ДОПОЛНЕНИЕ Г
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП

§ 1. Введение

Уравнения движения исследуемых в квантовой механике систем часто оказываются инвариантными относительно некоторых групп преобразований или, иначе говоря, рассматриваемые наблюдаемые имеют особенно простые трансформационные свойства по отношению к этим группам. Методы теории групп позволяют получить все следствия, которые вытекают из существования этих свойств симметрии.

В действительности, при наличии достаточно богатой интуиции и определенного навыка в обращении с операторами, часто удается использовать свойства симметрии без явного обращения к теории групп. Многие физики предпочитают поступать именно так, несмотря на то, что это означает необходимость время от времени переоткрывать в каждой конкретной задаче «хорошо известные» результаты теории групп, которые необходимы для соответствующих выводов. Однако в ряде разделов физики требуемая доза интуиции и навыков столь велика, что честное и добросовестное использование теории групп неизбежно. Даже в тех случаях, когда имеющиеся симметрии не столь сложны, ссылка на теорию групп, хотя и не является неизбежной, позволяет проще сформулировать задачу и предсказать ряд свойств ее решения.

Данное приложение знакомит читателя с элементами теории групп и может рассматриваться как введение к более подробным работам на эту тему [1]).

В приложениях обсуждаются основные понятия и результаты теории групп, которые наиболее часто используются в квантовой механике. Практически все доказательства опущены, хотя большинство из них, особенно в разделах I и II, весьма просты.

Раздел I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 2. Определения

Группа. *Множество $\mathcal{G}$ элементов a, b, c, ... образует группу, если выполняются следующие условия:*

---

[1]) Мы отсылаем читателя, в частности, к монографиям: *Е. Вигнер.* loc. cit. стр. 525; *Б. Л. Ван дер Варден.* Методы теории групп в квантовой механике, Харьков, 1938. О непрерывных группах см. *G. Racah.* Group Theory and Spectroscopy, Princeton, 1951 (см. перепечатку в препринте ОИЯИ, R-1869, Дубна, 1964). В настоящее время на русском языке имеется большое число книг, как по теории групп так и по ее приложениям. Помимо ссылок, указанных автором, можно рекомендовать для более подробного ознакомления следующие книги, посвященные изложению методов теории групп и их физических приложений: *М. И. Петрашень, Е. Д. Трифонов.* Применение теории групп в квантовой механике. М., Наука, 1967; *Г. Любарский.* Теория групп и ее применение в физике. М., Наука, 1958; *М. Хамермеш.* Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М., Мир, 1966; Сб.: Теория групп и элементарные частицы. М., Мир, 1967. (*Прим. переводчика.*)

(i) *произведение* любых двух элементов также принадлежит множеству $\mathcal{G}$

если[1]) $a \in \mathcal{G}$ и $b \in \mathcal{G}$, то[2]) $ab \in \mathcal{G}$;

(ii) среди элементов множества $\mathcal{G}$ имеется *единичный элемент* I

$I \in \mathcal{G}$ такой, что для всех $a \in \mathcal{G}$, $Ia = aI = a$;

(iii) каждый из элементов имеет обратный, a^{-1}, принадлежащий множеству $\mathcal{G}$

если $a \in \mathcal{G}$ существует $a^{-1} \in \mathcal{G}$ такой, что $a^{-1}a = aa^{-1} = I$;

(iv) произведение элементов *ассоциативно*

$$(ab)\,c = a\,(bc).$$

Конечная группа. Группа, имеющая конечное число элементов N, называется конечной. Число N называется *порядком* группы.

Примеры. Группа пространственных отражений есть конечная группа порядка 2. Двумя ее элементами являются тождественный элемент I и отражение относительно начала координат s; $s^2 = I$. Группа перестановок n объектов $\mathcal{P}_n$ есть конечная группа порядка $n!$.

Непрерывная группа. Группа, имеющая бесконечное число элементов, которые зависят от одного или нескольких параметров, называется непрерывной группой.

Примеры. Группа вращений в пространстве $\mathcal{R}_3$; группа пространственных трансляций.

Абелева группа. Если все элементы группы *коммутируют*

$$ab = ba \text{ для любых } a \text{ и } b \in \mathcal{G},$$

то группа называется *абелевой*, или *коммутативной* группой.

Примеры. Пространственные отражения, пространственные трансляции, вращения вокруг оси Oz.

§ 3. Классы сопряженных элементов

Сопряженные элементы. Два элемента a и b группы $\mathcal{G}$ называются сопряженными друг другу, если существует элемент $x \in \mathcal{G}$ такой, что

$$b = xax^{-1}.$$

(*N. B.* Элемент x не единственный.)

Если b сопряжено a, то и a сопряжено b, так что сопряжение — рефлексивное соответствие. Более того, если два элемента a и c сопряжены элементу b, то два элемента a и c порознь сопряжены между собой.

Класс сопряженных элементов. Множество элементов группы $\mathcal{G}$, сопряженных данному элементу a, называют классом сопряженных элементов, или просто классом группы $\mathcal{G}$. Элемент a принадлежит определяемому им классу.

Класс элементов, сопряженных b, и класс элементов, сопряженных a, совпадают, если b сопряжено a, в противном случае эти классы не имеют общих элементов. Каждый элемент группы $\mathcal{G}$ принадлежит вполне определенному классу, а вся группа может быть разбита на классы сопряженных элементов.

---

[1]) Запись $a \in \mathcal{G}$ означает: элемент a принадлежит множеству $\mathcal{G}$.

[2]) Преобразование, обозначаемое ab, состоит в последовательном применении преобразования a к результату действия преобразования b. Преобразования ab и ba в общем случае различны.

Если данный элемент группы $\mathcal{G}$ коммутирует со всеми элементами группы, то он образует класс сам по себе. В частности, единичный элемент I образует класс сам по себе.

Пример. Множество вращений $\mathcal{R}(\varphi)$ на один и тот же угол φ, которые различаются только направлением оси вращения, образует класс группы $\mathcal{R}_3$. Каждому значению угла $\varphi (0 \leqslant \varphi < \pi)$ соответствует свой класс этой группы.

§ 4. Подгруппы

Определеиие. Множество $\mathcal{H}$ называется подгруппой группы $\mathcal{G}$, если оно является группой, все элементы которой содержатся в $\mathcal{G}$.

Примеры. Вращения вокруг оси Oz образуют подгруппу группы $\mathcal{R}_3$; сдвиги, параллельные оси Oz, образуют подгруппу группы пространственных трансляций.

Класс смежности. Если x — элемент группы $\mathcal{G}$, то, используя произвольный элемент h подгруппы $\mathcal{H}$, мы можем образовать новый элемент xh. Обозначим множество всех элементов, построенных таким образом, $x\mathcal{H}$. Имеется взаимнооднозначное соответствие между элементами из $\mathcal{H}$ и элементами из $x\mathcal{H}$.

Следует различать два случая:

(а) если $x \in \mathcal{H}$, то $x\mathcal{H}$ совпадает с $\mathcal{H}$;

(б) если $x \notin \mathcal{H}$, то множество $x\mathcal{H}$ не образует группу, оно называется левым классом смежности подгруппы $\mathcal{H}$.

Правые классы смежности $\mathcal{H}x$ определяются аналогично. В дальнейшем мы будем рассматривать только левые классы смежности. Очевидно, что правые классы смежности имеют те же свойства, что и левые.

Два класса смежности $x_1\mathcal{H}$ и $x_2\mathcal{H}$ либо совпадают, либо не содержат общих элементов вовсе, в зависимости от того, принадлежит или ие принадлежит элемент $x_2^{-1}x_1$ подгруппе $\mathcal{H}$.

Каждый элемент из $\mathcal{G}$ принадлежит либо подгруппе $\mathcal{H}$, либо одному из классов смежности $\mathcal{H}$. Подгруппа $\mathcal{H}$ и ее различные классы смежности составляют всю группу $\mathcal{G}$.

Подгруппы, сопряженные подгруппе $\mathcal{H}$. Если $\mathcal{H}$ — подгруппа группы $\mathcal{G}$, а x — элемент $\mathcal{G}$, не принадлежащий $\mathcal{H}$, то множество $x\mathcal{H}x^{-1}$ также является подгруппой в $\mathcal{G}$ и называется подгруппой, *сопряженной* с $\mathcal{H}$. (*N. B.* Если $x \in \mathcal{H}$, то $x\mathcal{H}x^{-1}$ совпадает с подгруппой $\mathcal{H}$.)

Сопряженные с $\mathcal{H}$ подгруппы не обязаны различаться между собой или быть отличными от $\mathcal{H}$.

Инвариантная подгруппа, фактор-группа. Подгруппа $\mathcal{H}$ называется *инвариантной* подгруппой группы $\mathcal{G}$, если $\mathcal{H}$ совпадает со всеми сопряженными с $\mathcal{H}$ подгруппами

$$\mathcal{H} = x\mathcal{H}x^{-1} \text{ при всех } x \in \mathcal{G}.$$

Эквивалентное определение. Подгруппа группы $\mathcal{G}$ является инвариантной, если ее элементы полностью исчерпывают элементы одного или нескольких классов сопряженных элементов.

(*N. B.* Второе определение особенно полезно при описании всех инвариантных подгрупп даниой группы.)

Если $\mathcal{H}$ — инвариантная подгруппа, а $x\mathcal{H}$ и $y\mathcal{H}$ — два ее левых класса смежности, то произведение элемента из $x\mathcal{H}$ на элемент из $y\mathcal{H}$ принадлежит классу смежности $yx\mathcal{H}$

$$(y\mathcal{H})(x\mathcal{H}) = (yx\mathcal{H}).$$

(*N. B.* Если $\mathcal{H}$ — инвариантная подгруппа, то $x\mathcal{H} = \mathcal{H}x$.)

Множество, образованное инвариантной подгруппой и всеми ее классами смежности, образует группу, в которой $\mathscr{H}$ является единичным элементом. Эта новая группа называется *фактор-группой* $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ группы $\mathscr{G}$ по $\mathscr{H}$.

Пример. Группа $\mathscr{A}_n$ четных перестановок n объектов является инвариантной подгруппой в $\mathscr{P}_n$. Она имеет один и только один класс смежности — множество нечетных перестановок, так что фактор-группа состоит из двух элементов.

Простая и полупростая группы. Группа называется простой, если единичный элемент является единственной инвариантной подгруппой в ней.

Пример. Группа пространственных вращений.

Группа называется полупростой, если единичный элемент является единственной абелевой инвариантной подгруппой.

Пример. Группа $\mathscr{P}_n$.

§ 5. Изоморфизм, гомоморфизм

Изоморфизм. *Две группы, $\mathscr{G}$ и $\hat{\mathscr{G}}$, называются изоморфными, если существует взаимнооднозначное соответствие между их элементами, сохраняющее закон умножения*, т. е.:

(i) каждому элементу g_i группы $\mathscr{G}$ соответствует один и только один элемент $\hat{g}_i$ из $\hat{\mathscr{G}}$, и наоборот;

(ii) если $g_i g_j = g_k$, то $\hat{g}_i \hat{g}_j = \hat{g}_k$.

Примеры. Преобразования симметрии равностороннего треугольника образуют группу, изоморфную $\mathscr{P}_3$.

Гомоморфизм. Если соответствие между элементами групп $\mathscr{G}$ и $\hat{\mathscr{G}}$ не взаимнооднозначно, то эти группы гомоморфны.

Точнее, группа $\mathscr{G}$ гомоморфна $\hat{\mathscr{G}}$, если:

(i) каждому элементу g_i группы $\mathscr{G}$ соответствует один и только один элемент $\hat{g}_i$ группы $\hat{\mathscr{G}}$, а каждому элементу группы $\hat{\mathscr{G}}$ соответствует по крайней мере один (а возможно, и большее число) элемент группы $\mathscr{G}$;

(ii) из $g_i g_j = g_k$ следует, что $\hat{g}_i \hat{g}_j = \hat{g}_k$.

Если $\mathscr{G}$ имеет инвариантную подгруппу $\mathscr{H}$, то $\mathscr{G}$ гомоморфна фактор-группе $\mathscr{G}/\mathscr{H}$.

Если $\mathscr{G}$ гомоморфна $\hat{\mathscr{G}}$, то множество $\mathscr{H}$ элементов из $\mathscr{G}$, гомоморфных единичному элементу $\hat{\mathscr{I}}$ группы $\hat{\mathscr{G}}$, образует инвариантную подгруппу в $\mathscr{G}$, а множество элементов из $\mathscr{G}$, гомоморфных заданному элементу из $\hat{\mathscr{G}}$, отличному от $\hat{\mathscr{I}}$, образует класс смежности в группе $\mathscr{G}$; фактор-группа $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ изоморфна $\hat{\mathscr{G}}$.

Раздел II. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ

§ 6. Определения

Группы линейных подстановок. Произведение квадратных матриц ассоциативно. Если множество $n \times n$ матриц удовлетворяет аксиомам (i), (ii) и (iii), определяющим группу, то эти матрицы образуют некоторую группу $\boldsymbol{G}$.

Каждая матрица представляет некоторый линейный оператор G n-мерного векторного пространства $\mathscr{E}_n$ и, следовательно, определяет линейное преобразование векторов этого пространства. Если $|1\rangle, |2\rangle, \ldots, |n\rangle$ — n базисных векторов в $\mathscr{E}_n$ (этот базис не предполагается ортонормированным), то преобразование каждого из них задается уравнением

$$G\,|k\rangle = \sum_j |j\rangle\, G_{jk}.$$

Группы указанного типа, которые мы будем обозначать буквами жирного шрифта латинского алфавита, называются *группами* (n-мерных) *линейных подстановок.*

Представление группы. По определению *линейным представлением группы $\mathcal{G}$ называют ее гомоморфизм в группу линейных подстановок.*

Пусть $\boldsymbol{G}$ — группа линейных подстановок, а $\mathcal{E}$ — векторное пространство, в котором действуют матрицы, являющиеся элементами этой группы. $\mathcal{E}$ называется *пространством представления*, а число n его измерений называется *размерностью* (или степенью) *представления.*

Если $\mathcal{G}$ изоморфна $\boldsymbol{G}$, то представление называется *точным.* Если же это не так, то элементы из $\mathcal{G}$, гомоморфные единичной матрице 1, образуют инвариантную подгруппу $\mathcal{H}$, и $\boldsymbol{G}$ является точным представлением фактор-группы $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Одномерные представления. Каждая группа имеет по крайней мере одно одномерное представление — *тривиальное*, или *единичное*, *представление*, в котором каждый элемент группы представляется числом 1.

Для того чтобы существовали одномерные представления, отличные от тривиального, группа должна иметь инвариантные подгруппы, соответствующие которым фактор-группы абелевы. Все нетривиальные одномерные представления являются представлениями этих абелевых фактор-групп (см. обсуждение группы $\mathcal{T}_n$ в § 17).

