

ГЛАВА 1

Типы полей

Нашей задачей в предлагаемой книге является рассмотрение математического аппарата, используемого при расчете и анализе разных типов полей, встречающихся в современной физике. Наше внимание будет в первую очередь обращено на выявление взаимосвязи между уравнениями и физическими свойствами полей, причем временами мы будем жертвовать математической строгостью, если она не содействует выяснению физической сущности вопроса. Математическая строгость важна, и ее нельзя пренебречь, но физик-теоретик должен в первую очередь добиваться полного понимания физического смысла употребляемой символики, без чего формальная строгость не может принести ему никакой пользы. Существуют другие руководства, в которых математическая строгость полностью выдержана; настоящая же книга достигнет своей цели, если ее читатель получит ясное физическое представление о разнообразных уравнениях полей, которые встречаются в современной теоретической физике, а также полностью уяснит себе физическую сущность математического аппарата, применяемого для решения этих уравнений.

В настоящей главе мы рассмотрим общие свойства разных полей и представления этих полей в различных системах координат. Вторая глава будет посвящена рассмотрению различных типов дифференциальных уравнений с частными производными, которые описывают эти поля, а третья глава — связи между этими уравнениями и основными вариационными принципами, развитыми в классической динамике Гамильтоном и другими учеными. Несколько дальнейших глав будет посвящено математическому аппарату, необходимому для решения этих уравнений, а в остальной части книги мы рассмотрим решение отдельных уравнений.

Практически вся современная физика имеет дело с полями: потенциальными полями, полями вероятностей, электромагнитными, тензорными и спинорными полями.

С математической точки зрения поле представляет собой систему функций от координат точки в пространстве. С точки зрения, принятой в этой книге, поле есть некоторая удобная математическая идеализация физической ситуации, в которой *протяженность* является существенным элементом, т. е. которая не может быть исследована в терминах положения конечного числа частиц. Поперечное отклонение струны, находящейся под воздействием статических сил, от ее положения равновесия представляет собой очень простой пример одномерного поля; отклонение u различно для разных частей струны, так что u можно рассматривать как функцию расстояния x вдоль струны. Плотность, температуру и давление в жидкости, в которой распространяются звуковые волны, можно рассматривать как функцию трех координат и времени. Поля такого типа, очевидно, являются лишь приближенной идеализацией физической ситуации, так как они не учитывают атомных свойств материи. Мы можем назвать их *материальными полями*.

Другие поля являются конструкциями, позволяющими изучать проблему *действия на расстоянии*, в которой относительное движение и положение одного тела влияют на движение и положение другого тела. Потенциальные и силовые поля, электромагнитные и гравитационные поля служат примерами таких полей. Считают, что такие поля вызваны некоторым количеством материи, а значение поля в некоторой точке рассматривают как меру воздействия этого количества материи на некоторое пробное тело, помещенное в рассматриваемой точке. В последнее время стало очевидным, что многие из этих полей также являются лишь приближенной идеализацией действительной физической ситуации, так как они не учитывают различных квантовых законов, которым подчиняется материя. В некоторых случаях теория этих полей может быть так изменена, чтобы более или менее удовлетворительным образом учитывались эти квантовые законы.

Наконец, поля могут строиться для «объяснения» квантовых законов. Примерами являются волновая функция Шредингера и спинорные поля, ассоциируемые с электроном Дирака. Во многих случаях значение такого поля в точке пространства тесно связано с вероятностью. Например, квадрат модуля волновой функции Шредингера является мерой вероятности присутствия элементарной частицы. Существующие квантовые теории поля встречаются со многими фундаментальными трудностями и поэтому представляют собой одну из передовых линий фронта современной теоретической физики.

