_{J_{13}J_{24}}(2J_{13}+1)(2J_{24}+1)\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J'_{12} \\ j_3 & j_4 & J'_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} = \frac{\delta_{J_{12}J'_{12}}\delta_{J_{34}J'_{34}}}{(2J_{12}+1)(2J_{34}+1)}.$$

Выражение «9j»-символов через «6j»-символы:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} = \sum_g (-1)^{2g}(2g+1)\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ J_{34} & J & g \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & J_{34} \\ j_2 & g & J_{24} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} J_{13} & J_{24} & J \\ g & j_1 & j_3 \end{Bmatrix}. \qquad (41)$$

Случай, когда одно из j равно нулю:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j_3 & j_4 & j' \\ g & g' & 0 \end{Bmatrix} = \delta_{jj'}\delta_{gg'} \frac{(-1)^{j_2+j_3+j+g}}{\sqrt{(2j+1)(2g+1)}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j_4 & j_3 & g \end{Bmatrix}. \tag{42}$$

Раздел IV. **МАТРИЦЫ ВРАЩЕНИЯ**

§ 10. Вращения. Операторы вращения. $R^{(J)}$-матрицы

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_u(\varphi) \text{ — вращение на угол } \varphi \text{ вокруг оси } \boldsymbol{u}, \\ &\mathcal{R}(\alpha\beta\gamma) \text{ — вращение на углы Эйлера } (\alpha, \beta, \gamma), \\ &\mathcal{R}(\alpha\beta\gamma) = \mathcal{R}_Z(\gamma)\,\mathcal{R}_u(\beta)\,\mathcal{R}_z(\alpha). \end{aligned} \tag{43}$$

Операции, написанные в правой части равенства, выполняются в порядке справа налево (см. рис. 30).

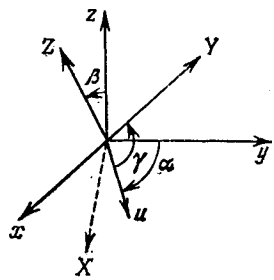


Рис. 30. Углы Эйлера $\alpha = (Oy, Ou)$, $\beta = (Oz, OZ)$, $\gamma = (Ou, OY)$.

Присоединенная матрица: матрица преобразования координат векторов (обозначена той же буквой $\mathcal{R}$, что и само вращение).

Если $\boldsymbol{V}(V_1, V_2, V_3)$ — некоторый вектор, а $\boldsymbol{V}'(V_1', V_2', V_3')$ — его преобразование при вращении $\mathcal{R}$, то имеем:

$V_i' = \mathcal{R}_{ij}V_j$, $\mathcal{R}_{ij}$ — элементы присоединенной матрицы.

(Следствие. Если $\boldsymbol{A}_j$ есть преобразование единичного вектора $\boldsymbol{a}_j$ вдоль j-й оси ($j = 1, 2, 3$), то получим:

$$\boldsymbol{A}_j \equiv \mathcal{R}[\boldsymbol{a}_j] = \boldsymbol{a}_i\mathcal{R}_{ij}, \quad \mathcal{R}_{ij} = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{A}_j).)$$

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R}, \quad \tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^{-1}, \quad \det\mathcal{R} = 1. \tag{44}$$

$$\mathcal{R}(\alpha\beta\gamma) \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\beta\cos\alpha - \sin\gamma\sin\alpha & -\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha & \sin\beta\cos\alpha \\ \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha + \sin\gamma\cos\alpha & -\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha + \cos\gamma\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha \\ -\cos\gamma\sin\beta & \sin\gamma\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Оператор вращения. Унитарный оператор R, примененный к вектору $|\rangle$, задает его преобразование при вращении $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R}[|\rangle] \equiv R|\rangle, \quad R^\dagger R = RR^\dagger = 1. \tag{46}$$

Если Q — наблюдаемая квантовой системы, то

$$\mathcal{R}[Q] \equiv RQR^{-1}. \tag{47}$$

Если $\boldsymbol{B} \equiv (B_x, B_y, B_z)$ есть векторный оператор, то $(B_i \equiv \boldsymbol{B}\boldsymbol{a}_i)$

$$\mathcal{R}[B_i] \equiv RB_iR^{-1} \equiv (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}_i) = \tilde{\mathcal{R}}_{ij}B_j. \tag{48}$$

(*N. B.* Здесь фигурирует преобразование, обратное к $\mathcal{R}$, а не само $\mathcal{R}$.)