Унитарное представление. Представление $\boldsymbol{G}$ называется унитарным, если все матрицы, принадлежащие $\boldsymbol{G}$, унитарны.

Эквивалентные представления. Два представления $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{G}'$ называются эквивалентными, если они имеют одинаковую размерность и если каждая матрица $G'(g)$ одного из представлений получается при помощи фиксированного линейного преобразования T из матрицы $G(g)$ другого представления, соответствующей тому же элементу g группы $\mathcal{G}$:

$$G'(g) = TG(g)\,T^{-1} \text{ для всех } g \in \mathcal{G},$$

или

$$\boldsymbol{G}' = T\boldsymbol{G}T^{-1}.$$

Если $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{G}'$ — эквивалентные представления, то используется символическая запись

$$\boldsymbol{G}' \approx \boldsymbol{G}.$$

Если отождествить пространства представления $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$, то переход от представления $\boldsymbol{G}$ к эквивалентному представлению $\boldsymbol{G}'$ соответствует выбору нового набора базисных векторов в пространстве представления.

Сопряженные представления. Два представления $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{G}^*$, матрицы $G(g)$ и $G^*(g)$ которых комплексно сопряжены друг другу, называются сопряженными представлениями.

Представление $\boldsymbol{G}$ называется самосопряженным, если оно эквивалентно своему сопряженному $\boldsymbol{G} \approx \boldsymbol{G}^*$.

Характеры. След матрицы $G(g)$, которая соответствует элементу g в представлении $\boldsymbol{G}$ группы $\mathcal{G}$, называют характером χ элемента g в этом представлении

$$\chi(g) = \operatorname{Tr} G(g).$$

Из свойств следа вытекает, что два элемента из одного и того же класса сопряженных элементов имеют один и тот же характер: *характер является функцией от класса.*

По тем же причинам: *два эквивалентных представления имеют один и тот же набор характеров*:

$$\text{если } G'(g) = TG(g)\,T^{-1}, \text{ то } \chi'(g) = \chi(g).$$

Символически это можно записать так:

$$\text{если } G' \approx G, \text{ то } \chi' = \chi.$$

(*N. B.* Если представление G самосопряжено, то его характеры вещественны.)

§ 7. Операции над пространствами представлений. Приводимость [1])

Прямая сумма. Пусть G^a, G^b — два представления одной и той же группы размерности n_a и n_b соответственно, и пусть $\mathscr{E}_a$, $\mathscr{E}_b$ — соответствующие пространства представления.

Если $|a1\rangle, |a2\rangle, \ldots, |an_a\rangle$ — базисные векторы в $\mathscr{E}_a$, а $|b1\rangle, |b2\rangle, \ldots, |bn_b\rangle$ — в $\mathscr{E}_b$, то линейные подстановки, описывающие преобразование g в этих двух представлениях, определяются законами преобразования базисных векторов

$$g\,[\,|\,a\varkappa\rangle] = \sum_{\lambda} |\,a\lambda\rangle\, G^a_{\lambda\varkappa}(g), \quad g\,[\,|\,b\mu\rangle] = \sum_{\nu} |\,b\nu\rangle\, G^b_{\nu\mu}(g). \tag{1}$$

Прямой суммой $\mathscr{E}_a + \mathscr{E}_b$ пространств $\mathscr{E}_a$ и $\mathscr{E}_b$ называется пространство, растянутое $n_a + n_b$ векторами

$$|\,a1\rangle, |\,a2\rangle, \ldots, |\,an_a\rangle, |\,b1\rangle, \ldots, |\,bn_b\rangle.$$

Матрицы в этом новом пространстве могут быть представлены в виде

$$M = \begin{pmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{pmatrix},$$

где M_{aa} — $n_a \times n_a$ матрица, переводящая векторы пространства $\mathscr{E}_a$ в векторы из $\mathscr{E}_a$, а M_{bb} — $n_b \times n_b$ матрица, переводящая векторы из $\mathscr{E}_b$ в $\mathscr{E}_b$, M_{ab} — $n_a \times n_b$ — матрица, переводящая векторы пространства $\mathscr{E}_b$ в векторы из $\mathscr{E}_a$. В частности, если A — матрица, оставляющая инвариантным пространство $\mathscr{E}_a$, а B — пространство $\mathscr{E}_b$, то их прямой суммой $A + B$ будет матрица, имеющая блочно-диагональный вид:

$$A + B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Отметим, что

$$\operatorname{Tr}(A + B) = \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B, \quad \det(A + B) = \det A \cdot \det B. \tag{2}$$

Операция взятия прямой суммы матриц сохраняет единицу и закон матричного умножения

$$1_{(a+b)} = 1_{(a)} + 1_{(b)}, \quad (A_1 + B_1)(A_2 + B_2) = A_1 A_2 + B_1 B_2.$$

Из сказанного выше следует, что множество G^{a+b} матриц $G^a(g) + G^b(g)$ образует представление группы $\mathscr{G}$. Элементу g соответствует линейная подстановка, которая определяется законами преобразования (1) базисных векторов пространства $\mathscr{E}_a + \mathscr{E}_b$. Характеры этого представления имеют вид: $\chi^{a+b}(g) = \chi^a(g) + \chi^b(g)$, иными словами

$$\chi^{a+b} = \chi^a + \chi^b. \tag{3}$$

---

[1]) Рассматриваемые в этом параграфе свойства являются общими для множеств матриц. Они сохраняются и в том случае, когда эти множества матриц не образуют группу.

Тензорное произведение (кронекерово или прямое произведение). Операция взятия тензорного произведения пространств или матриц была определена нами ранее (гл. VII).

При образовании тензорного произведения пространств $\mathscr{E}_a$ и $\mathscr{E}_b$ мы получаем $n_a n_b$-мерное пространство $\mathscr{E}_a \otimes \mathscr{E}_b$, базисными векторами которого служат векторы $|ab\varkappa\mu\rangle = |a\varkappa\rangle\,|b\mu\rangle$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, n_a$; $\mu = 1, 2, \ldots, n_b$). Матрицы $G^a(g) \otimes G^b(g)$, полученные тензорным умножением матриц, которые соответствуют элементу g в $\boldsymbol{G}^a$ и $\boldsymbol{G}^b$, образуют представление $\boldsymbol{G}^{ab} = \boldsymbol{G}^a \otimes \boldsymbol{G}^b$ размерности $n_a n_b$ для группы $\mathscr{G}$. В этом представлении заданное преобразование группы действует по правилу

$$g\,[\,|ab\varkappa\mu\rangle] = \sum_{\lambda\nu} |ab\lambda\nu\rangle\, G^a_{\lambda\varkappa}(g)\, G^b_{\nu\mu}(g). \tag{4}$$

Характеры этого представления определяются соотношением

$$\chi^{ab}(g) = \chi^a(g)\,\chi^b(g). \tag{5}$$

Приводимость. *Инвариантным подпространством* пространства $\mathscr{E}$ представления $\boldsymbol{G}$ называется подпространство в $\mathscr{E}$, каждый вектор которого при действии матриц из $\boldsymbol{G}$ линейно преобразуется в другой вектор из этого же подпространства.

Представление $\boldsymbol{G}$ называется:

(i) *неприводимым*, если $\mathscr{E}$ не содержит инвариантных подпространств, отличных от самого пространства $\mathscr{E}$, и нулевого подпространства;

(ii) *приводимым*, если оно не является неприводимым

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 \quad (\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2 \neq 0), \quad \mathscr{E}_1 \text{ — инвариантное подпространство.}$$

Во втором случае, если $\mathscr{E}_2$ также инвариантно, то говорят, что $\boldsymbol{G}$ *разложимо*. При этом можно, используя подходящее линейное преобразование, перевести базисные векторы пространства $\mathscr{E}$ в векторы, целиком лежащие либо в $\mathscr{E}_1$, либо в $\mathscr{E}_2$. В результате получается эквивалентное представление, являющееся прямой суммой представления $\boldsymbol{G}_1$ в $\mathscr{E}_1$ и представления $\boldsymbol{G}_2$ в $\mathscr{E}_2$

$$\boldsymbol{G} \approx \boldsymbol{G}_1 + \boldsymbol{G}_2.$$

Представления $\boldsymbol{G}_1$ и $\boldsymbol{G}_2$ называются *компонентами* представления $\boldsymbol{G}$.

Представление $\boldsymbol{G}$ является *вполне приводимым*, если оно может быть представлено в виде прямой суммы неприводимых компонент

$$\boldsymbol{G} \approx \boldsymbol{G}^{(1)} + \boldsymbol{G}^{(2)} + \ldots \quad (\boldsymbol{G}^{(1)}, \boldsymbol{G}^{(2)}, \ldots \text{ — неприводимы}).$$

Каждое унитарное представление либо неприводимо, либо вполне приводимо.

Матрицы вращений $R^{(j)}$ (Дополнение В, раздел IV) при заданном значении j образуют неприводимое унитарное представление $\boldsymbol{D}^{(j)}$ группы вращений. Строго говоря, $\boldsymbol{D}^{(j)}$ является представлением группы вращений $\mathscr{R}_3$ только при целом j.

Для любого j $\boldsymbol{D}^{(j)}$ является неприводимым представлением группы $\mathscr{U}_2$, инфинитезимальные преобразования которой те же, что и у $\mathscr{R}_3$ («накрывающая группа» группы $\mathscr{R}_3$).

Группа $\mathscr{U}_2$ состоит из двумерных унимодулярных унитарных линейных подстановок, и $\mathscr{R}_3$ является фактор-группой группы $\mathscr{U}_2$. В случае, когда j полуцелое, $\boldsymbol{D}^{(j)}$ является точным представлением группы $\mathscr{U}_2$, и каждому элементу из $\mathscr{R}_3$ соответствуют в $\boldsymbol{D}^{(j)}$ две матрицы противоположного знака.

Все неприводимые представления абелевой группы одномерны (первой степени).

Гомоморфное отображение одного пространства представления на другое. *Линейным отображением пространства $\mathscr{E}_a$ в $\mathscr{E}_b$*

называется линейное соответствие, при котором каждому вектору $|a\rangle$ из $\mathscr{E}_a$ соответствует один и только один вектор $|b\rangle$ из $\mathscr{E}_b$. Соответствие называется *гомоморфным*, если оно сохраняет трансформационные свойства векторов под действием всех преобразований группы, т. е. если из соответствий

$$|a\rangle \to |b\rangle$$

следует, что

$$g[|a\rangle] \to g[|b\rangle] \quad \text{при любом} \quad g \in \mathscr{G}.$$

Отображение $\mathscr{E}_a$ в $\mathscr{E}_b$ полностью определено, если задана $n_b \times n_a$ матрица, которая определяет вектор из $\mathscr{E}_b$, соответствующий каждому базисному вектору в $\mathscr{E}_a$:

$$|a\varkappa\rangle \to \sum_{\mu} |b\mu\rangle S_{\mu\varkappa}. \tag{6}$$

Если отображение гомоморфно, то выполняется матричное равенство

$$S\,G^a(g) = G^b(g)\,S \quad \text{для любого} \quad g \in \mathscr{G},$$

т. е.

$$S\,\boldsymbol{G}^a = \boldsymbol{G}^b S. \tag{7}$$

Если множество векторов $|b\rangle$, соответствующих векторам из $\mathscr{E}_a$, растягивает все пространство $\mathscr{E}_b$ (это предполагает, что $n_a \geqslant n_b$), то мы имеем *отображение* $\mathscr{E}_a$ *на* $\mathscr{E}_b$ (надо понимать как на все $\mathscr{E}_b$). В этом случае все определители матриц $n_b \times n_b$, содержащихся в матрице S, отличны от нуля.

Если соответствие взаимнооднозначно ($n_a = n_b$), то матрица S несингулярна: $\det S \neq 0$. При этом гомоморфное отображение $\mathscr{E}_a$ на $\mathscr{E}_b$ называется *изоморфным соответствием*, и мы имеем

$$\boldsymbol{G}^a \approx \boldsymbol{G}^b.$$

§ 8. Основные теоремы

Применение теории групп в квантовой механике в основном базируется на следующих теоремах.

Лемма Шура. *Если $\boldsymbol{G}^a$ и $\boldsymbol{G}^b$ — два неприводимых представления одной и той же группы и если существует гомоморфное отображение пространства одного из представлений на пространство другого представления, то матрица S, определяющая это отображение* (S удовлетворяет уравнениям (6) и (7)), *имеет следующие свойства*:

а) *если $\boldsymbol{G}^a$ и $\boldsymbol{G}^b$ неэквивалентны, то $S = 0$*;

б) *если $\boldsymbol{G}^a \approx \boldsymbol{G}^b$, то либо $S = 0$, либо $\det S \neq 0$*;

в) *если $\boldsymbol{G}^a \equiv \boldsymbol{G}^b$, то S кратна единичной матрице*: $S = c\mathbf{1}$ (c — постоянная).

Следствие. Если квадратная матрица S коммутирует со всеми матрицами *неприводимого* представления $\boldsymbol{G}$ некоторой группы, то она кратна единичной матрице:

$$\text{если } [S, \boldsymbol{G}] = 0, \text{ то } \textit{обязательно } S = c\mathbf{1}.$$

Вполне приводимые представления. Теоремы единственности. Пусть заданы два разложения на *неприводимые* компоненты вполне приводимого представления $\boldsymbol{G}$:

$$\boldsymbol{G} \approx \boldsymbol{G}_1 + \boldsymbol{G}_2 + \ldots + \boldsymbol{G}_p, \quad \boldsymbol{G} \approx \boldsymbol{G}'_1 + \boldsymbol{G}'_2 + \ldots + \boldsymbol{G}'_{p'}.$$

Можно показать, что в этом случае $p = p'$, и существует взаимнооднозначное соответствие между каждым членом первого разложения и эквивалентным

ему членом второго разложения. Иными словами, справедлива следующая теорема.

Теорема единственности I. *Если представление G вполне приводимо, то его разложение на неприводимые компоненты единственно с точностью до эквивалентности.*

Начиная с этого места, если не отмечено особо, мы не будем делать различия между эквивалентными представлениями. Одно и то же неприводимое представление может тогда фигурировать несколько раз в разложении G. Обозначим

$$G^{(1)},\ G^{(2)},\ \ldots,\ G^{(j)},\ \ldots$$

последовательность *неприводимых представлений группы* $\mathcal{G}$. Согласно теореме единственности каждое вполне приводимое представление G подчиняется соотношению эквивалентности

$$G \approx \sum_j n_j G^{(j)}, \tag{8}$$

в котором последовательность неотрицательных целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots$ определена единственным образом. Аналогично множество характеров представления G удовлетворяет соотношению

$$\chi = \sum_j n_j \chi^{(j)}. \tag{9}$$

Теорема единственности дополняется следующими двумя теоремами.