В большинстве случаев поля, рассматриваемые в настоящей книге, оказываются решениями дифференциальных уравнений с частными производными, чаще всего линейных уравнений второго порядка, однородных или неоднородных. Для того чтобы получить такие уравнения, часто приходится упрощать действительную физическую ситуацию, причем подобное упрощение может быть оправдано некоторыми прагматическими соображениями. Например, решением волнового уравнения является лишь «сглаженная плотность» газа, что, однако, оказывается достаточным для изучения звуковых волн, а значительно более сложные вычисления фактических движений молекул газа немного добавили бы к нашим знаниям о звуке.

Эта тенденция втиснуть физическую ситуацию в прокрустово ложе дифференциальных уравнений с частными производными приводит к тому, что получаемые поля оказываются одновременно и более и менее правильными, чем «фактические» состояния. Решение дифференциального уравнения обладает в большей части пространства и времени большей степенью гладкости, чем соответствующая физическая ситуация, но математически оно обычно имеет конечное число разрывов, значительно более «резких», чем те, которые «фактически» имеют место. Если упрощение было не слишком далеко идущим, то большинство величин, которые могут быть вычислены с помощью поля, достаточно хорошо соответствует их измеренным значениям. В каждом случае, однако, обнаруживаются некоторые расхождения между вычисленными и измеренными значениями, что объясняется либо «слишком гладким» поведением поля на большей части его протяжения, либо наличием в математически построенном поле разрывов и бесконечностей, отсутствующих в «действительности». Иногда эти расхождения тривиальны в том смысле, что внесение в конструкцию поля дополнительных усложнений с целью получить лучшее соответствие с экспериментом не приводит к принципиальному изменению самой теории явления; в некоторых же случаях эти расхождения далеко не тривиальны, и изменения в теории, необходимые для достижения лучшего соответствия с экспериментом, затрагивают коренным

образом основные понятия и определения. Для физика-теоретика важно различать тривиальные и нетривиальные расхождения между теорией и экспериментом.

Один из признаков того, что поле часто представляет собой упрощение физической реальности, состоит в определении поля при помощи предела некоторого отношения. Поле плотностей жидкости, в которой распространяется звуковая волна, определяется посредством «плотности в данной точке», которая является пределом отношения массы жидкости, заключенной в некотором объеме, окружающем данную точку, к величине этого объема при стягивании этого объема к «нулю». Электрическая напряженность «в данной точке» является пределом отношения силы, действующей на пробный заряд в этой точке, к его величине при стремлении величины пробного заряда к «нулю». Величина квадрата модуля волновой функции Шредингера есть предел отношения вероятности присутствия элементарной частицы в некоторой области, окружающей данную точку, к объему этой области при сжимании этой области к «нулю» и т. д. Аккуратное определение смещения «точки» колеблющейся струны также должно использовать предел некоторого отношения.

Мы подчеркиваем здесь эти тривиальные с математической точки зрения замечания потому, что техника предельных отношений должна при определении и вычислении полей применяться с осторожностью. Иными словами, для того чтобы получить результаты, соответствующие «действительности», следует тщательно определить содержание понятия «нуль» в предыдущих рассуждениях. Например, объем, встречающийся в определении поля плотностей жидкости, должен быть на несколько порядков меньше куба наименьшей длины волны распространяющегося звука, если мы хотим, чтобы взятое отношение приводило к достаточно точному решению волнового уравнения. С другой стороны, этот объем нельзя уменьшать до величины, сравнимой с размерами атома, иначе соответствующее отношение потеряет необходимые свойства гладкости и не будет уже нам полезным. Если принять во внимание эти ограничения, то нетрудно понять, почему описание звуковых волн при помощи поля, являющегося решением волнового уравнения, оказалось бы неадекватным, если бы «длина волн» стала меньше межатомных расстояний.

Аналогичным образом мы определяем электрическое поле при помощи пробного заряда, который должен быть достаточно мал, чтобы не влиять на распределение зарядов, «порождающих» поле. Но если размеры пробного заряда уменьшить до порядка малости заряда электрона, то следует ожидать трудности, связанной с атомистичностью зарядов (которая, однако, необязательно должна возникнуть).