Применение (48) к преобразованию компонент момента импульса $\boldsymbol{J}$ при вращении $\mathcal{R}(\alpha\beta\gamma)$ дает

$$RJ_{\pm}R^{-1} = e^{\mp i\gamma}\left[\frac{1+\cos\beta}{2}\, e^{\mp i\alpha}J_{\pm} - \frac{1-\cos\beta}{2}\, e^{\pm i\alpha}J_{\mp} - \sin\beta J_z\right], \tag{49а}$$

$$RJ_zR^{-1} = \frac{1}{2}\sin\beta\left(e^{-i\alpha}J_{+} + e^{i\alpha}J_{-}\right) + \cos\beta J_z. \tag{49б}$$

Выражение через составляющие полного момента импульса $\boldsymbol{J}$. Бесконечно малое вращение:

$$R_{\boldsymbol{u}}(\varepsilon) = 1 - i\varepsilon(\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{u}) \qquad (\varepsilon \ll 1). \tag{50}$$

Конечные вращения:

$$R_{\boldsymbol{u}}(\varphi) = e^{-i\varphi(\boldsymbol{J},\ \boldsymbol{u})}, \tag{51}$$

$$R(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha J_z}e^{-i\beta J_y}e^{-i\gamma J_z}. \tag{52}$$

Соответствие между вращениями и операторами вращения. Взаимнооднозначное соответствие, существующее между бесконечно малыми вращениями и операторами R, близкими к 1, может не иметь места в случае конечных вращений.

В общем случае любому конечному вращению $\mathcal{R}$ соответствуют два оператора R' и R'', удовлетворяющие уравнению

$$R'' = DR',$$

где оператор D определяется так:

$$D = \begin{cases} +1, & \text{если } J \text{ — целое,} \\ -1, & \text{если } J \text{ — полуцелое.} \end{cases}$$

Для равенства $R' = R''$ необходимо, чтобы пространство векторов состояния было образовано векторами, отвечающими только целым значениям J.

$$R_{\boldsymbol{u}}(2\pi) = D, \quad R_{\boldsymbol{u}}(4\pi) = 1.$$

Пусть $(\alpha\beta\gamma)$ и $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ — два набора углов Эйлера, определяющих одно и то же вращение (уравнение (XIII. 42)). Тогда

$$R(\alpha_1\beta_1\gamma_1) = D^{n_\alpha+n_\beta+n_\gamma}R(\alpha\beta\gamma). \tag{53}$$

Матрицы вращений $R^{(J)}(\alpha\beta\gamma)$. Это матрицы порядка $(2J+1)$ с элементами

$$R^{(J)}_{MM'} = \langle JM \mid R(\alpha\beta\gamma) \mid JM'\rangle = \langle JM \mid e^{-i\alpha J_z}\, e^{-i\beta J_y}\, e^{-i\gamma J_z} \mid JM'\rangle. \tag{54}$$

Векторы $|JM\rangle$ (J фиксировано, $M = -J, \ldots, +J$) есть собственные векторы операторов $\boldsymbol{J}^2$ и J_z, которые связаны друг с другом соотношениями (6).