Теорема II. *Если G вполне приводимо, то и любая компонента G_1 представления G также вполне приводима, а разложение этой компоненты на неприводимые есть сумма определенного числа неприводимых компонент представления G.*

Итак, если $G \approx G_1 + G_2$ и если G может быть разложено согласно соотношению (8), то

$$G_1 \approx \sum_j n_j^1 G^{(j)}, \quad \text{где} \quad n_j^1 \leqslant n_j \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Теорема III. *Если G вполне приводимо и если существует гомоморфное отображение пространства $\mathcal{E}$ представления G на пространство $\mathcal{E}_1$ другого представления G_1 той же группы, то G_1 является компонентой G.*

Теорема III применима, в частности, и тогда, когда каждому базисному вектору $|\varkappa\rangle$ в пространстве $\mathcal{E}$ можно сопоставить вектор $|\hat{\varkappa}\rangle$ из пространства $\mathcal{E}_1$. В такой ситуации векторы $|\hat{\varkappa}\rangle$, растягивающие $\mathcal{E}_1$, не обязаны быть линейно независимыми, но линейно преобразуются друг в друга по тем же матричным формулам, что и векторы $|\varkappa\rangle$, т. е.

$$g\,[\,|\hat{\varkappa}\rangle] = \sum_{\hat{\lambda}} |\hat{\lambda}\rangle\, G_{\lambda\varkappa}(g).$$

В этом случае очевидно, что соответствие $|\varkappa\rangle \to |\hat{\varkappa}\rangle$ устанавливает гомоморфное отображение $\mathcal{E}$ на $\mathcal{E}_1$.

В частности справедливо следующее следствие.

Следствие. *Если пространства, натянутые на векторы $|a\varkappa\rangle$ (с переменным $\varkappa$) и на векторы $|b\mu\rangle$ (с переменным μ), связаны с представлениями G^a и G^b и если тензорное произведение G^{ab} этих представлений вполне приводимо, то представление G', определенное в пространстве, натянутом на произведение векторов $|a\varkappa\rangle\,|b\mu\rangle$, является компонентой G^{ab}.*

(*N. B.* Векторы $|a\varkappa\rangle\,|b\mu\rangle$ не обязаны быть линейно независимыми, если же это так, то $G' \approx G^{ab}$.)

§ 9. Приложения к квантовой механике

Группы, встречающиеся в квантовой механике, являются группами преобразований в пространстве векторов состояния. Эти преобразования почти всегда линейны и унитарны, и мы ограничимся в дальнейшем обсуждении именно такими преобразованиями.

Обозначим $\mathscr{E}$ пространство векторов состояний, а $\mathscr{G}$ — множество унитарных операторов $G_1, G_2, \ldots$, образующих группу.

Пусть $|u\rangle$ — вектор из $\mathscr{E}$. Вектор $|u\rangle$ и векторы $G_1|u\rangle$, $G_2|u\rangle, \ldots$, полученные действием операторов группы на $|u\rangle$, растягивают в общем случае не все пространство $\mathscr{E}$, а лишь подпространство $\mathscr{E}_u$ в нем. $\mathscr{E}_u$ является инвариантным подпространством относительно преобразований группы и связано с некоторым унитарным и, следовательно, вполне приводимым представлением $\boldsymbol{G}^u$ группы $\mathscr{G}$. Мы будем говорить что вектор $|u\rangle$ преобразуется по представлению $\boldsymbol{G}^u$.

Аналогичным образом, если Q — линейный оператор в $\mathscr{E}$, то Q и множество операторов $G_1QG_1^{-1}$, $G_2QG_2^{-1}, \ldots$, полученных действием на Q преобразований группы $\mathscr{G}$, растягивают векторное пространство $\mathscr{E}_Q$ (векторами этого пространства служат операторы), элементы которого линейно преобразуются друг в друга под действием операторов группы. Пространство $\mathscr{E}_Q$ связано с представлением $\boldsymbol{G}^Q$ группы $\mathscr{G}$, которое во всех рассматриваемых ниже случаях будет либо вполне приводимым, либо даже неприводимым. Мы будем говорить, что Q преобразуется по представлению $\boldsymbol{G}^Q$.

По определению оператор Q называется *инвариантным относительно группы* $\mathscr{G}$, если он преобразуется по единичному представлению. В этом случае Q коммутирует со всеми операторами из группы. В более общем случае оператор Q является *компонентой неприводимого тензорного оператора группы* $\mathscr{G}$, если он преобразуется по неприводимому представлению $\boldsymbol{G}^{(j)}$ этой группы.

Неприводимые подпространства $\mathscr{E}(\tau j)$. Стандартное представление группы $\mathscr{G}$. Пространство $\mathscr{E}$ является прямой суммой неприводимых инвариантных подпространств $\mathscr{E}(\tau j)$. Каждое из них связано с некоторым неприводимым представлением $\boldsymbol{G}^{(j)}$ группы $\mathscr{G}$. Индекс τ параметризует пространства, связанные с одним и тем же неприводимым представлением.

Обозначим d_j размерность представления $\boldsymbol{G}^{(j)}$. Пусть $|\tau j\mu\rangle$ (изменяется только μ) — d_j векторов, образующих базис в пространстве $\mathscr{E}(\tau j)$. Поскольку $\boldsymbol{G}^{(j)}$ определяется только с точностью до эквивалентности, то конкретный выбор базиса произволен. Удобно раз и навсегда фиксировать эти векторы, определив стандартный базис в $\mathscr{E}(\tau j)$, в котором каждому элементу группы соответствует вполне определенная матрица $G^{(j)}_{\lambda\mu}$:

$$G\,|\,\tau j\mu\rangle = \sum_{\lambda=1}^{d_j} |\tau j\lambda\rangle\, G^{(j)}_{\lambda\mu}. \tag{10}$$

В дальнейшем изложении мы будем всегда предполагать, что выбран именно этот стандартный базис.

Множество векторов $|\tau j\mu\rangle$ (изменяются τ, j, μ) образует систему базисных векторов пространства $\mathscr{E}$. Мы будем называть *представление* $\{\tau j\mu\}$ *группы* $\mathscr{G}$ *стандартным*. Термин представление здесь используется в привычном квантовомеханическом смысле. Трансформационные свойства компонент кет-векторов и операторов под действием преобразований из группы $\mathscr{G}$ имеют особенно простой вид в этом представлении. Эти свойства суммируются двумя приводимыми ниже теоремами.

Компоненты кет-векторов и операторов в представлении $\{\tau j\mu\}$.

Теорема А. *Если векторы* $|u1\rangle, \ldots, |u\nu\rangle, \ldots$ *линейно преобразуются друг в друга, подобно базисным векторам унитарного представления* $\boldsymbol{G}^a$, *т. е. если*

$$G\,|\,u\nu\rangle = \sum_{\rho} |\,u\rho\rangle\, G^a_{\rho\nu},$$

то их компоненты $\langle\tau j\mu\,|\,u\nu\rangle$ *имеют следующие свойства*:

1°. *Если* $\boldsymbol{G}^{(j)}$ *не встречается в разложении*

$$\boldsymbol{G}^a \approx \sum_k n_k \boldsymbol{G}^{(k)} \tag{11}$$

представления $\boldsymbol{G}^a$ *на неприводимые компоненты, то*

$$\langle\tau j\mu\,|\,u\nu\rangle = 0.$$

2°. *Если* $\boldsymbol{G}^{(j)}$ *встречается в разложении* (11) *и если* $\langle a\nu\,|\,\sigma j\mu\rangle$ — *матрица, реализующая это разложение, то*

$$\langle\tau j\mu\,|\,u\nu\rangle = \sum_{\sigma=1}^{n_j} u^j_{\tau\sigma}\,\langle a\nu\,|\,\sigma j\mu\rangle^*, \tag{12}$$

где n_j *постоянных* $u^j_{\tau\sigma}$ *не зависят от* μ *и* ν.

Теорема В. *Если операторы* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu, \ldots$ *линейно преобразуются друг в друга, подобно базисным векторам унитарного представления* $\boldsymbol{G}^a$, *т. е. если*

$$GQ_\nu G^{-1} = \sum_{\rho} Q_\rho G^a_{\rho\nu},$$

то матричные элементы $\langle\tau_1 j_1\mu_1\,|\,Q_\nu\,|\,\tau_2 j_2\mu_2\rangle$ *имеют следующие свойства*:

1°. *Если* $\boldsymbol{G}^{(j_1)}$ *не встречается в разложении*

$$\boldsymbol{G}^a \otimes \boldsymbol{G}^{(j_2)} \approx \sum_k n_k^{aj_2} \boldsymbol{G}^{(k)} \tag{13}$$

тензорного произведения $\boldsymbol{G}^a \otimes \boldsymbol{G}^{(j_2)}$ на неприводимые компоненты, то

$$\langle\tau_1 j_1\mu_1\,|\,Q_\nu\,|\,\tau_2 j_2\mu_2\rangle = 0.$$

2°. *Если* $\boldsymbol{G}^{(j_1)}$ *имеется в разложении* $\boldsymbol{G}^a \otimes \boldsymbol{G}^{(j_2)}$ *и если* $\langle aj_2\nu\mu_2\,|\,\sigma k\chi\rangle$ — *матрица, реализующая это разложение, то*

$$\langle\tau_1 j_1\mu_1\,|\,Q_\nu\,|\,\tau_2 j_2\mu_2\rangle = \sum_{\sigma=1}^{n_{j_1}^{aj_2}} \langle\tau_1 j_1\,\|\,Q\,\|\,\tau_2 j_2\rangle_\sigma\,\langle aj_2\nu\mu_2\,|\,\sigma j_1\mu_1\rangle^*, \tag{14}$$

где $\langle\tau_1 j_1\,\|\,Q\,\|\,\tau_2 j_2\rangle_\sigma$ есть $n_{j_1}^{aj_2}$ постоянных, не зависящих от μ_1, μ_2 и ν.

Важное замечание. Матричные элементы $\langle a\nu\,|\,\sigma k\chi\rangle$, $\langle aj_2\nu\mu_2\,|\,\sigma k\chi\rangle$ унитарных матриц, которые фигурируют в формулировке теорем, удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{\nu\nu'} \langle a\nu\,|\,\sigma k\chi\rangle^*\, G^a_{\nu\nu'} \langle a\nu'\,|\,\sigma' k'\chi'\rangle = \delta_{\sigma\sigma'}\delta_{kk'} G^{(k)}_{\chi\chi'}, \tag{15а}$$

$$\sum_{\substack{\nu\nu'\\ \mu\mu'}} \langle aj\nu\mu\,|\,\sigma k\chi\rangle^*\, G^a_{\nu\nu'} G^{(j)}_{\mu\mu'} \left\langle aj\nu'\mu' \middle|\, \sigma' k'\chi' \right\rangle = \delta_{\sigma\sigma'}\delta_{kk'} G^{(k)}_{\chi\chi'}. \tag{15б}$$

Эти матричные элементы полностью определяются по заданным представлениям G^a, $G^a \otimes G^{(j)}$ и зависят только от того, как преобразуются векторы $|u\nu\rangle$ или операторы Q_ν под действием группы $\mathscr{G}$.

Доказательство теоремы А. Подействуем унитарным преобразованием $\langle a\nu|\sigma k\chi\rangle$ на базисные векторы $|u1\rangle$, $|u2\rangle$, ..., $|u\nu\rangle$, ... В результате получим новый набор базисных векторов

$$|u\sigma k\chi\rangle = \sum_\nu |u\nu\rangle\langle a\nu|\sigma k\chi\rangle. \tag{16}$$

Из условия унитарности получаем

$$|u\nu\rangle = \sum_{\sigma k\chi} |u\sigma k\chi\rangle\langle a\nu|\sigma k\chi\rangle^*. \tag{17}$$

Из определения этого унитарного преобразования следует, что d_k векторов $|u\sigma k\chi\rangle$ (здесь σ, k фиксированы, а меняется χ) растягивают подпространство $\mathscr{E}_u(\sigma k)$ и образуют стандартный базис для представления $G^{(k)}$ в этом подпространстве. Разлагая эти векторы по базисным векторам представления $\{\tau j\mu\}$, имеем

$$|u\sigma k\chi\rangle = \sum_{\tau j\mu} |\tau j\mu\rangle\langle\tau j\mu|u\sigma k\chi\rangle.$$

Матрица $\langle\tau j\mu|u\sigma k\chi\rangle$ (где μ и χ — переменные, а остальные индексы фиксированы), содержащая d_j строк и d_k столбцов, осуществляет гомоморфное отображение пространства $\mathscr{E}_u(\sigma k)$ в $\mathscr{E}(\tau j)$. Поскольку представления в этих пространствах либо неэквивалентны, либо совпадают, то из леммы Шура следует:

$$\langle\tau j\mu|u\sigma k\chi\rangle = \delta_{jk}\delta_{\mu\chi}u^j_{\tau\sigma}, \tag{18}$$

где $u^j_{\tau\sigma}$ — не зависящая от μ постоянная. С учетом этого результата, проектируя обе части равенства (17) на $|\tau j\mu\rangle$, получаем

$$\langle\tau j\mu|u\nu\rangle = \sum_{k\chi} \delta_{jk}\delta_{\mu\chi}\left(\sum_\sigma u^j_{\tau\sigma}\langle a\nu|\sigma k\chi\rangle^*\right).$$

Оба утверждения теоремы A содержатся в этом равенстве. ■

Доказательство теоремы B. Рассмотрим векторы $Q_\nu|\tau_2 j_2\mu_2\rangle$ (здесь ν и μ_2 меняются, а τ_2 и j_2 фиксированы). Эти векторы линейно преобразуются друг в друга подобно базисным векторам представления $G^a \otimes G^{(j_2)}$. Отсюда в общем случае не следует, что пространство, растягиваемое этими векторами, связано с этим представлением, так как эти векторы не обязаны быть линейно независимыми. Однако если это представление не совпадает с представлением $G^a \otimes G^{(j_2)}$, то, согласно следствию, соответствующее представление является одной из компонент представления $G^a \otimes G^{(j_2)}$. Несмотря на то, что рассматриваемые векторы могут и не быть линейно независимыми, мы будем оперировать с ними точно так же, как с векторами $|u1\rangle$, ..., $|u\nu\rangle$, ... в теореме A.