В некоторых случаях предельное отношение может рассматриваться при как угодно малых величинах его членов. Поля вероятностей волновой механики являются настолько «мелкозернистыми», насколько мы это можем себе в настоящее время представить.

1.1. Скалярные поля

Когда рассматриваемое поле оказывается просто числом — значением некоторой функции точки пространства и времени, — оно называется *скалярным*. Отклонения струны или мембранны от их положения равновесия представляют собой скалярные поля. Плотность, давление и температура жидкости, определенные ранее через предельные отношения, также являются скалярными полями. Как уже отмечалось, при вычислении этих отношений объем не может быть уменьшен до атомных размеров,

образом основные понятия и определения. Для физика-теоретика важно различать тривиальные и нетривиальные расхождения между теорией и экспериментом.

Один из признаков того, что поле часто представляет собой упрощение физической реальности, состоит в определении поля при помощи предела некоторого отношения. Поле плотностей жидкости, в которой распространяется звуковая волна, определяется посредством «плотности в данной точке», которая является пределом отношения массы жидкости, заключенной в некотором объеме, окружающем данную точку, к величине этого объема при стягивании этого объема к «нулю». Электрическая напряженность «в данной точке» является пределом отношения силы, действующей на пробный заряд в этой точке, к его величине при стремлении величины пробного заряда к «нулю». Величина квадрата модуля волновой функции Шредингера есть предел отношения вероятности присутствия элементарной частицы в некоторой области, окружающей данную точку, к объему этой области при сжимании этой области к «нулю» и т. д. Аккуратное определение смещения «точки» колеблющейся струны также должно использовать предел некоторого отношения.

Мы подчеркиваем здесь эти тривиальные с математической точки зрения замечания потому, что техника предельных отношений должна при определении и вычислении полей применяться с осторожностью. Иными словами, для того чтобы получить результаты, соответствующие «действительности», следует тщательно определить содержание понятия «нуль» в предыдущих рассуждениях. Например, объем, встречающийся в определении поля плотностей жидкости, должен быть на несколько порядков меньше куба наименьшей длины волны распространяющегося звука, если мы хотим, чтобы взятое отношение приводило к достаточно точному решению волнового уравнения. С другой стороны, этот объем нельзя уменьшать до величины, сравнимой с размерами атома, иначе соответствующее отношение потеряет необходимые свойства гладкости и не будет уже нам полезным. Если принять во внимание эти ограничения, то нетрудно понять, почему описание звуковых волн при помощи поля, являющегося решением волнового уравнения, оказалось бы неадекватным, если бы «длина волн» стала меньше межатомных расстояний.

Аналогичным образом мы определяем электрическое поле при помощи пробного заряда, который должен быть достаточно мал, чтобы не влиять на распределение зарядов, «порождающих» поле. Но если размеры пробного заряда уменьшить до порядка малости заряда электрона, то следует ожидать трудности, связанной с атомистичностью зарядов (которая, однако, необязательно должна возникнуть).

В некоторых случаях предельное отношение может рассматриваться при как угодно малых величинах его членов. Поля вероятностей волновой механики являются настолько «мелкозернистыми», насколько мы это можем себе в настоящее время представить.

1.1. Скалярные поля

Когда рассматриваемое поле оказывается просто числом — значением некоторой функции точки пространства и времени, — оно называется *скалярным*. Отклонения струны или мембранны от их положения равновесия представляют собой скалярные поля. Плотность, давление и температура жидкости, определенные ранее через предельные отношения, также являются скалярными полями. Как уже отмечалось, при вычислении этих отношений объем не может быть уменьшен до атомных размеров,

так как понятия плотности, давления и т. д. утрачивают смысл для отдельных молекул. Отношения, определяющие эти поля, должны приближаться к «макроскопическому пределу», когда объем мал по сравнению с объемом, занимаемым всей жидкостью, но все еще достаточно велик по сравнению с размерами атома; иначе понятие скалярного поля оказывается физически бессодержательным.