Матрица $r^{(J)}(\beta)$:

$$r^{(J)}(\beta) \equiv R^{(J)}(0, \beta, 0),$$

$$r^{(J)}_{MM'}(\beta) \equiv \langle JM | e^{-i\beta J_y} | JM' \rangle, \tag{55}$$

$$R^{(J)}_{MM'}(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha M} r^{(J)}_{MM'}(\beta) e^{-i\gamma M'}. \tag{56}$$

§ 11. Основные свойства матриц $R^{(J)}$

Обратиая матрица:

$$[R^{(J)}(\alpha\beta\gamma)]^{-1} = R^{(J)}(-\gamma, -\beta, -\alpha). \tag{57}$$

Определитель:

$$\det R^{(J)} = 1. \tag{58}$$

Вращение на 2π:

$$R^{(J)}_{u}(2\pi) = (-1)^{2J}. \tag{59}$$

Каждому набору углов Эйлера соответствует единственная матрица $R^{(J)}$. Каждому вращению $\mathcal{R}$ соответствует единственная матрица $R^{(J)}$, если J — целое, и две матрицы, отличающиеся знаком, если J — полуцелое.

Вещественность: $r^{(J)}(\beta)$ — вещественная матрица.

Вращения на угол π вокруг координатных осей. Обозначения: X, Y, Z — операторы вращения на угол $+\pi$ вокруг осей Ox, Oy, Oz соответственно:

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = XYZ = (-1)^{2J}. \tag{60}$$

$$X | JM\rangle = e^{-i\pi J} | J - M\rangle, \quad X^{(J)}_{MM'} = e^{-i\pi J}\delta_{M\,-M'}. \tag{61}$$

$$Y | JM\rangle = (-1)^{J-M} | J - M\rangle, \quad Y^{(J)}_{MM'} = (-1)^{J+M}\delta_{M\,-M'}. \tag{62}$$

$$Z | JM\rangle = e^{-i\pi M} | JM\rangle, \quad Z^{(J)}_{MM'} = e^{-i\pi M}\delta_{MM'}. \tag{63}$$

Преобразование оператора момента при вращении Y:

$$YJ_xY^\dagger = -J_x, \quad YJ_yY^\dagger = J_y, \quad YJ_zY^\dagger = -J_z, \quad YJ_\pm Y^\dagger = -J_\mp.$$

Следовательно,

$$YR^{(J)}Y^\dagger = R^{(J)*}. \tag{64}$$

Соотношения симметрии, следующие из (62) и (64):

$$r^{(J)}_{MM'} = (-1)^{M-M'} r^{(J)}_{-M\,-M'}. \tag{65}$$

$$R^{(J)*}_{MM'} = (-1)^{M-M'} R^{(J)}_{-M\,-M'}. \tag{66}$$

Унитарность и соотношения ортогональности: $R^{(J)-1} = R^{(J)\dagger}$, отсюда получаем соотношения унитарности

$$\sum_M R^{(J)}_{MM'} R^{(J)*}_{MM''} = \delta_{M'M''}, \quad \sum_M R^{(J)}_{M'M} R^{(J)*}_{M''M} = \delta_{M'M''}. \tag{67}$$

Используя соотношения симметрии, получаем соотношения ортогональности

$$\sum_M (-1)^{J+M} R^{(J)}_{MM'} R^{(J)}_{-M\,-M''} = (-1)^{J+M'} \delta_{M'M''},$$
$$\sum_M (-1)^{J+M} R^{(J)}_{M'M} R^{(J)}_{-M''\,-M} = (-1)^{J+M'} \delta_{M'M''}. \tag{68}$$

Формулы композиции и редукции. В следующих формулах матрицы $R^{(j_1)}$, $R^{(j_2)}$, $R^{(J)}$ относятся к одним и тем же углам Эйлера.