Определим векторы

$$|q\tau_2 j_2\sigma k\chi\rangle = \sum_{\nu\mu_2} Q_\nu|\tau_2 j_2\mu_2\rangle\langle a j_2\nu\mu_2|\sigma k\chi\rangle. \tag{16'}$$

Из соотношения унитарности для матрицы $\langle a j_2\nu\mu_2|\sigma k\chi\rangle$ следует:

$$Q_\nu|\tau_2 j_2\mu_2\rangle = \sum_{\sigma k\chi} |q\tau_2 j_2\sigma k\chi\rangle\langle a j_2\nu\mu_2|\sigma k\chi\rangle^*. \tag{17'}$$

d_k векторов $|q\tau_2 j_2 \sigma k\chi\rangle$ (где χ меняется, а остальные индексы фиксированы) либо все нулевые, либо образуют стандартный базис представления $G^{(k)}$. В последнем случае можно применить теорему A. Итак, в любом случае имеем

$$\langle \tau j\mu \,|\, q\tau_2 j_2 \sigma k\chi\rangle = \delta_{jk}\delta_{\mu\chi}\langle \tau j \,\|\, Q \,\|\, \tau_2 j_2\rangle_\sigma,$$

где $\langle \tau j \,\|\, Q \,\|\, \tau_2 j_2\rangle_\sigma$ — постоянные, не зависящие от μ. Следовательно, проектируя обе части равенства (17′) на $|\tau_1 j_1 \mu_1\rangle$, получаем равенство

$$\langle \tau_1 j_1 \mu_1 \,|\, Q_\nu \,|\, \tau_2 j_2 \mu_2\rangle = \sum_{k\chi} \delta_{j_1 k}\delta_{\mu_1\chi}\left(\sum_\sigma \langle \tau_1 j_1 \,\|\, Q \,\|\, \tau_2 j_2\rangle_\sigma \langle a j_2 \nu\mu_2 \,|\, \sigma k\chi\rangle^*\right),$$

из которого следуют оба утверждения теоремы B.

Правила отбора. *Если $|u\rangle$, Q, $|v\rangle$ преобразуются по представлениям G^u, G^Q, G^v соответственно, и если ни одна из неприводимых компонент представления G^v не встречается в разложении $G^Q \otimes G^u$, то*

$$\langle v \,|\, Q \,|\, u\rangle = 0.$$

Это правило широко используется. В случае, когда G^u и G^v неприводимы, оно следует непосредственно из утверждения 1° теоремы B. Однако оно справедливо и в том случае, когда ни одно из представлений G^u, G^Q, G^v не является неприводимым. Для доказательства достаточно заметить, что $Q|u\rangle$ преобразуется (следствие) по представлению $G^Q \otimes G^u$ или по одной из его компонент, и применить теорему A к вектору $Q|u\rangle$.

Пример: группа вращений. Теоремы A и B применимы, в частности, к группе вращений.

Задача сложения двух моментов импульса есть не что иное как конкретное воплощение теоремы A. Введенные в § XIII. 25 $(2j_1+1)(2j_2+1)$ векторов $|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ преобразуются как базисные векторы представления $D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$, образованного тензорным перемножением неприводимых представлений $D^{(j_1)}$, $D^{(j_2)}$ группы вращений [1]). Согласно результатам раздела V главы XIII разложение этого представления на неприводимые имеет вид

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} \approx \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D^{(J)}, \tag{19}$$

а элементами унитарной матрицы, осуществляющей это разложение, являются коэффициенты Клебша — Гордана $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle$. Поскольку каждое неприводимое представление встречается в разложении (19) не более чем один раз, т. е. $n_J^{j_1 j_2} = 1$ при $J = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \ldots, |j_1 - j_2|$, то сумма в правой части равенства (12) содержит в рассматриваемом случае только один член. Таким образом, компоненты вектора $|\alpha j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ в каждом из подпространств $\mathscr{E}(\tau J)$ известны с точностью до постоянной (не зависящей от M).

Аналогично теорема Вигнера — Эккарта (§ XIII. 32) следует из применения теоремы B к компонентам $T_q^{(k)}$ тензорного оператора, неприводимого по отношению к вращениям, т. е. к $(2k+1)$ операторам, преобразующимся как базисные векторы представления $D^{(k)}$.

Матричный элемент $\langle \tau_1 j_1 m_1 \,|\, T_q^{(k)} \,|\, \tau_2 j_2 m_2\rangle$ определяется выражением (14). Поскольку каждая компонента $D^{(J)}$ представления $D^{(k)} \otimes D^{(j_2)}$ встречается

---

[1]) Термин «группа вращений $\mathscr{R}_3$» используется для упрощения. Фактически имеется в виду «накрывающая группа» $\mathscr{U}_2$ группы $\mathscr{R}_3$.

только один раз в разложении этого представления на неприводимые ($n_J^{k j_2} = 1$ при $J = k + j_2, k + j_2 - 1, \ldots, |k - j_2|$), то сумма в правой части равенства (14) содержит в рассматриваемом случае только один член.

(*N. B.* Определение приведенных матричных элементов $\langle \tau_1 j_1 \| T^{(k)} \| \tau_2 j_2 \rangle$, используемое в главе XIII, отличается от принятого здесь только множителем $\sqrt{2j_1 + 1}$.)

Инвариантные наблюдаемые. $\mathcal{G}$-вырождение. *Наблюдаемая* Q называется *инвариантной* относительно группы $\mathcal{G}$, если

$$[Q, G] = 0 \text{ при всех } g \in \mathcal{G}.$$

d_j векторов $Q|\tau j \mu\rangle$ (τj фиксированы, μ переменно) преобразуются как базисные векторы представления $G^{(j)}$. Теорема B (или, что эквивалентно, теорема A, или лемма Шура) означает в рассматриваемом случае, что

$$\langle \tau j \mu | Q | \tau' j' \mu' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} Q^{(j)}_{\tau\tau'}. \tag{20}$$

Таким образом, Q описывается матрицей особенно простого вида в стандартном представлении группы $\mathcal{G}$.

В таком представлении задача на собственные значения наблюдаемой Q сводится к диагонализации эрмитовых матриц $Q^{(j)}$, элементы $Q^{(j)}_{\tau\tau'}$ которых зависят только от двух индексов τ и τ'. Каждому значению j, таким образом, соответствует некоторое число собственных значений наблюдаемой Q, а именно, — собственные значения $q_1^{(j)}, q_2^{(j)}, \ldots, q_i^{(j)}, \ldots$ матрицы $Q^{(j)}$. *Каждое невырожденное собственное значение этой матрицы является d_j-кратно вырожденным собственным значением наблюдаемой Q.* Каждое p-кратно вырожденное собственное значение матрицы $Q^{(j)}$ является pd_j-кратно вырожденным собственным значением для Q.

Укажем, в частности, следующие два свойства:

1°. если Q инвариантна относительно $\mathcal{G}$, то подпространства, соответствующие каждому из собственных значений наблюдаемой Q, также инвариантны относительно $\mathcal{G}$;

2°. если наблюдаемая Q, инвариантная относительно группы $\mathcal{G}$, определена на конечномерном пространстве, векторы которого преобразуются друг в друга согласно представлению G и если разложение этого представления на неприводимые имеет вид

$$G \approx \sum_k n_k G^{(k)},$$

то число различных собственных значений наблюдаемой Q не превышает $\sum_k n_k$.

Неприводимые тензорные операторы. Если оператор Q преобразуется по представлению G^Q, то всегда можно представить Q в виде суммы операторов, каждый член которой преобразуется по одной из неприводимых компонент представления G^Q. Поэтому неприводимые тензорные операторы заслуживают особого рассмотрения.

По определению компоненты неприводимого тензорного оператора $T^{(k)}$ порядка k линейно преобразуются друг в друга в соответствии с неприводимым представлением $G^{(k)}$. Таким образом, этот оператор определяет d_k-мерное пространство представления $G^{(k)}$. В частности, этот оператор имеет d_k *стандартных компонент* $T^{(k)}_\chi$ (k фиксировано, χ переменно), образующих стандартный базис в указанном пространстве представления. По определению

(см. соотношение (10))

$$GT_{\chi}^{(k)}G^{-1}=\sum_{\rho}T_{\rho}^{(k)}G_{\rho\chi}^{(k)}. \tag{21}$$

Пусть разложение на неприводимые тензорного произведения неприводимых представлений $\boldsymbol{G}^{(g)}$ и $\boldsymbol{G}^{(h)}$ имеет вид

$$\boldsymbol{G}^{(g)}\otimes\boldsymbol{G}^{(h)}\approx\sum_{l}n_{l}^{gh}\boldsymbol{G}^{(l)} \tag{22}$$

и пусть $\langle gh\gamma\eta\,|\,\sigma l\lambda\rangle$ $\left(\sigma=1,\ldots,n_{l}^{gh}\right)$ — элементы унитарной матрицы, реализующей это разложение. В стандратном представлении компоненты $T_{\chi}^{(k)}$ имеют, согласно теореме B, следующие свойства:

$$\left\langle\tau_1 j_1\mu_1\,\middle|\,T_{\chi}^{(k)}\,\middle|\,\tau_2 j_2\mu_2\right\rangle=\begin{cases}0, & \text{если } n_{j_1}^{kj_2}=0\\ \sum\limits_{\sigma=1}^{n_{j_1}^{kj_2}}\left\langle\tau_1 j_1\,\middle\|\,T_{\chi}^{(k)}\,\middle\|\,\tau_2 j_2\right\rangle_{\sigma}\langle kj_2\chi\mu_2\,|\,\sigma j_1\mu_1\rangle^{*}, & \text{если } n_{j_1}^{kj_2}\neq 0.\end{cases} \tag{23}$$

Заключение. Из изложенного выше следует, что мы можем использовать во всей полноте свойства кет-векторов и операторов квантовой механики относительно преобразований данной группы, если известны:

(i) все неприводимые представления (с точностью до эквивалентности) данной группы и в каждом из этих представлений определены матрицы, отвечающие выбору стандартного базиса;

(ii) разложения тензорных произведений таких представлений на неприводимые компоненты, и построены матрицы, задающие разложения каждого из таких произведений (т. е. определены коэффициенты n_{l}^{gh} в уравнении (22) и «коэффициенты Клебша — Гордана» $\langle gh\gamma\eta/\sigma l\lambda\rangle$).

Раздел III. КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ

Обозначения:

$\mathscr{F}$ — рассматриваемая группа;
N — порядок группы;
L — число классов ($L\leqslant N$);
$\mathscr{C}$ — класс сопряженных элементов;
l_a — число элементов в классе $\mathscr{C}_a$;
$\boldsymbol{F}$ — представление группы $\mathscr{F}$;
F — матрица, соответствующая элементу f в $\boldsymbol{F}$;
$\boldsymbol{F}^r$ — регулярное представление;
f — элемент группы;
I — единичный элемент;
f^a — элемент класса $\mathscr{C}_a$;
$k_a\equiv\sum\limits_{i=1}^{l_a}f_i^a$ — сумма элементов класса $\mathscr{C}_a$;
χ — множество характеров представления $\boldsymbol{F}$;
$K_a\equiv\sum\limits_{i=1}^{l_a}F_i^a$

$\chi(a) \equiv \mathrm{Tr}\, F^a = \frac{1}{l_a} \mathrm{Tr}\, K_a;$

$F^{(j)}$ — j-ое неприводимое представление (с точностью до эквивалентности);
d_j — размерность представления $F^{(j)}: d_j = \chi^{(j)}(I)$;
$F^{(j)}$ — унитарная матрица, соответствующая элементу f в представлении $F^{(j)}$ в фиксированном стандартном базисе;
$F^{(j)}_{\alpha\beta} \equiv (f \mid j\alpha\beta)$ — элемент матрицы $F^{(j)}$, находящийся на пересечении α-й строки и β-го столбца;
$\chi^{(j)}(a) \equiv (a \mid j)$ — характер класса $\mathscr{C}_a$ в представлении $F^{(j)}$.

§ 10. Основные понятия

Лемма о перенумерации. Если $f_1, f_2, \ldots, f_N$ — элементы группы, записанные в определенном порядке, то каждый элемент группы появляется один и только один раз в последовательности $f_1 f, f_2 f, \ldots, f_N f$, которая получается умножением каждого из элементов группы на один и тот же элемент f. Эта последовательность состоит из всех элементов группы, расставленных в другом порядке.

(Все свойства данного параграфа следуют из этой леммы.)

Подгруппа группы $\mathscr{F}$. Если $\mathscr{H}$ — подгруппа группы $\mathscr{F}$ порядка N_h, то N кратно N_h

$$N = hN_h \qquad (h \text{ — целое и } > 0).$$

Целое число h называется *индексом* подгруппы.

Если $\mathscr{H}$ — инвариантная подгруппа, то ее индекс h равен порядку фактор-группы $\mathscr{F}/\mathscr{H}$.

Классы сопряженных элементов. Порядок N кратен l_a — числу элементов в любом из классов сопряженных элементов

$$N = p_a l_a \qquad (p_a \text{ — положительное целое } > 0).$$

Элементы из $\mathscr{F}$, коммутирующие с данным элементом f^a класса $\mathscr{C}_a$, образуют подгруппу индекса l_a.

Групповая алгебра. Сумма k_a элементов класса. Линейные комбинации элементов группы $\sum_{s=1}^{N} x^s f_s$, где $x^1, x^2, \ldots, x^N$ — произвольные комплексные числа, образуют алгебру, которую мы будем называть групповой алгеброй.

L элементов групповой алгебры, которые получаются сложением элементов каждого класса, называются суммами элементов класса

$$k_a = \sum_{i=1}^{l_a} f_i^a \qquad (a = 1, 2, \ldots, L). \tag{24}$$

Эти L элементов коммутируют со всеми элементами групповой алгебры, и любой другой элемент, обладающий этим свойством, является линейной комбинацией сумм элементов класса.

Алгебра сумм элементов класса. Групповая алгебра является коммутативной только в том случае, когда $\mathscr{F}$ — абелева группа. Однако линейные комбинации L операторов k_a образуют коммутативную алгебру, называемую алгеброй сумм элементов класса или центром групповой алгебры. (Ес-

ли группа $\mathcal{F}$ абелева, то алгебра сумм идентична групповой алгебре.) Имеем

$$k_a k_b = k_b k_a = \sum_{c=1}^{L} g_{ab}^c k_c, \tag{25}$$

где коэффициенты g_{ab}^c — *целые* неотрицательные числа.

Будучи линейно независимыми, L сумм элементов класса связаны соотношением (25) и могут быть представлены как функции от меньшего чем L числа сумм.

Каждая сумма k_a удовлетворяет алгебраическому уравнению, порядок которого не превосходит L.

§ 11. Представления

Регулярное представление F^r. Регулярным называют N-мерное представление, которое получается, если за элементы базиса в пространстве представления взять N элементов группы. Векторами пространства регулярного представления служат элементы групповой алгебры.

Все элементы каждой строки и каждого столбца $N \times N$ матрицы, отвечающей элементу f в представлении F^r, равны нулю, кроме одного, равного 1.

Почти все основные свойства представлений группы являются простыми следствиями леммы о перенумерации, леммы Шура и свойств регулярного представления.

Общие свойства представлений. Всякое представление конечной группы эквивалентно *унитарному* представлению этой группы.