Все эти скалярные поля обладают свойством *инвариантности* относительно преобразований пространственных координат (инвариантность относительно преобразований временной и пространственных координат мы рассмотрим далее в этой главе). Численное значение поля в точке остается одним и тем же независимо от того, как выражены координаты этой точки. Форма математического выражения поля может меняться в зависимости от выбора системы координат. Например, поле, выраженное в прямоугольных координатах, может иметь вид $\psi = y$; в сферических координатах оно будет иметь иной вид: $\psi = r \sin \theta \sin \phi$, но в любой системе координат в точке $x = 10, y = 10, z = 0$ ($r = \sqrt{200}, \theta = 45^\circ, \phi = 90^\circ$) оно имеет значение $\psi = 10$. Этому следует противопоставить поведение x -компоненты скорости потока жидкости, где с изменением системы координат может измениться и направление оси x . Поэтому численное значение x -компоненты скорости в данной точке будет изменяться с изменением направления оси x .

Это свойство инвариантности скаляра будет играть важную роль в дальнейших рассмотрениях, и его следует отличать от инвариантности *формы* некоторых уравнений относительно некоторых преобразований координат. Для таких упомянутых выше скалярных полей, как поля плотности, температуры или электрического потенциала, свойство инвариантности совершенно очевидно из самого определения поля. Однако это не всегда так для менее простых полей. В некоторых случаях свойство инвариантности должно быть использовано как пробный камень, позволяющий найти правильное выражение для данного поля.

Поверхности уровня. Поверхности, определенные уравнением $\psi = \text{const}$, где ψ обозначает скалярное поле, называются *поверхностями уровня*. Поверхности уровня являются очевидными обобщениями линий уровня на топографической карте. В теории потенциала они называются *экви-потенциальными* поверхностями, в теории теплопроводности — изотермическими поверхностями и т. д. Они образуют семейство непересекающихся поверхностей, которые часто оказываются полезными в качестве одного из семейств координатных поверхностей, наиболее естественной для данной проблемы системы координат. Например, если полем является хорошо известный потенциал

$$\psi = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2},$$

то поверхности уровня (в данном случае поверхности постоянного потенциала) являются концентрические сферы радиуса $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{const}$; поэтому естественными координатами для этой задачи являются сферические: r, θ, ϕ . Другая система поверхностей вместе с соответствующей системой координат показана на рис. 1.1. Поверхности $\mu = \text{const}$ могут рассматриваться как эквипотенциальные поверхности вокруг круглого заряженного диска радиуса c , лежащего в плоскости xy ($\mu = 0$).

Производные скаляра ψ по прямоугольным координатам x, y, z изменяют скорость, с которой изменяется поле при перемещении в пространстве. Например, изменение ψ при перемещении из точки (x, y, z) в точку

$(x+dx, y+dy, z+dz)$ равно

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = \vec{e}_s \cdot \nabla \psi \quad (1.1.1)$$

Если обе точки лежат на одной и той же поверхности уровня, то $d\psi = 0$, и дифференциальное уравнение этих поверхностей имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0. \quad (1.1.2)$$

Смещение (dx, dy, dz) перпендикулярно к поверхности уровня, если составляющие смещения удовлетворяют соотношениям

$$\frac{dx}{\partial \psi / \partial x} = \frac{dy}{\partial \psi / \partial y} = \frac{dz}{\partial \psi / \partial z}. \quad (1.1.3)$$

Эти соотношения являются дифференциальными уравнениями семейства кривых, называемых *нормальными линиями*, которые в каждой точке