Разложение тензорного произведения $R^{(j_1)} \otimes R^{(j_2)}$

$$R^{(j_1)}_{m_1 m_1'} R^{(j_2)}_{m_2 m_2'} = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M, M'=-J}^{+J} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle R^{(J)}_{MM'} \langle j_1 j_2 m_1' m_2' | JM' \rangle. \tag{69}$$

Формула композиции:

$$R^{(J)}_{MM'} = \sum_{m_1, m_1'=-j_1}^{+j_1} \sum_{m_2, m_2'=-j_2}^{+j_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle R^{(j_1)}_{m_1 m_1'} R^{(j_2)}_{m_2 m_2'} \langle j_1 j_2 m_1' m_2' | JM' \rangle. \tag{70}$$

В частности, если $J = j_1 + j_2$, то

$$R^{(J)}_{JJ} = R^{(j_1)}_{j_1 j_1} R^{(j_2)}_{j_2 j_2}, \quad R^{(j_1)}_{j_1 -j} = R^{(j_1)}_{j_1 -j_1} R^{(j_2)}_{j_2 -j_2}. \tag{71}$$

§ 12. Вычисление матричных элементов $R^{(J)}_{MM'}$

Основные методы вычисления. Если матрица $r^{(J)}(\beta)$ известна, то матрицу $R^{(J)}(\alpha\beta\gamma)$ легко получить из соотношения (56). Матрица $r^{(J)}$ вещественная, унитарная, обладает свойством симметрии (65)

$$r^{(J)}_{MM'}(\beta) = r^{(J)}_{M'M}(-\beta) = (-1)^{M-M'} r^{(J)}_{-M\,-M'}(\beta).$$

Поэтому нужно только знать матричные элементы, соответствующие $M \geqslant 0$ и $M \geqslant M'$, чтобы получить все остальные. Для этого мы можем:

а) вычислить их непосредственно с помощью приводимой ниже формулы Вигнера;

б) получить их с помощью формулы (70) для композиции $r^{(j_1)}$ $r^{(j_2)}$ с меньшими значениями момента импульса; в частности, все матрицы $r^{(J)}$ могут быть получены одна из другой, начиная с $r^{(1/2)}$;

в) получить их друг из друга, используя рекуррентные соотношения, вытекающие из уравнений (49).

Формула Вигнера. Введем обозначения

$$\xi \equiv \cos\frac{1}{2}\beta, \quad \eta \equiv \sin\frac{1}{2}\beta.$$

Получаем

$$r^{(J)}_{MM'} = \sum_t (-1)^t \frac{\sqrt{(J+M)!\,(J-M)!\,(J+M')!\,(J-M')!}}{(J+M-t)!\,(J-M'-t)!\,t!\,(t-M+M')!} \times$$
$$\times \xi^{2J+M-M'-2t} \eta^{2t-M+M'}. \tag{72}$$

В данном случае при суммировании используется то же соглашение, что и в формуле (21). Число членов в $\sum_t$ равно $1+\tau$, где τ — наименьшее из четы-

рех чисел $J \pm M$, $J \pm M'$. По отношению к переменным ξ и η выражение $r^{(J)}_{MM}$ есть однородный полином степени $2J$.

Частные случаи формулы Вигнера:

$$r^{(J)}_{MJ} = (-1)^{J-M} r^{(J)}_{JM} = r^{(J)}_{-J\,-M} = (-1)^{J-M} r^{(J)}_{-M\,-J} = \\ = \sqrt{\frac{(2J)!}{(J+M)!\,(J-M)!}}\, \xi^{J+M} \eta^{J-M}, \tag{73}$$

$$r^{(J)}_{JJ} = r^{(J)}_{-J\,-J} = \xi^{2J}, \quad r^{(J)}_{J\,-J} = (-1)^{2J} r^{(J)}_{-J\,J} = \eta^{2J}.$$

Случай $J = 1/2$:

$$R^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\alpha\beta\gamma) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\alpha} \cos\frac{1}{2}\beta\, e^{-\frac{1}{2}i\gamma} & -e^{-\frac{1}{2}i\alpha} \sin\frac{1}{2}\beta\, e^{+\frac{1}{2}i\gamma} \\ e^{+\frac{1}{2}i\alpha} \sin\frac{1}{2}\beta\, e^{-\frac{1}{2}i\gamma} & e^{+\frac{1}{2}i\alpha} \cos\frac{1}{2}\beta\, e^{+\frac{1}{2}i\gamma} \end{pmatrix} \tag{74}$$

(в этом выражении верхняя и нижняя строки соответствуют $M = \frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, этим же значениям соответствуют левый и правый столбцы).