Если два представления имеют один и тот же набор *характеров*, то они эквивалентны [1]) (обратное очевидно).

Если $F_1, F_2, \ldots, F_N$ — набор линейных операторов, образующих конечную группу $\mathcal{F}$, и если $|u\rangle$ — заданный вектор в пространстве кет-векторов, то представление F^u, по которому $|u\rangle$ преобразуется под действием элементов группы, является *компонентой регулярного представления* F^r (если F^u имеет размерность N, то $F^u \approx F^r$).

В заданном представлении F суммы $k_1, k_2, \ldots, k_L$ описываются матрицами $K_1, K_2, \ldots, K_L$, которые можно *одновременно* привести к *диагональному* виду и которые коммутируют с каждой матрицей, представляющей элемент группы:

$$[K_a, F] = 0. \tag{26}$$

Неприводимые представления.

а) *Число* неэквивалентных неприводимых представлений равно числу классов L.

б) *Размерность*. Если d_j — размерность j-й неприводимой компоненты $F^{(j)}$, $(j = 1, 2, \ldots, L)$, то

$$N/d_j \text{ — целое}, \tag{27}$$

$$\sum_{j=1}^{L} d_j^2 = N. \tag{28}$$

---

[1]) Это следует из единственности разложения на неприводимые компоненты и из свойства ортогональности характеров неприводимых представлений (см. ниже). Это свойство сохраняется и в случае бесконечных групп, если два рассматриваемых представления вполне приводимы.

в) *Соотношения ортогональности.* Если унитарные неприводимые представления $F^{(j)}$, $F^{(k)}$ либо не эквивалентны, либо равны [1]), то

$$\frac{d_j}{N}\sum_{f=1}^{N}(f\mid j\alpha\beta)(f\mid k\gamma\delta)^*=\delta_{jk}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}. \tag{29}$$

Из (29) следует соотношение ортогональности для характеров

$$\sum_{a=1}^{L}\frac{l_a}{N}(a\mid j)(a\mid k)^*=\delta_{jk}. \tag{30}$$

Каждое представление вполне определяется стандартным выбором его базисных векторов. N^2 величин

$$\sqrt{\frac{d_j}{N}}\,F^{(j)}_{\alpha\beta}\equiv\sqrt{\frac{d_j}{N}}\,(f\mid j\alpha\beta)$$

$$(f=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ L;\quad \alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ d_j)$$

являются элементами унитарной $N\times N$ матрицы. Аналогично L^2 величин $\sqrt{l_a/N}\,\chi^{(j)}(a)\equiv\sqrt{l_a/N}\,(a\mid j)$ являются элементами унитарной $L\times L$ матрицы. Из двух соотношений унитарности (29) и (30) получаем соответственно

$$\sum_{j=1}^{L}\sum_{\alpha,\beta=1}^{d_j}\frac{d_j}{N}(f\mid j\alpha\beta)(g\mid j\alpha\beta)^*=\delta_{fg}, \tag{31}$$

$$\frac{l_a}{N}\sum_{j=1}^{L}(a\mid j)(b\mid j)^*=\delta_{ab}. \tag{32}$$

г) *Специальные случаи.* Если $F^{(k)}$ — единичное представление ($k=1$), то из (29) и (30) следует

$$\sum_{f=1}^{N}(f\mid j\alpha\beta)=N\delta_{j1},\qquad \sum_{a=1}^{L}l_a(a\mid j)=N\delta_{j1}. \tag{33а}$$

Если g — единичный элемент ($g=I$), то (31) и (32) дают

$$\sum_{j\alpha\beta}d_j(f\mid j\alpha\beta)=N\delta_{fI},\qquad \sum_{j}d_j(a\mid j)=N\delta_{aI}. \tag{33б}$$

---

[1]) Доказательство. Если S есть $d_j\times d_k$-матрица, то матрица $T\equiv\sum_{f=1}^{N}F^{(f)}SF^{(k)-1}$ удовлетворяет соотношению $F^{(j)}T=TF^{(k)}$ для всех f (лемма о перенумерации). Следовательно (лемма Шура), матрица T либо тождественно равна нулю, если $F^{(j)}$ и $F^{(k)}$ неэквивалентны, либо кратна единичной, если представления совпадают. Фиксируя S подходящим образом, получаем соотношения (29).

д) *Соотношения между характерами и суммами элементов класса.* Матрицы $K_a^{(j)}$, представляющие k_a, *кратны единичной матрице* (лемма Шура)

$$K_a^{(j)} = k_a^{(j)} 1^{(j)}, \tag{34}$$

$$k_a^{(j)} = \frac{1}{d_j} \operatorname{Tr} K_a^{(j)} = \frac{l_a}{d_j} (a \mid j). \tag{35}$$

Из (25) и (35) следует равенство

$$l_a l_b (a \mid j)(b \mid j) = d_j \sum_{c=1}^{L} g_{ab}^c l_c (c \mid j), \tag{36}$$

из которого в силу соотношения ортогональности (32) имеем

$$g_{ab}^c = \frac{l_a l_b}{N} \sum_{j=1}^{L} \frac{1}{d_j} (a \mid j)(b \mid j)(c \mid j)^*. \tag{37}$$

§ 12. Неприводимые компоненты представления

Общий метод. Для получения коэффициентов n_j разложения представления F на неприводимые компоненты

$$F \approx \sum_{j=1}^{L} n_j F^{(j)} \tag{38}$$

достаточно знать множество его характеров $\chi(a)$ и множество характеров L неприводимых представлений группы. Согласно уравнению (9) и соотношениям (30) имеем

$$n_j = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^{L} l_a (a \mid j)^* \chi(a). \tag{39}$$

(*N. B.* Справедливо соотношение

$$p = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^{L} l_a |\chi(a)|^2 = \sum_{j=1}^{L} n_j^2.$$

Таким образом, равенство $p = 1$ является критерием неприводимости представления F.)

Регулярное представление ($\chi^r(a) = N\delta_{a1}$). Регулярное представление содержит каждое неприводимое представление группы столько раз, какова размерность этого представления

$$F^r \approx \sum_{j=1}^{L} d_j F^{(j)}. \tag{40}$$

(Отсюда следует соотношение (28).)

Тензорное произведение неприводимых представлений.

$$F^{(g)} \otimes F^{(h)} \approx \sum_{j=1}^{L} n_j^{gh} F^{(j)}. \tag{41}$$

Уравнение (9) в рассматриваемом случае имеет вид

$$(a \mid g)(a \mid h) = \sum_{j=1}^{L} n_j^{gh} (a \mid j), \tag{42}$$

а соотношение (39) означает, что

$$n_j^{gh} = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^{L} l_a (a \mid g)(a \mid h)(a \mid j)^*. \tag{43}$$

Эти два соотношения следует сравнить с (36) и (37).

Лемма. Представление $F^{(j)}$ столько раз содержится в разложении $F^{(g)} \otimes F^{(h)}$ на неприводимые, сколько раз содержится $F^{(g)}$ в разложении $F^{(j)} \otimes F^{(h)*}$.

(*N. B.* Если все неприводимые представления самосопряжены, то n_j^{gh} симметрично по всем трем индексам.)

Одномерные компоненты. Тензорное произведение $F^{(g)} \otimes F^{(h)}$ двух неприводимых представлений содержит одномерную компоненту не более одного раза. Необходимое и достаточное условие наличия одномерного представления F_1 в разложении этого произведения состоит в эквивалентности

$$F^{(g)} \approx F_1 \otimes F^{(h)*}. \tag{44}$$

В частности, пространство представления $\mathscr{E}_g \otimes \mathscr{E}_h$ рассматриваемого произведения содержит не более одного вектора, инвариантного относительно преобразований группы. Такой вектор существует в том и только в том случае, если

$$F^{(g)} \approx F^{(h)*}. \tag{45}$$

§ 13. Построение неприводимых инвариантных подпространств

Начиная с этого места, мы будем предполагать, что для каждого неприводимого представления $F^{(j)}$ выбран стандартный базис. Мы будем говорить, что вектор имеет тип $(j\mu)$, если он преобразуется как μ-я компонента вектора стандартного базиса представления $F^{(j)}$. В этих предположениях унитарные матрицы $F^{(j)}$ определены однозначно. Таким образом, наша задача состоит в построении стандартного базиса, отвечающего группе $\mathscr{F}$, в пространстве $\mathscr{E}$ представления F, определенного в начале § 12. Мы ограничимся случаем, когда $\mathscr{E}$ порождено действием операторов $F_1, F_2, \ldots, F_N$ группы на заданный вектор $|\rangle$ пространства кет-векторов ($n_j \leqslant d_j$). В квантово-механических приложениях теории групп общий случай всегда можно свести к этому специальному.

Базисные операторы $B_{\mu\nu}^{(j)}$ регулярного представления. Введем N операторов

$$B_{\mu\nu}^{(j)} = \frac{d_j}{N} \sum_{j=1}^{N} (j \mid j\mu\nu)^* F \tag{46}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, L;\ \mu, \nu = 1, 2, \ldots, d_j).$$

Из соотношений ортогональности (31) следует, что все N операторов группы являются линейными комбинациями этих операторов

$$F = \sum_{j=1}^{L} \sum_{\mu,\,\nu=1}^{d_j} (f \mid j\mu\nu)\, B^{(j)}_{\mu\nu}. \tag{47}$$

Из унитарности F, леммы о перенумерации и соотношений (29) получаем основные свойства операторов

$$B^{(j)\dagger}_{\mu\nu} = B^{(j)}_{\nu\mu}, \tag{48}$$

$$FB^{(j)}_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa} B^{(j)}_{\varkappa\nu}\, (f \mid j\varkappa\mu), \tag{49}$$

$$B^{(j)}_{\mu\nu} B^{(k)}_{\rho\sigma} = \delta_{jk}\delta_{\nu\rho} B^{(j)}_{\mu\sigma}. \tag{50}$$

Согласно (49) N элементов групповой алгебры, описываемые матрицами $B^{(j)}_{\mu\nu}$, образуют стандартный базис регулярного представления.

Построение стандартного базиса при помощи операторов $B^{(j)}_{\mu\nu}$. Если известно как построить операторы $B^{(j)}_{\mu\nu}$, т. е. если известны N^2 матричных элементов $(f \mid j\mu\nu)$, то задача построения стандартного базиса в $\mathscr{E}$ практически решена.

Действительно:

а) если вектор $B^{(j)}_{\mu\nu} \mid \rangle$ отличен от нуля, то он имеет тип $(j\mu)$ (ур. (49));

б) N векторов $B^{(j)}_{\mu\nu} \mid \rangle$ растягивают все пространство $\mathscr{E}$ (ур. (47));

в) d_j^2 векторов $B^{(j)}_{\mu\nu} \mid \rangle$, соответствующих одному и тому же значению индекса j, имеют перечисленные ниже свойства:

(i) d_j векторов, соответствующих одному и тому же значению ν ($\mu = 1, 2, \ldots, d_j$), имеют одну и ту же норму и образуют стандартный базис представления $F^{(j)}$;

(ii) d_j векторов, соответствующих одному и тому же значению μ ($\nu = 1, 2, \ldots, d_j$), растягивают n_j-мерное пространство $\mathscr{E}_{j\mu}$ векторов типа $(j\mu)$. Они связаны друг с другом $(d_j - n_j)$ линейными соотношениями, коэффициенты которых не зависят от μ (в частности, если $n_j = 1$, то эти d_j векторов пропорциональны друг другу и коэффициенты пропорциональности не зависят от μ).

Таким образом, для построения стандартного базиса в $\mathscr{E}$, соответствующего заданной группе, нам необходимо только выбрать для каждого значения j определенное значение $\bar{\mu}$ индекса μ и, используя, например, метод ортогонализации Шмидта, построить n_j базисных векторов в пространстве $\mathscr{E}_{j\bar{\mu}}$:

$$|\tau j\bar{\mu}\rangle = \sum_{\nu=1}^{d_j} c_\nu^{\tau j} B^{(j)}_{\bar{\mu}\nu} \mid \rangle, \quad (\tau = 1, 2, \ldots, n_j),$$

$$\langle \tau j\bar{\mu} \mid \tau' j\bar{\mu}\rangle = \delta_{\tau\tau'}.$$

Тогда векторы

$$|\tau j\mu\rangle = \sum_{\nu=1}^{d_j} c_\nu^{\tau j} B^{(j)}_{\mu\nu} \mid \rangle$$

$$(j = 1, 2, \ldots, L;\ \mu = 1, 2, \ldots, d_j;\ \tau = 1, 2, \ldots, n_j)$$

образуют искомый стандартный базис; d_j векторов $|\tau j\mu\rangle$ (τ и j фиксированы, $\mu = 1, 2, \ldots, d_j$) образуют стандартный базис для представления $F^{(j)}$.

Другие свойства операторов $B^{(j)}_{\mu\nu}$. Проекторы на подпространства $\mathscr{E}_{j\mu}$ и переход от одного из них к другому. Введем обозначения

$$\Pi^{(j)}_{\mu} \equiv B^{(j)}_{\mu\mu} \equiv \frac{d_j}{N}\sum_{f=1}^{N}(f \mid j\mu\mu)^* F. \tag{51}$$

Операторы $\Pi^{(j)}_{\mu}$ ($j = 1, 2, \ldots, L$; $\mu = 1, 2, \ldots, d_j$) образуют множество ортогональных проекторов, сумма которых равна 1 [1]):

$$\Pi^{(j)\dagger}_{\mu} = \Pi^{(j)}_{\mu}, \tag{52}$$

$$\Pi^{(j)}_{\mu}\Pi^{(k)}_{\rho} = \delta_{jk}\delta_{\mu\rho}\Pi^{(j)}_{\mu}, \tag{53}$$

$$\sum_{j=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{d_j}\Pi^{(j)}_{\mu} = 1. \tag{54}$$

Оператор $\Pi^{(j)}_{\mu}$ есть проектор на пространство $\mathscr{E}_{j\mu}$ векторов типа $(j\mu)$ (ур. (49)). *Разложение единицы* (54) позволяет записать каждый вектор из $\mathscr{E}$ в виде суммы векторов, каждый из которых принадлежит соответствующему подпространству $\mathscr{E}_{j\mu}$:

$$|u\rangle = \sum_{j\mu}\Pi^{(j)}_{\mu}|u\rangle.$$

При $\mu \neq \nu$ оператор $B^{(j)}_{\mu\nu}$ является *оператором перехода* из подпространства $\mathscr{E}_{j\nu}$ в пространство $\mathscr{E}_{j\mu}$. Смысл такого термина очевиден: из уравнений (50) и (48) следует

$$\Pi^{(g)}_{\gamma}B^{(j)}_{\mu\nu}\Pi^{(h)}_{\eta} = \delta_{gj}\delta_{hj}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\nu\eta}B^{(j)}_{\mu\nu}, \tag{55}$$

$$B^{(j)\dagger}_{\mu\nu}B^{(j)}_{\mu\nu} = \Pi^{(j)}_{\nu}. \tag{56}$$

Таким образом, оператор $B^{(j)}_{\mu\nu}$, действуя на произвольный вектор, ортогональный подпространству $\mathscr{E}_{j\nu}$, обращает этот вектор в нуль, а при действии на вектор из $\mathscr{E}_{j\nu}$ переводит его в вектор из $\mathscr{E}_{j\mu}$. Тем самым $B^{(j)}_{\mu\nu}$ устанавливает биоднозначное соответствие между подпространствами $\mathscr{E}_{j\nu}$ и $\mathscr{E}_{j\mu}$, сохраняющее скалярное произведение.