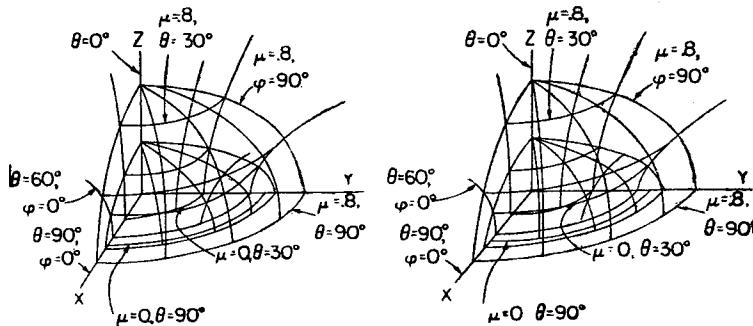


Рис. 1.1. Примеры поверхностей уровня $\mu = \text{const}$, где $\cosh \mu = \frac{1}{2} \sqrt{(r+c)^2 + z^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(r-c)^2 + z^2}$, $\theta = \text{const}$, где $c \cos \theta = \frac{1}{2} \sqrt{(r+c)^2 + z^2} - \frac{1}{2} \sqrt{(r-c)^2 + z^2}$ и $\varphi = \text{const}$, где $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$.

перпендикулярны поверхности уровня, проходящей через эту точку. В сочетании с поверхностями уровня они могут быть использованы при определении естественной для данного поля системы координат. Например, для поля $\psi = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ поверхностями уровня являются (как было отмечено выше) сферы, а нормальными линиями — радиальные лучи, что наводит нас на мысль о сферических координатах r, θ, φ (хотя эти элементы и не определяют полностью эту систему).

Нормальные линии имеют направление наиболее быстрого изменения ψ . Небольшие вычисления, основанные на уравнениях (1.1.1) и (1.1.3), показывают, что изменение ψ при смещении на расстояние ds вдоль нормальной линии равно

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2} ds.$$

Квадратный корень в этом выражении называется *величиной градиента* ψ . Свойства градиента будут подробно рассмотрены несколько позже в настоящей главе.

Лапласиан. Чрезвычайно важное свойство скалярного поля выражается посредством его вторых производных. В простейшем одномерном случае,

когда ϕ является поперечным отклонением струны от ее прямолинейного положения равновесия, вторая производная $d^2\phi/dx^2$ непосредственно связана с разностью между значением ϕ в точке x и средним значением ϕ в соседних точках. С точностью до малых второго порядка включительно имеем

$$\begin{aligned}\phi(x) - \frac{1}{2} [\phi(x-dx) + \phi(x+dx)] &= \\ = -\frac{1}{2} \{[\phi(x+dx) - \phi(x)] - [\phi(x) - \phi(x-dx)]\} &= \\ = -\frac{1}{2} \frac{d^2\phi}{dx^2} (dx)^2.\end{aligned}$$

Следовательно, если вторая производная отрицательна, ϕ в точке x больше, чем среднее значение ϕ в точках $x+dx$ и $x-dx$, так что график ϕ будет обращен в точке x своей выпуклостью кверху. Если вторая производная равна нулю, то график ϕ не искривлен.

Нетрудно видеть, что уравнение, описывающее форму натянутой гибкой струны, находящейся под воздействием поперечной силы $F(x)$, отнесенной к единице длины струны, должно содержать эту вторую производную. Действительно, чем больше поперечная сила в некоторой точке, тем больше должна быть кривизна струны в этой точке, для того чтобы натяжение T вдоль струны имело большую поперечную составляющую, которая уравновешивает силу. Как показывает более подробное исследование, которое мы проведем позже, уравнение, описывающее форму струны, имеет вид

$$T \frac{d^2\phi}{dx^2} = -F(x).$$

Будем теперь искать трехмерный аналог этой меры кривизны ϕ . Разность между значением ϕ в точке и средним значением ϕ в соседних точках оказывается равной $-\frac{1}{6}(dx dy dz)^2 \nabla^2\phi$, где

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad (1.1.4)$$

является очевидным обобщением одномерного оператора второй производной. Математическая операция образования правой части уравнения (1.1.4) обозначается символом ∇^2 (читается «набла квадрат») и называется *оператором Лапласа*. Результат этой операции, произведенной над функцией, называется *лапласианом* ϕ . Если $\nabla^2\phi$ отрицателен в некоторой точке, то поле ϕ имеет тенденцию концентрироваться в этой точке. Прямым следствием этого высказывания является тот факт, что скалярная функция $\phi(x, y, z)$ не может достигать своего максимального или минимального значения в области, в которой $\nabla^2\phi = 0$. Это — весьма важный факт.