§ 13. Целые значения J ($J = l$) и преобразование сферических функций при вращениях

Случай $l = 1$

$$r^{(1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\beta) & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\beta & \frac{1}{2}(1-\cos\beta) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\beta & \cos\beta & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\beta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\beta) & \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\beta & \frac{1}{2}(1+\cos\beta) \end{pmatrix}. \tag{75}$$

(В этом выражении расположенные сверху вниз строки соответствуют $M = +1, 0, -1$; расположенные слева направо столбцы соответствуют тем же значениям M.)

Преобразование сферических функций при вращении. Пусть $\omega \equiv (\theta, \varphi)$ — сферические координаты единичного вектора $\boldsymbol{v}$ относительно координатной системы $Oxyz$

$$(v_1 = \sin\theta\cos\varphi,\ v_2 = \sin\theta\sin\varphi,\ v_3 = \cos\theta).$$

$\Omega \equiv (\Theta, \Phi)$ — сферические координаты того же вектора $\boldsymbol{v}$ относительно системы $OXYZ$.

$(\alpha\beta\gamma)$ — углы Эйлера вращения, переводящего систему $Oxyz$ в систему $OXYZ$ [1]).

---

[1]) Для устранения произвола в выборе углов Эйлера мы потребуем выполнения дополнительных соотношений

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \pi, \quad -\pi \leqslant \gamma \leqslant +\pi.$$

(При таком выборе система $OuzZ$ является правой.) Тогда:

(i) сферические координаты оси OZ в системе $Oxyz$ есть (β, α);

(ii) сферические координаты оси Oz в системе $OXYZ$ — $(\beta, \pi - \gamma)$.

Θ и Φ — однозначные функции от θ и φ, в которые α, β, γ входят в качестве параметров.

$\omega_1 \equiv (\theta_1, \varphi_1)$ — сферические углы в системе $Oxyz$ вектора $\boldsymbol{v}_1 = \mathcal{R}^{-1}\boldsymbol{v}$, который при вращении $\mathcal{R}(\alpha\beta\gamma)$ преобразуется в вектор $\boldsymbol{v}$. Справедливо равенство $\omega_1 = \Omega$.

Сферическая функция $Y_l^m(\omega)$ соответствует кет-вектору $|lm\rangle$ в представлении $\{\omega\}$:

$$Y_l^m(\omega) = \langle\omega \mid lm\rangle.$$

Вращение $\mathcal{R}(\alpha\beta\gamma)$ преобразует этот вектор в вектор $R(\alpha\beta\gamma)\,|lm\rangle$, составляющие которого в направлении вектора $\boldsymbol{v}$ равны составляющим $|lm\rangle$ по направлению $\boldsymbol{v}_1$,

$$Y_l^m(\Omega) \equiv \langle\omega_1 \mid lm\rangle = \langle\omega \mid R \mid lm\rangle;$$

отсюда следует формула преобразования сферических функций при вращении

$$Y_l^m(\Omega) = \sum_{m'=-l}^{+l} Y_l^{m'}(\omega)\, R_{m'm}^{(l)}(\alpha\beta\gamma). \tag{76}$$

Скалярное произведение и теорема сложения. Пусть $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ — два единичных вектора, ω и ω' — соответствующие им сферические координаты относительно системы $Oxyz$, Ω, Ω' — сферические координаты тех же векторов относительно системы $OXYZ$. Соотношение (76) и унитарность дают

$$\sum_m Y_l^m(\Omega)\, Y_l^{m*}(\Omega') = \sum_m Y_l^m(\omega)\, Y_l^{m*}(\omega'). \tag{77}$$

В частности, если $\boldsymbol{v}'$ направлен вдоль оси OZ, то получаем теорему сложения

$$\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, Y_l^0(\Omega) \equiv \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\Theta) = \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta, \varphi)\, Y_l^{m*}(\beta, \alpha). \tag{78}$$

Выражение $r_{mm'}^{(l)}$ через $\cos\beta$ и $\sin\beta$. Для l целых:

(i) если $(-1)^{m+m'} = +1$, то $r_{mm'}^{(l)}$ — полином по $\cos\beta$ степени l;

(ii) если $(-1)^{m+m'} = -1$, то $r_{mm'}^{(l)} = \sin\beta \times$ (полином по $\cos\beta$ степени $(l-1)$).