Если $|\sigma j\nu\rangle$ — вектор типа $(j\nu)$, то d_j векторов

$$B^{(j)}_{\mu\nu}|\sigma j\nu\rangle \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, d_j)$$

образуют стандартный базис представления $F^{(j)}$.

Использование сумм элементов класса K_a. Проектор $P^{(j)}$. Если мы можем ограничиться определением неприводимых инвариантных подпространств в пространстве $\mathscr{E}$, то нет необходимости в определении N^2 матричных элементов $F^{(j)}_{\mu\nu} \equiv (f \mid j\mu\nu)$ в стандартном базисе.

---

[1]) Это верно для любого представления F даже в том случае, когда оно не является компонентой F^r.

Суммы элементов класса

$$K_a = \sum_{i=1}^{l_a} F_i^a \qquad (a = 1, 2, \ldots, L)$$

имеют по крайней мере один общий набор базисных векторов. Каждому вектору этого набора соответствует некоторая последовательность $k \equiv (k_1, k_2, \ldots, \ldots, k_L)$ собственных значений операторов K_a. Всего имеется L наборов возможных собственных значений $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(L)}$, определяемых соотношением (35), каждый из которых соответствует определенному неприводимому представлению группы. Следовательно, если нам удастся одновременно диагонализовать $K_1, K_2, \ldots, K_L$, то каждая последовательность собственных значений $k^{(j)}$ будет $n_j d_j$-кратно вырождена и соответствующее подпространство $\mathscr{E}_j$ определяет компоненту $n_j F^{(j)}$ представления F. Если все n_j равны единице, то разложение $\mathscr{E}$ на неприводимые достигнуто. Если же это не так, то такое же разложение следует провести в каждом из подпространств $\mathscr{E}_j$, для которого $n_j > 1$.

Напомним, что L операторов K являются функциями от меньшего числа этих операторов, и задача диагонализациии будет решена, если мы диагонализуем эти последние операторы.

Задача диагонализации операторов K практически сводится к определению характеров всех неприводимых представлений группы. (Таблицы характеров имеются для большинства групп, используемых в физике. Соответствующая литература указана в первой сноске этого Дополнения.) Действительно, проектор $P^{(j)}$ на подпространство $\mathscr{E}_j$ имеет вид

$$P^{(j)} \equiv \sum_{\mu=1}^{d_j} \Pi_\mu^{(j)} = \frac{d_j}{N} \sum_{f=1}^{N} \chi^{(j)*}(f)\, F = \frac{d_j}{N} \sum_{a=1}^{L} (a \mid j)^* K_a. \tag{57}$$

Раздел IV. **ПЕРЕСТАНОВКИ (ГРУППА $\mathscr{P}_n$)**[1]

§ 14. Основные понятия. Циклы. Классы

Определение. Предположим, что нам даны n объектов, распределенных в n «ящиках» например, n частиц в n квантовых состояниях. Перестановкой этих n объектов называется изменение их распределения по этим n «ящикам». Мы можем обозначить объекты целыми числами от 1 до n и определить данную перестановку символом

$$p = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — целые числа от 1 до n, записанные в произвольном порядке, а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — те же целые числа, записанные в таком порядке, что объект β_i занимает при новом распределении место объекта с номером α_i в исходном распределении. Так, при перестановке 5 объектов

$$p_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

объект 5 занимает место объекта 1, 3 — место 2 и т. д. Как видно, значение символа перестановки не меняется при изменении в нем расположения столбцов.

---

[1]) Простое и подробное изложение теории таблиц Юнга и их приложения к группе перестановок приведены в книге: *D. E. Rutherford.* Substitutional Analysis, Edinburgh, University Press, 1948. Основы теории группы $\mathscr{P}_n$ содержатся в книге: Б. Л. Ван-дер-Варден. Алгебра. М., Наука, 1976.

Последовательное применение двух перестановок p_a, p_b эквивалентно одной перестановке $p_c \equiv p_b p_a$. Последнюю легко выписать, если верхняя строка символа p_b совпадает с нижней строкой символа p_a. Например, если p_a — определенная выше перестановка, а p_b имеет вид

$$p_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

то $p_c \equiv p_b p_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

В частности, обратной к p будет перестановка, символ которой получается из символа p заменой строк

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Перестановки n объектов образуют группу порядка $n!$

Циклические перестановки. Обозначение. Перестановка

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \dots & \alpha_n \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_k & \alpha_1 & \alpha_{k+1} & \dots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

в которой α_2 занимает место α_1, α_3 — место α_2, ..., α_k — место α_{k-1}, α_1 — место α_k, а остальные $(n-k)$ объектов остаются на своих местах, по определению называется *циклической перестановкой* или *циклом* k *объектов* α_1, α_2, ..., α_k; k называется *длиной цикла*. Такую перестановку можно представить символом

$$p = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k). \tag{58}$$

Условимся, что первый объект в этой строке α_1 занимает место последнего α_k, а каждый последующий α_i — место предыдущего α_{i-1}. При таком обозначении порядок k элементов определен только с точностью до циклической перестановки.

Два цикла, не имеющие общих элементов, коммутируют.

Произвольная перестановка n объектов равна произведению коммутирующих циклов (эти циклы не имеют общих элементов) *и такое разбиение на циклы единственно.*

Так, определенная выше перестановка p_a равна *произведению двух циклов* (154) и (23) и ее можно записать в виде

$$p_a = (154)\ (23) = (23)\ (154).$$

Аналогично

$$p_b = (14)\ (235), \quad p_c = (125)\ (3)\ (4).$$

Цикл единичной длины эквивалентен тождественному преобразованию и его можно опустить, записав просто $p_c = (125)$. Если такие циклы не опускать, то сумма длин всех циклов перестановки равна n.

Каждая перестановка полностью определяется:

(i) *ее структурой циклов*, т. е. числом циклов h $(h \leqslant n)$ и длинами циклов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_h = n)$;

(ii) набором чисел в каждом цикле и порядком этих чисел с точностью до циклической перестановки.

Если обратить порядок следования чисел в каждом цикле, то получится обратная перестановка. Так,

$$p_a^{-1} = (451)\ (32).$$

Классы. *Две перестановки с одинаковой структурой циклов принадлежат к одному классу.* Обратное утверждение также справедливо.

Циклическое обозначение для сопряженного к p элемента $p' = xpx^{-1}$ получается применением перестановки x к последовательности n чисел, фигурирующих в циклическом обозначении p. Например,

$$p_a = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (154)\ (23),$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad x^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$p' = xp_a x^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (253)\ (41).$$

Транспозиции. Транспозицией называется перестановка двух объектов (цикл длины 2). Транспозиции образуют класс в $\mathcal{P}_n$.

Произвольный цикл данной длины k равен произведению $(k-1)$ транспозиций

$$(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k) = (\alpha_1\alpha_2)\ (\alpha_2\alpha_3) \ldots (\alpha_{k-1}\alpha_k).$$

Вообще, любая перестановка p может быть записана как произведение транспозиций. Такое разбиение не является единственным, но число транспозиций в нем имеет определенную четность, оно либо четное, либо нечетное, что мы будем обозначать как $(-1)^p$. По определению, перестановка называется четной или нечетной в соответствии со знаком $(-1)^p = +1$ или -1.

Подгруппы группы $\mathcal{P}_n$. Группа $\mathcal{A}_n$. Группа $\mathcal{P}_n$ имеет только *одну инвариантную подгруппу* — группу четных перестановок $\mathcal{A}_n$. Индекс $\mathcal{A}_n$ равен 2, дополнением к ней является множество нечетных перестановок, а фактор-группа $\mathcal{P}_n/\mathcal{A}_n$ — абелева.

Среди других подгрупп в $\mathcal{P}_n$ отметим группы перестановок из m объектов $\mathcal{P}_m$, где $m < n$, группы $\mathcal{A}_m$ $(m < n)$ и т. д. Индекс $\mathcal{P}_m$ равен $(n!/m!)$, а индекс $\mathcal{A}_m$ равен 2 $(n!/m!)$.

Симметризаторы и антисимметризаторы группы $\mathcal{P}_n$. Особую роль играют две линейные комбинации всех перестановок группы $\mathcal{P}_n$ — симметризатор s и антисимметризатор a:

$$s = \frac{1}{n!}\sum_p p, \quad a = \frac{1}{n!}\sum_p (-1)^p p, \tag{59}$$

(суммирование происходит по всем элементам $\mathcal{P}_n$). Они коммутируют со всеми элементами группы и обладают следующими свойствами:

$$qs = sq = s, \quad qa = aq = (-1)^q a, \tag{60}$$

(q — произвольная перестановка)

$$s^2 = s, \quad a^2 = a. \tag{61}$$

§ 15. Разбиения

Определение. *Разбиением* $\lambda = [\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_h]$ целого числа n называется упорядоченная последовательность положительных целых чисел $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant \lambda_h$, сумма которых равна n:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_h = n.$$

Поскольку структура циклов перестановки определяется некоторым разбиением числа n, то *каждое разбиение n определяет класс в $\mathcal{P}_n$.*

Неравенства. Пусть $\lambda \equiv [\lambda_1 \ldots \lambda_h]$, $\mu \equiv [\mu_1 \ldots \mu_k]$ — два разбиения n. По определению

$\lambda = \mu$, если $h = k$ и $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$, ..., $\lambda_h = \mu_k$;

$\lambda > \mu$, если первый отличный от нуля член в последовательности $\lambda_1 - \mu_1$, $\lambda_2 - \mu_2$, ... положителен;

$\lambda < \mu$, если первый отличный от нуля член в последовательности $\lambda_1 - \mu_1$, $\lambda_2 - \mu_2$, ... отрицателен.

Пример: для $n = 5$ $[5] > [41] > [32] > [31^2]$ и т. д. (Мы использовали условное обозначение $[31^2]$ для $[311]$.)

Диаграммы Юнга Y_λ. Данное разбиение $[\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_h]$ можно представить диаграммой Юнга Y_λ, которая построена из n клеток и состоит из h строк, расположенных одна под другой. Первая строка содержит λ_1 клеток, вторая — λ_2 клеток ..., строка h содержит λ_h клеток (см. рис. 31).

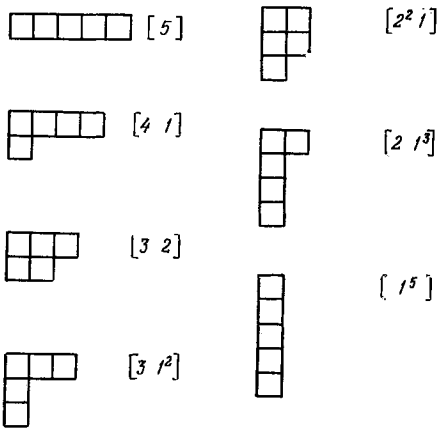


Рис. 31. Разбиения 5-ти элементов и соответствующие диаграммы Юнга.

Таблица Юнга Θ^p_λ. Первые n целых чисел можно расположить в n клетках $n!$ способами, получая всякий раз некоторую *таблицу Юнга*.

Будем обозначать символом Θ_λ и называть *нормальной таблицей* такую, в которой числа 1, 2, ..., n расположены в обычном порядке: последовательность 1, 2, ..., λ_1 в первой строке, $\lambda_1 + 1$; $\lambda_1 + 2$, ..., $\lambda_1 + \lambda_2$ — во второй строке и т. д. Применяя перестановку p к n числам таблицы Θ_λ, мы получим новую таблицу $\Theta^p_\lambda \equiv p\Theta_\lambda$. Отметим, что $q\Theta^p_\lambda = \Theta^{qp}_\lambda$, и для каждой диаграммы Юнга существует $n!$ различных таблиц (см. рис. 32).

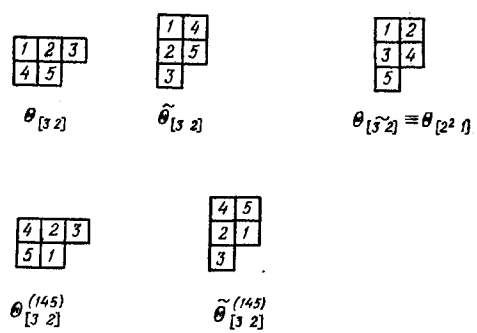


Рис. 32. Несколько таблиц, соответствующих разбиениям $\lambda = [32]$ и $\tilde{\lambda} = [2^2 1]$ 5-ти элементов

Ассоциированные разбиения. Два разбиения называются ассоциированными друг другу, если диаграмма Юнга одного получается из диаграммы Юнга другого заменой строк на столбцы (отражение относительно главной диагонали). В дальнейшем будем обозначать такое преобразование символом $\sim$. Так, $\tilde{\lambda} \equiv [\tilde{\lambda}_1 \ldots \tilde{\lambda}_k]$ обозначает разбиение, ассоциированное с $\lambda \equiv [\lambda_1 \ldots \lambda_h]$. Отметим, что $k = \lambda_1$, а $h = \tilde{\lambda}_1$ и что $\tilde{\lambda}_s$ равно числу элементов разбиения λ, равных или больших s, и наоборот.