В частности,

$$r_{ml}^{(l)}(\beta) = \sqrt{\frac{(2l)!}{(l+m)!\,(l-m)!}}\, \frac{1}{2^l}(1+\cos\beta)^m \sin^{l-m}\beta. \tag{79}$$

Выражения для $R_{mm'}^{(l)}$ при m или $m' = 0$:

$$R_{m0}^{(l)}(\alpha\beta\gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_l^{m*}(\beta, \alpha), \tag{80а}$$

$$R_{0m}^{(l)}(\alpha\beta\gamma) = (-1)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_l^{m*}(\beta, \gamma), \tag{80б}$$

$$R_{00}^{(l)}(\alpha\beta\gamma) = P_l(\cos\beta). \tag{80в}$$

Раздел V. НЕПРИВОДИМЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 14. Определение и основные свойства

Определение. Тензорный оператор — совокупность операторов, линейно преобразующихся друг через друга при вращении.

Неприводимый тензорный оператор — набор из $(2k+1)$ операторов $T_q^{(k)}$ $(q=-k, \ldots, +k)$ представляет собой, по определению, *стандартные компоненты неприводимого тензорного оператора* $\boldsymbol{T}^{(k)}$ *порядка* k, если при вращении они преобразуются по формуле

$$RT_q^{(k)}R^{-1}=\sum_{q'=-k}^{+k} T_{q'}^{(k)}R_{q'q}^{(k)}. \tag{81}$$

Векторный оператор — неприводимый тензорный оператор порядка 1. Если V_x, V_y, V_z — его компоненты относительно осей $Oxyz$, то стандартными компонентами являются

$$V_+=-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(V_x+iV_y),\quad V_0=V_z,\quad V_-=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(V_x-iV_y).$$

Скалярный оператор — неприводимый тензорный оператор порядка 0.

Коммутационные соотношения с $\boldsymbol{J}$

$$\left[J_\pm, T_q^{(k)}\right]=\sqrt{k(k+1)-q(q\pm 1)}\;T_{q\pm 1}^{(k)}, \tag{82а}$$

$$\left[J_z, T_q^{(k)}\right]=qT_q^{(k)}. \tag{82б}$$

Эрмитово сопряжение[1])

$$\boldsymbol{S}^{(k)}=\boldsymbol{T}^{(k)\dagger},\ \text{если}\ S_q^{(k)}=(-1)^q\,T_{-q}^{(k)\dagger}. \tag{83}$$

Основное свойство (Вигнер — Эккарт)

$$\langle \tau JM\,|\,T_q^{(k)}\,|\,\tau' J'M'\rangle=\frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{2J+1}}\,\langle \tau J\,\|\,\boldsymbol{T}^{(k)}\,\|\,\tau' J'\rangle\,\langle J'kM'q\,|\,JM\rangle=$$

$$=(-1)^{J-M}\langle \tau J\,\|\,\boldsymbol{T}^{(k)}\,\|\,\tau' J'\rangle\begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & q & M'\end{pmatrix}. \tag{84}$$

По определению $\langle \tau J\|\boldsymbol{T}^{(k)}\|\tau' J'\rangle$ — *редуцированный матричный элемент*[2]).

Сопряженное соотношение (k — целое)

$$\langle \tau J\,\|\,\boldsymbol{T}^{(k)}\,\|\,\tau' J'\rangle^*=(-1)^{J'-J}\langle \tau' J'\,\|\,\boldsymbol{T}^{(k)\dagger}\,\|\,\tau J\rangle. \tag{85}$$

---

[1]) Мы принимаем здесь определение Рака (loc. cit.). При таком определении сферические функции Y_l^m образуют эрмитов тензорный оператор порядка l. Отметим, что тензорное произведение (определенное ниже) коммутирующих неприводимых эрмитовых тензорных операторов в общем случае неэрмитово. Для того, чтобы оно стало эрмитовым, мы должны модифицировать определение эрмитова сопряжения и заменить $(-1)^q$ на $(-1)^{k+q}$. При новом определении сферические функции нечетного порядка антиэрмитовы.

(*N. B.* Наше определение эрмитова сопряжения применимо также к тензорному оператору полуцелого порядка, если множитель $(-1)^q$ записывать как $e^{i\pi q}$.)

[2]) Определение принято такое же, как у Рака (loc. cit.).

Специальные тензорные операторы.
Единичный оператор

$$\langle \alpha J \| \alpha' J' \rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{JJ'} \sqrt{2J+1}.$$

Оператор полного момента импульса

$$\langle \alpha J \| \boldsymbol{J} \| \alpha' J' \rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{JJ'} \sqrt{J(J+1)(2J+1)}.$$

§ 15. Тензорное произведение неприводимых тензорных операторов [1])

Определения. Пусть $\boldsymbol{T}^{(k_1)}$, $\boldsymbol{U}^{(k_2)}$ — неприводимые тензорные операторы порядка k_1, k_2 соответственно. По определению $\boldsymbol{T}^{(k_1)} \otimes \boldsymbol{U}^{(k_2)}$ — набор $(2k_1+1)(2k_2+1)$ операторов $T^{(k_1)}_{q_1} U^{(k_2)}_{q_2}$ (не обязательно линейно независимых). Это (приводимый) тензорный оператор.

$\boldsymbol{V}^{(K)} \equiv [\boldsymbol{T}^{(k_1)} \otimes \boldsymbol{U}^{(k_2)}]_K$, *тензорное произведение порядка* K, есть неприводимый тензорный оператор порядка K с компонентами

$$V^{(K)}_Q = \sum_{q_1 q_2} \langle k_1 k_2 q_1 q_2 | KQ \rangle T^{(k_1)}_{q_1} U^{(k_2)}_{q_2} \tag{86}$$

(обязательно должны выполняться неравенства $|k_1 - k_2| \leqslant K \leqslant k_1 + k_2$).

Если $k_1 = k_2 = k$, то определено скалярное произведение [2])

$$S \equiv (\boldsymbol{T}^{(k)} \boldsymbol{U}^{(k)}) = \sum_q (-1)^q T^{(k)}_q U^{(k)}_{-q}. \tag{87}$$

($N.\ B.\ \ S = (-1)^k \sqrt{2k+1}\, V^{(0)}_0$.)

Выражение для редуцированных матричных элементов. Допустим, что мы имеем квантовую систему, состоящую из двух систем 1 и 2 с моментами импульса $\boldsymbol{J}_1$ и $\boldsymbol{J}_2$ соответственно ($\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$).

$|\tau_1 J_1 M_1\rangle$ — базисные векторы системы 1,

$|\tau_2 J_2 M_2\rangle$ — базисные векторы системы 2.

$\boldsymbol{T}^{(k_1)}$, $\boldsymbol{U}^{(k_2)}$ — неприводимые тензорные операторы, действующие только на переменные систем 1 и 2 соответственно.

$\boldsymbol{V}^{(K)}$ — тензорное произведение порядка K в соответствии с определением (86).