Аналогичным образом определим диаграмму Юнга $\tilde{Y}_\lambda \equiv Y_{\tilde{\lambda}}$, ассоциированную с Y_λ, и таблицу Юнга $\tilde{\Theta}^p_\lambda$, ассоциированную с Θ^p_λ. Отметим (см. рис. 32), что

$$\tilde{\Theta}^p_\lambda = p\tilde{\Theta}_\lambda,$$

но, вообще говоря,

$$\tilde{\Theta}_\lambda \neq \Theta_{\tilde{\lambda}}.$$

§ 16. «Симметризаторы» Юнга. Построение неприводимых представлений

«Симметризаторы» s_λ, a_λ, $\tilde{s}_\lambda$, $\tilde{a}_\lambda$ строк и столбцов Θ_λ. Определим операторы s_λ — симметризатор строк Θ_λ, и a_λ — антисимметризатор строк Θ_λ, следующим образом:

$$s_\lambda \equiv \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,\ldots\,\lambda_h!}\sum_h h_\lambda, \tag{62}$$

$$a_\lambda \equiv \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,\ldots\,\lambda_h!}\sum_h (-1)^h h_\lambda, \tag{63}$$

суммирование происходит по всем $\lambda_1!\,\lambda_2!\,\ldots\,\lambda_h!$ перестановкам h, которые оставляют инвариантными *строки* Θ_λ, т. е. в любой цикл которых входят элементы из одной строки Θ_λ. Это множество перестановок h_λ образует подгруппу $\mathcal{S}_{[\lambda]}$ группы $\mathcal{S}_n$. Если обозначить группу перестановок λ_i объектов, стоящих в i-й строке таблицы Θ_λ, $\mathcal{S}_{\lambda_i}$, то $\mathcal{S}_{[\lambda]}$ есть произведение следующих подгрупп группы $\mathcal{S}_n$:

$$\mathcal{S}_{\lambda_1},\ \mathcal{S}_{\lambda_2},\ \ldots,\ \mathcal{S}_{\lambda_h}.$$

Операторы s_λ и a_λ равны соответственно произведению симметризаторов и антисимметризаторов этих h подгрупп.

Аналогичным образом определяются симметризатор $\tilde{s}_\lambda$ и антисимметризатор $\tilde{a}_\lambda$ столбцов Θ_λ (т. е. строк $\tilde{\Theta}_\lambda$). Приведем соответствующие формулы

$$\tilde{s}_\lambda \equiv \frac{1}{\tilde{\lambda}_1!\,\tilde{\lambda}_2!\,\ldots\,\tilde{\lambda}_k!}\sum_v v_\lambda, \tag{64}$$

$$\tilde{a}_\lambda \equiv \frac{1}{\tilde{\lambda}_1!\,\tilde{\lambda}_2!\,\ldots\,\tilde{\lambda}_k!}\sum_v (-1)^v v_\lambda, \tag{65}$$

где суммирование происходит по всем $\tilde{\lambda}_1!\tilde{\lambda}_2!\ldots\tilde{\lambda}_k!$ перестановкам v_λ, которые оставляют инвариантными *столбцы* таблицы Θ_λ.

Основные свойства.

а) Введенные операторы s_λ и a_λ равны произведениям симметризаторов или антисимметризаторов, следовательно,

$$s_\lambda^2 = s_\lambda,\ a_\lambda^2 = a_\lambda,\ \tilde{s}_\lambda^2 = \ldots, \tag{66}$$

$$h_\lambda s_\lambda = s_\lambda h_\lambda = s_\lambda,\ h_\lambda a_\lambda = a_\lambda h_\lambda = (-1)^h a_\lambda,\ v_\lambda \tilde{s}_\lambda = \ldots \tag{67}$$

б) Если $\omega = \sum_p x_p p$ — произвольная линейная комбинация элементов $\mathcal{S}_n$ (элемент групповой алгебры) и если [1])

$$\lambda > \mu \quad \text{или} \quad \tilde{\lambda} < \tilde{\mu}, \tag{68}$$

тогда

$$\tilde{a}_\mu \omega s_\lambda = s_\lambda \omega \tilde{a}_\mu = 0,$$
$$\tilde{s}_\mu \omega a_\lambda = a_\lambda \omega \tilde{s}_\mu = 0. \tag{69}$$

В частности, при выполнении любого из условий (68) справедливы равенства

$$\tilde{a}_\mu s_\lambda = s_\lambda \tilde{a}_\mu = \tilde{s}_\mu a_\lambda = a_\lambda \tilde{s}_\mu = 0. \tag{70}$$

«Неприводимые симметризаторы» i_λ и j_λ.

$$i_\lambda = s_\lambda \tilde{a}_\lambda = \sum_{hv} (-1)^v h_\lambda v_\lambda \quad (i_\lambda \neq 0),$$
$$j_\lambda = \tilde{a}_\lambda s_\lambda = \sum_{hv} (-1)^v v_\lambda h_\lambda \quad (j_\lambda \neq 0). \tag{71}$$

Будем называть i_λ «неприводимым симметризатором», j_λ — «неприводимым антисимметризатором» таблицы Θ_λ. Аналогично определяются неприводимые симметризатор и антисимметризатор $\tilde{\Theta}_\lambda$:

$$\tilde{i}_\lambda = \tilde{s}_\lambda a_\lambda, \quad \tilde{j}_\lambda = a_\lambda \tilde{s}_\lambda.$$

Пусть ω — определенная выше линейная комбинация, тогда можно показать, что

$$s_\lambda \omega \tilde{a}_\lambda = \text{const}\, i_\lambda, \quad \tilde{a}_\lambda \omega s_\lambda = \text{const}\, j_\lambda \tag{72}$$

Из соотношений (69) и (72) легко вывести соотношения

$$i_\lambda i_\mu = i_\mu i_\lambda = \text{const}\, \delta_{\lambda\mu} i_\lambda, \quad j_\lambda j_\mu = j_\mu j_\lambda = \text{const}\, j_\lambda \delta_{\lambda\mu}. \tag{73}$$

Основная теорема.

(i) *В пространстве регулярного представления группы $\mathcal{S}_n$ векторы ωi_λ (ω — произвольный элемент групповой алгебры $\mathcal{S}_n$) натягивают неприводимое инвариантное подпространство $\mathcal{E}_\lambda$ и, следовательно, порождают некоторое неприводимое представление $\mathbf{P}^{(\lambda)}$ группы $\mathcal{S}_n$.*

(ii) *Векторы ωj_λ натягивают то же инвариантное подпространство $\mathcal{E}_\lambda$.*

(iii) *Если $\lambda \neq \mu$, то неприводимые представления $\mathbf{P}^{(\lambda)}$ и $\mathbf{P}^{(\mu)}$ неэквивалентны.*

Поскольку число неприводимых представлений $\mathcal{S}_n$ равно числу классов этой группы и, следовательно, числу разбиений n, то теорема позволяет построить все представления. Как следствие, каждое неприводимое представление группы $\mathcal{S}_n$ можно характеризовать определенной диаграммой Юнга.

Симметризаторы ассоциированных таблиц и ассоциированные представления. Сопоставим каждому элементу $\omega = \sum_p x_p p$

---

[1]) Из справедливости одного из условий (68) не следует справедливость другого. Например, если $\lambda = [4\,1^2]$ и $\mu = [3\,3]$, то $\lambda > \mu$; однако $\tilde{\lambda} = [3\,1^3]$, $\tilde{\mu} = [2^3]$ и, следовательно, $\tilde{\lambda} > \tilde{\mu}$.

групповой алгебры элемент $\omega' = \sum_p (-1)^p x_p p$. Это соответствие — линейное, взаимно однозначное и обладает следующими свойствами:

а) если $\eta = p\omega$, то $\eta' = (-1)^p p\omega'$;

б) если $\zeta = \omega\eta$, то $\zeta' = \omega'\eta'$ (сохраняет произведение).

Отметим, что таким образом возникает взаимно однозначное соответствие между «симметризаторами» ассоциированных таблиц Θ_λ и $\tilde{\Theta}_\lambda$:

$$a_\lambda = s'_\lambda, \quad \tilde{a}_\lambda = \tilde{s}'_\lambda,$$

откуда

$$\tilde{i}_\lambda = \tilde{s}_\lambda a_\lambda = j'_\lambda, \quad \tilde{j}_\lambda = a_\lambda \tilde{s}_\lambda = i'_\lambda. \tag{74}$$

Пусть $\omega_1 i_\lambda, \omega_2 i_\lambda, \ldots,$ — множество базисных векторов, которые согласно основной теореме определяют представление $\boldsymbol{P}^{(\lambda)}$. В силу (74) им соответствуют векторы $\omega'_1 \tilde{j}_\lambda, \omega'_2 \tilde{j}_\lambda, \ldots,$ которые определяют представление $\boldsymbol{P}^{(\tilde{\lambda})}$. Ясно, что при таком выборе базисов матрицы $P^{(\lambda)}$ и $P^{(\tilde{\lambda})}$, отвечающие в каждом из представлений данной перестановке p, связаны соотношением

$$P^{(\tilde{\lambda})} = (-1)^p P^{(\lambda)}. \tag{75}$$

«Симметризаторы таблиц» Θ^p_λ. Точно так же, как мы действовали, используя таблицы Θ_λ, мы можем определить перестановки h^p_λ, v^p_λ и симметризаторы $s^p_\lambda, \ldots, i^p_\lambda, \ldots,$ используя таблицы Θ^p_λ. Отметим, что

$$h^p_\lambda = p h_\lambda p^{-1}, \quad v^p_\lambda = p v_\lambda p^{-1},$$

откуда

$$s^p_\lambda = p s_\lambda p^{-1}, \quad a^p_\lambda = \ldots \text{ и т. д.} \tag{76}$$

Свойства «симметризаторов», связанных с Θ^p_λ, можно вывести, используя свойства «симметризаторов», связанных с Θ_λ, и соотношения (76).

§ 17. Основные свойства неприводимых представлений группы $\mathcal{S}_n$

Большинство свойств неприводимых представлений $\mathcal{S}_n$ следуют из свойств «симметризаторов», которые были приведены в предыдущем параграфе.

Каждое неприводимое представление $\boldsymbol{P}^{(\lambda)}$ группы $\mathcal{S}_n$ характеризуется определенной диаграммой Юнга и может быть построено с помощью неприводимого симметризатора i_λ (или j_λ). Неприводимые представления являются *самосопряженными*

$$\boldsymbol{P}^{(\lambda)*} \approx \boldsymbol{P}^{(\lambda)}. \tag{77}$$

Представления размерности 1. Существует только два представления размерности 1:

(i) тождественное (или симметрическое) представление $\boldsymbol{S}$;

(ii) антисимметрическое представление $\boldsymbol{A}$, в котором каждой перестановке p отвечает $(-1)^p$.

Эти представления порождаются s и a соответственно (ур. (59)).

Диаграмма Юнга для $\boldsymbol{S}$ имеет одну строку и отвечает разбиению $[n]$, а для представления $\boldsymbol{A}$ — один столбец и отвечает разбиению $[1^n]$.

Ассоциированные неприводимые представления. Два неприводимых представления $\boldsymbol{P}^{(\lambda)}$ и $\boldsymbol{P}^{(\tilde{\lambda})}$ называются ассоциированными, если их диаграммы Юнга являются ассоциированными друг к другу. Из уравнения (75) следует соотношение

$$\boldsymbol{P}^{(\tilde{\lambda})} \approx \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{P}^{(\lambda)}. \tag{78}$$

Компоненты размерности 1 тензорного произведения $\boldsymbol{P}^{(\lambda)} \otimes \boldsymbol{P}^{(\mu)}$. Тензорное произведение двух представлений $\boldsymbol{P}^{(\lambda)} \otimes \boldsymbol{P}^{(\mu)}$ имеет одну (и только одну) компоненту размерности 1 в том и только в том случае, если выполнено одно из следующих условий:

(i) $\lambda = \mu$, то компонентой будет $\boldsymbol{S}$;

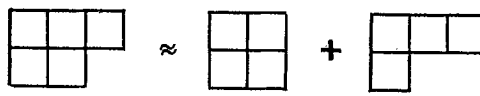
(ii) $\lambda = \tilde{\mu}$, то компонентой будет $\boldsymbol{A}$.

Неприводимые представления $\mathscr{P}_{n-1}$, содержащиеся в $\boldsymbol{P}^{(\lambda)}$. Любое неприводимое представление группы $\mathscr{P}_n$ есть представление (возможно приводимое) ее подгруппы $\mathscr{P}_{n-1}$.

Обозначим символом $\boldsymbol{P}_t^{(\lambda)}$ неприводимое представление $\mathscr{P}_t$, отвечающее разбиению λ целого числа t. Можно показать, что разложение $\boldsymbol{P}_n^{(\lambda)}$ на представления, неприводимые *по отношению к группе* $\mathscr{P}_{n-1}$, дается формулой

$$\boldsymbol{P}_n^{(\lambda)} \approx \sum_{\mu} \boldsymbol{P}_{n-1}^{(\mu)}, \tag{79}$$

где суммирование происходит по всем разбиениям μ числа $(n-1)$, отвечающим диаграммам Юнга, которые получаются из диаграммы Юнга разбиения λ числа n отбрасыванием одной из возможных клеток.



Пример:

Используя формулу (79) можно связать некоторые характеры $\mathscr{P}_{n-1}$ с характерами $\mathscr{P}_n$. В частности, на основании этой формулы можно вычислить размерность представлений $\mathscr{P}_n$, зная размерность неприводимых представлений $\mathscr{P}_{n-1}$.

Построение неприводимых инвариантных подпространств представления $\boldsymbol{P}$. Различные «симметризаторы» в представлении $\boldsymbol{P}$ задаются линейными эрмитовыми операторами, которые мы будем обозначать соответствующими прописными буквами.

Метод построения неприводимых компонент представления $\boldsymbol{P}$ следует из основной теоремы § 16. Пусть $|u\rangle$ — произвольный вектор пространства $\mathscr{E}$ представления $\boldsymbol{P}$; тогда вектор $I_\lambda | u\rangle$ в случае, если он отличен от нуля, преобразуется по представлению $\boldsymbol{P}^{(\lambda)}$, и в соответствующем пространстве представления $\mathscr{E}_\lambda$ содержится ненулевой вектор $I_\lambda | u\rangle$. Множество векторов $I_\lambda | \rangle$, получающихся действием оператора I_λ на векторы базиса пространства $\mathscr{E}$, натягивают подпространство $\mathscr{I}_\lambda$, размерность которого равна n_λ — числу компонент $\boldsymbol{P}^{(\lambda)}$, содержащихся в $\boldsymbol{P}$. Пусть $|\sigma\rangle$ — один из векторов ортонормированного базиса в $\mathscr{I}_\lambda$, тогда пространство $\mathscr{E}_{\sigma\lambda}$, образованное действием операторов группы на вектор $|\sigma\rangle$, есть пространство представления $\boldsymbol{P}^{(\lambda)}$. Поступая таким образом со всеми n_λ базисными векторами $\mathscr{I}_\lambda$, получим n_λ ортогональных друг другу пространств представления $\boldsymbol{P}^{(\lambda)}$.

Оператор Q в $\mathscr{E}$, инвариантный относительно $\mathscr{P}_n$, переводит векторы каждого из подпространств $\mathscr{I}_\lambda$ в векторы того же подпространства. Таким образом, задача диагонализации Q в пространстве $\mathscr{E}$ сводится к задаче диагонализации этого оператора в каждом из подпространств $\mathscr{I}_\lambda$.