В стандартном представлении $\{\tau_1 \tau_2 \boldsymbol{J}_1^2 \boldsymbol{J}_2^2 \boldsymbol{J}^2 J_z\}$ редуцированные матричные элементы $\boldsymbol{V}^{(K)}$ даются формулой композиции

$$\langle \tau_1 \tau_2 J_1 J_2 J \| \boldsymbol{V}^{(K)} \| \tau_1' \tau_2' J_1' J_2' J' \rangle = \sqrt{(2J+1)(2K+1)(2J'+1)} \times$$
$$\times \begin{Bmatrix} J_1' & J_2' & J' \\ k_1 & k_2 & K \\ J_1 & J_2 & J \end{Bmatrix} \langle \tau_1 J_1 \| \boldsymbol{T}^{(k_1)} \| \tau_1' J_1' \rangle \langle \tau_2 J_2 \| \boldsymbol{U}^{(k_2)} \| \tau_2' J_2' \rangle. \tag{88}$$

---

[1]) Во всех следующих формулах мы ограничиваемся тензорными операторами целого порядка.

[2]) При таком определении скалярное произведение двух векторных операторов $(\boldsymbol{VW})$ дается в соответствии с обычным определением выражением $V_x W_x + V_y W_y + V_z W_z$.

Частные случаи, когда «9J»-символ сводится к «6J»-символу:

$$U=1,\quad K=k_1=k,$$

$$\left\langle \tau_1\tau_2 J_1 J_2 J \left\| T^{(k)} \right\| \tau_1'\tau_2' J_1' J_2' J' \right\rangle = \delta_{\tau_2\tau_2'}\delta_{J_2 J_2'} \left\langle \tau_1 J_1 \left\| T^{(k)} \right\| \tau_1' J_1' \right\rangle \times$$

$$\times (-1)^{J'+J_1+J_2+k} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \begin{Bmatrix} J_1 & k & J_1' \\ J' & J_2 & J \end{Bmatrix}, \tag{89}$$

$$T=1,\quad K=k_2=k,$$

$$\left\langle \tau_1\tau_2 J_1 J_2 J \left\| U^{(k)} \right\| \tau_1'\tau_2' J_1' J_2' J' \right\rangle = \delta_{\tau_1\tau_1'}\delta_{J_1 J_1'} \left\langle \tau_2 J_2 \left\| U^{(k)} \right\| \tau_2' J_2' \right\rangle \times$$

$$\times (-1)^{J+J_1+J_2'+k} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \begin{Bmatrix} J_2 & k & J_2' \\ J' & J_1 & J \end{Bmatrix}, \tag{90}$$

$$K=0,\quad k_1=k_2=k,$$

$$\left\langle \tau_1\tau_2 J_1 J_2 J M \left| \left(T^{(k)} U^{(k)}\right) \right| \tau_1'\tau_2' J_1' J_2' J' M' \right\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{MM'} (-1)^{J+J_2+J_1'} \begin{Bmatrix} J_1 & k & J_1' \\ J_2' & J & J_2 \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \left\langle \tau_1 J_1 \left\| T^{(k)} \right\| \tau_1' J_1' \right\rangle \left\langle \tau_2 J_2 \left\| U^{(k)} \right\| \tau_2' J_2' \right\rangle. \tag{91}$$

Случай $T^{(k)}=J_1$:

$$\langle J_1 J_2\, J+1 \| J_1 \| J_1 J_2 J\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[(2S+1)^2-(J+1)^2]\,[(J+1)^2-4d^2]}{J+1}},$$

$$\langle J_1 J_2\, J \| J_1 \| J_1 J_2 J\rangle = \frac{1}{2}\,[2d\,(2S+1)+J\,(J+1)]\sqrt{\frac{2J+1}{J\,(J+1)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,[J_1\,(J_1+1)+J\,(J+1)-J_2\,(J_2+1)]\sqrt{\frac{2J+1}{J\,(J+1)}},$$

$$\langle J_1 J_2\, J-1 \| J_1 \| J_1 J_2 J\rangle = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[(2S+1)^2-J^2]\,[J^2-4d^2]}{J+1}},$$

$$S=\frac{1}{2}\,(J_1+J_2),\quad d=\frac{1}{2}\,(J_1-J_2),$$

$$|2d| \leqslant J \leqslant 2S.$$