Свойства симметрии векторов представления $\boldsymbol{P}^{(\lambda)}$. В общем случае кет-векторы не обладают определенными свойствами симметрии или антисимметрии. Будем приписывать вектору $|\rangle$ симметрию S_λ в том случае, если он принадлежит подпространству проектора S_λ. Такой вектор симметричен относительно перестановки элементов из одной строки в Θ_λ. Точно так же будем считать вектор A_λ антисимметричным, если он принадлежит подпространству проектора A_λ.

Аналогичным образом, используя таблицы Юнга $\widetilde{\Theta}_\lambda$, Θ^p_λ, определяют симметрии типа $\widetilde{S}_\lambda$, S^p_λ и антисимметрии $\widetilde{A}_\lambda$, A^p_λ [1]).

Из двух векторов с определенной симметрией S^p_λ, S^q_μ более симметричным, по определению, считается тот, который соответствует большему из разбиений λ, μ. Из двух векторов с определенной антисимметрией A^p_λ, A^q_μ более антисимметричным считается тот, который соответствует большему из разбиений λ, μ.

На основании равенств (69) и основной теоремы мы можем сделать вывод, что *пространство неприводимого представления* $\boldsymbol{P}^{(\lambda)}$ *содержит один и только один* S_λ*-симметричный вектор* (и, следовательно, один и только один S^p_λ*-симметричный* вектор, где p — произвольная перестановка) *и не содержит векторов с большей симметрией* [2]). *Это пространство содержит один и только один* $A_{\tilde{\lambda}}$ *— антисимметричный вектор и не содержит векторов с большей антисимметрией.*

Оператор суммы элементов класса транспозиций K_T. Каждому разбиению μ соответствует некоторый класс и оператор суммы элементов класса K_μ. Различные возможные собственные значения $k^{(\lambda)}_\mu$ этого оператора соответствуют различным неприводимым представлениям $\boldsymbol{P}^{(\lambda)}$ группы $\mathscr{P}_n$. Эти собственные значения являются функциями целых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$, участвующих в разбиении λ. (*N. B.* Для двух различных разбиений соответствующие собственные значения некоторого K_μ не обязательно различны: из $\lambda \neq \lambda'$ не следует, что $k^{(\lambda)}_\mu \neq k^{(\lambda')}_\mu$.)

Рассмотрим оператор суммы элементов класса транспозиций K_T:

$$K_T \equiv K_{[21^{n-2}]} = \sum_{i<j} (ij).$$

---

[1]) Перестановка P преобразует любой S_λ-симметричный вектор в S^p_λ-симметричный и любой A_λ-антисимметричный вектор в A^p_λ-антисимметричный (см. соотношения (76)).

Такого соответствия не существует между симметриями типа S_λ, A_λ и $\widetilde{S}_\lambda$, $\widetilde{A}_\lambda$. Последние эквивалентны симметриям типа $S^q_{\tilde{\lambda}}$, $A^q_{\tilde{\lambda}}$ соответственно, где перестановка q определяется равенством $\widetilde{\Theta}_\lambda = q\Theta_{\tilde{\lambda}}$.

[2]) Точнее, не существует S_μ-симметричного вектора, отвечающего любому из разбиений μ, которые удовлетворяют одному из неравенств: $\mu > \lambda$, $\tilde{\mu} < \tilde{\lambda}$.

Оператор K_T коммутирует со всеми перестановками и, следовательно,

$$k_T^{(\lambda)} I_\lambda = K_T I_\lambda = S_\lambda K_T \tilde{A}_\lambda.$$

Используя это соотношение и уравнения (67), легко показать, что $k_T^{(\lambda)}$ равно разности числа транспозиций типа h_λ (симметричных пар) и числа транспозиций типа v_λ (антисимметричных пар):

$$k_T^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^{h} \frac{\lambda_i(\lambda_i - 1)}{2} - \sum_{j=1}^{v} \frac{\tilde{\lambda}_j(\tilde{\lambda}_j - 1)}{2}. \tag{80}$$

§ 18. Система n фермионов спина 1/2

Симметрия состояний n тождественных спинов $\frac{1}{2}$.

Теорема. *Пространство векторов состояний n тождественных спинов $\frac{1}{2}$ с полным спином (SM) отвечает неприводимому представлению группы $\mathcal{S}_n$. Диаграмма Юнга этого представления соответствует разбиению* $\left[\frac{1}{2}n + S, \frac{1}{2}n - S\right]$ (т. е. имеет не более двух строк).

Следствие I. Если $n = 2$, то существует одно антисимметричное состояние со спином $S = 0$ и три линейно независимых симметричных состояния со спином $S = 1$.

Следствие II. Если $n > 2$, то антисимметричных состояний нет; существует $n + 1$ линейно независимых полностью симметричных состояний, а именно, $2S + 1 \equiv n + 1$ состояний, для которых полный спин имеет максимальное значение $\left(S = \frac{1}{2}n\right)$.

Доказательство. Размерность пространства $\mathscr{E}^{(s)}$, которое образовано векторами состояния n спинов $\frac{1}{2}$, равна 2^n. Динамические состояния индивидуального спина с номером i, отвечающие собственным значениям $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ оператора s_z, обозначим u_i и v_i соответственно. Взяв все возможные произведения из n таких векторов u и v, получим ортонормированный базис в $\mathscr{E}^{(s)}$. Приведем пример базисного вектора

$$\zeta_M = u_1 u_2 \ldots u_\nu v_{\nu+1} \ldots v_n.$$

Это собственный вектор компоненты S_z оператора полного спина

$$S = \sum_{i=1}^{n} s_i;$$

соответствующее собственное значение равно $M = \nu - \frac{1}{2}n$. Действуя на ζ_M всеми перестановками, мы получаем

$$C_n^\nu = \left[n!\Big/\left(\frac{1}{2}n + M\right)!\left(\frac{1}{2}n - M\right)!\right]$$

различных векторов, которые натягивают подпространство, отвечающее собственному значению M. Каждый из этих векторов содержит $\frac{1}{2}n+M$ векторов типа u и $\frac{1}{2}n-M$ векторов типа v.

Подпространство с заданным значением M можно разложить на ортогональные подпространства, отвечающие различным возможным собственным значениям оператора $\boldsymbol{S}^2$. Соответствующее квантовое число S может принимать $\frac{1}{2}n-|M|+1$ значений: $|M|$, $|M|+1, \ldots, \frac{1}{2}n$. Подпространство, образованное векторами с полным спином (SM), обозначим $\mathscr{E}^{(s)}(SM)$. Поскольку операторы $\boldsymbol{S}^2$ и S_z коммутируют со всеми перестановками, каждое из этих подпространств определяет некоторое представление группы $\mathscr{P}_n$. Более того, поскольку S_+ и S_- также коммутируют со всеми перестановками, то представления, которые определяются двумя подпространствами с одним и тем же значением S, эквивалентны.

Докажем теперь следствие II (следствие I очевидно). Для доказательства достаточно рассмотреть проекции векторов ортонормированного базиса в $\mathscr{E}^{(s)}$ на пространство симметричных состояний и на пространство антисимметричных состояний. Это легко сделать для определенных выше базисных векторов. Коль скоро $n>2$, то любой вектор базиса ζ содержит не меньше двух отдельных спинов в одинаковом состоянии u или v. Допустим, что в ζ имеется множитель u_iu_j; тогда в силу равенств $A=A\frac{1}{2}(1-(ij))$ и $\frac{1}{2}(1-(ij))\,u_iu_j=0$, имеем $A\zeta=0$. С другой стороны, существует одна и только одна полностью симметричная линейная комбинация базисных векторов подпространства, отвечающего собственному значению M, а именно, сумма всех C_n^{ν} базисных векторов. Поскольку это верно для любого возможного значения M, то такой полностью симметричный вектор обязательно соответствует максимальному значению полного спина $S=\frac{1}{2}n$. Это завершает доказательство следствия II.

Приведенное выше рассуждение с A можно повторить, используя антисимметризатор $\widetilde{A}_\lambda$, и получить, что $\widetilde{A}_\lambda\zeta=0$, если диаграмма Юнга содержит больше двух строк. Осюда следует, что диаграммы Юнга для неприводимых компонент представления группы $\mathscr{P}_n$, которое порождено пространством $\mathscr{E}^{(s)}$, имеют, самое большее, две строки.

Пусть $\lambda=[\lambda_1\lambda_2]$ — разбиение числа n, удовлетворяющее этому условию. Число неприводимых компонент $\boldsymbol{P}^{(\lambda)}$ равно числу линейно независимых векторов типа $I_\lambda|\rangle\equiv S_\lambda\widetilde{A}_\lambda|\rangle$. Для перечисления последних достаточно рассмотреть табл. I.

Таблица 1

Таблица Θ_λ

1	2		λ_2	λ_2+1		λ_1
λ_1+1	λ_1+2		$\lambda_1+\lambda_2$			

Мы можем разделить n спинов $\frac{1}{2}$ на два множества: $(\lambda_1-\lambda_2)$ элементов $\lambda_2+1, \lambda_2+2, \ldots, \lambda_1$ первой строки, для которых нет соответствующих эле-

ментов во второй, и λ_2 пар элементов, расположенных в соответствующих столбцах. Обозначим полные спины этих множеств $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2.$$

Пусть $S^{(\lambda_1-\lambda_2)}$ — проектор на состояния, симметричные относительно $(\lambda_1 - \lambda_2)!$ перестановок спинов первого множества. Ясно, что

$$I_\lambda = S_\lambda S^{(\lambda_1-\lambda_2)} \widetilde{A}_\lambda.$$

Однако по определению оператор $\widetilde{A}_\lambda$ — проектор на синглетное состояние каждой из пар спинов второго множества. Существует только один вектор, обладающий таким свойством (следствие I), этот вектор соответствует спину $S_2 = 0$. Оператор $S^{(\lambda_1-\lambda_2)}$ проектирует векторы состояний первого множества на подпространство размерности $(2S_1 + 1)$, отвечающее наибольшему возможному значению S_1 (следствие II), а именно, $\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$. Таким образом, $S^{(\lambda_1-\lambda_2)}\widetilde{A}_\lambda$ — проектор на подпространство размерности $(2S + 1)$, отвечающее значению полного спина $S = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$. В силу того, что проектор S_λ коммутирует с $\boldsymbol{S}$, действуя на векторы этого подпространства, он либо аннулирует их всех, либо преобразует их в векторы с тем же полным спином. Первая возможность исключается, в противном случае в $\mathscr{E}^{(s)}$ не существовало бы векторов с полным спином $\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$, а из второй возможности следует приведенная выше теорема.

Построение полностью антисимметричных векторов. Динамические состояния n фермионов спина $1/2$ принадлежат тензорному произведению $\mathscr{E}^{(0)} \otimes \mathscr{E}^{(s)}$ определенного выше пространство $\mathscr{E}^{(s)}$ и пространства орбитальных переменных $\mathscr{E}^{(0)}$. Последнее можно разложить на взаимно ортогональные, неприводимые подпространства $\mathscr{E}^{(0)}(\sigma\mu)$, инвариантные по отношению к группе $\mathscr{P}_n$. В подпространстве $\mathscr{E}^{(0)}(\sigma\mu)$ определено некоторое неприводимое представление $\boldsymbol{P}^{(\mu)}$, индекс σ нумерует подпространства, в которых задано одно и то же неприводимое представление. Для того чтобы построить полный набор ортогональных антисимметричных векторов, достаточно построить их в каждом из подпространств $\mathscr{E}^{(0)}(\sigma\mu) \otimes \mathscr{E}^{(s)}$. В этом подпространстве имеется столько линейно независимых антисимметричных векторов, сколько раз компонента $\boldsymbol{A}$ встречается в разложении представления, заданного в этом подпространстве. Следовательно (§ 17), число таких векторов равно числу неприводимых представлений $\boldsymbol{P}^{(\mu)}$, участвующих в разложении представления, заданного в $\mathscr{E}^{(s)}$. *Если диаграмма Y_μ содержит более двух столбцов, то таких векторов нет. Если диаграмма Y_μ содержит не более двух столбцов и если мы в согласии с приведенной выше теоремой положим*

$$\mu = \left[2^{\frac{1}{2}n-S} 1^{2S}\right], \tag{81}$$

тогда имеется $(2S + 1)$ неприводимых представлений, и антисимметричные векторы, которые можно образовать в этом случае, являются собственными векторами оператора $\boldsymbol{S}^2$, соответствующими полному спину (SM) $(M = -S, -S + 1, \ldots, S)$.

Не зависящие от спина скалярные наблюдаемые. LS-связь. Независимую от спина скалярную наблюдаемую Q можно рассма-

тривать как наблюдаемую пространства $\mathscr{E}^{(0)}$, инвариантную относительно вращений и перестановки только орбитальных переменных

$$[Q, \boldsymbol{L}] = 0, \quad [Q, P^{(0)}] = 0.$$

Пространство $\mathscr{E}^{(0)}$ есть прямая сумма подпространств $\mathscr{E}^{(0)}(\tau L\mu)$ размерности $(2L+1)\,d_\mu$, которые неприводимы по отношению к группам вращений и перестановок [1]). L — квантовое число момента импульса, μ — разбиение, отвечающее представлению $\boldsymbol{P}^{(\mu)}$, τ — дополнительное квантовое число, нумерующее эквивалентные подпространства. В частности, подпространства $\mathscr{E}^{(0)}(\tau L\mu)$ можно выбрать так, чтобы наблюдаемая Q в каждом из них была равна некоторой константе $q_\tau^{(L\mu)}$ (см. § 9).

Собственные векторы Q, отвечающие собственному значению $q_\tau^{(L\mu)}$, являются антисимметричными векторами подпространства $\mathscr{E}^{(0)}(\tau L\mu) \otimes \mathscr{E}^{(s)}$. Исходя из предыдущих рассуждений, такие векторы можно построить, только если Y_μ содержит не более двух столбцов. В этом случае разбиение μ однозначно определяется квантовым числом S (ур. (81)). Подпространство антисимметричных векторов в $\mathscr{E}^{(0)}(\tau L\mu) \otimes \mathscr{E}^{(s)}$ отвечает определенному значению S полного спина системы частиц. Это подпространство $\mathscr{E}(\tau LS)$ имеет размерность $(2L+1)(2S+1)$ и в нем можно найти собственные векторы полного момента импульса и полного спина

$$|\tau LSM_LM_S\rangle \quad (M_L = -L, \ldots, +L;\ M_S = -S, \ldots, +S),$$

которые образуют стандартный базис $\{\boldsymbol{L}^2\boldsymbol{S}^2L_zS_z\}$.

---

[1]) Подпространство $\mathscr{E}^{(0)}(\tau L\mu)$ приводимо относительно группы вращений и является суммой d_μ эквивалентных неприводимых подпространств (здесь d_μ — степень представления $\boldsymbol{P}^{(\mu)}$). Оно также приводимо относительно группы $\mathscr{P}_n$ и является суммой $(2L+1)$ эквивалентных неприводимых подпространств.