Уравнение $\nabla^2\phi = 0$, называемое *уравнением Лапласа*, встречается в физике столь часто, что полезно иметь ясное представление о его значении. Поэтому мы приведем без доказательств ряд фактов, касающихся решений уравнения Лапласа, которые будут доказаны ниже в настоящей главе.

Представим себе идеально упругую мембрану в состоянии равновесия, находящуюся под воздействием равномерного натяжения, приложенного к ее краю. Если край мембранны лежит в некоторой плоскости, то и мембрана будет лежать в этой плоскости. Если плоская форма края будет нарушена, то и мембрана перестанет быть плоской. Это искажение мембранны может быть представлено функцией $\phi(x, y)$ — отклонением точки (x, y) мембранны, перпендикулярным к этой плоскости. Оказывается, что это отклонение удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа $\nabla^2\phi = 0$.

Последнее уравнение просто соответствует утверждению, что натяжение выравнивает все «выпучивания» мембраны, что отклонение в любой точке равно среднему значению отклонений в соседних точках. Мы видим, что уравнение Лапласа для мембраны соответствует требованию, что мембрана принимает форму, требующую наименьшего растяжения.

Дополнительная нагрузка мембранны, перпендикулярная к плоскости равновесия $\psi = 0$, вызывает «выпучивание» мембранны. Как будет показано далее, лапласиан ψ в точке нагруженной мембранны пропорционален нагрузке, отнесенной к единице площади в этой точке. Можно сказать, что двумерный оператор Лапласа измеряет «выпучивание» мембранны.

Обобщение этого рассмотрения на три измерения труднее представить, но в принципе оно столь же просто. Мы можем представить себе, что скалярная функция ψ соответствует концентрации некоторого вещества в растворе. Трехмерный аналог «выпучивания» может быть назван «сгущенностью»;

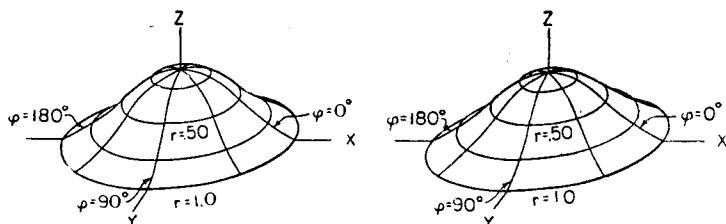


Рис. 1.2. Форма круглой мембранны, равномерно нагруженной ($\nabla^2\psi = \text{const}$) от $r=0$ до $r=1/2$ и свободной от нагрузки ($\nabla^2\psi = 0$) от $r=1/2$ до $r=1$; край мембранны $r=1$ закреплен.

если есть тенденция вещества «сгущаться» в некоторой точке, то лапласиан концентрации будет отрицателен в этой точке. Если $\nabla^2\psi = 0$, то вещество вообще не имеет «сгущений», его плотность распределяется так, чтобы различия в концентрации, порождаемые краевыми условиями, максимально сглаживались. Как и в двумерном случае, уравнение Лапласа соответствует требованию, чтобы ψ в каждой точке было равно среднему значению ψ в соседних точках.

Наличие электрических зарядов плотности ρ вызывает (отрицательную) концентрацию электрического потенциала ψ , так что $\nabla^2\psi = -\rho/\epsilon$, где ϵ — постоянная. Наличие распределенных источников тепла Q в твердом теле вызывает концентрацию температуры T , так что $\nabla^2T = -KQ$, где K — постоянная. Вообще во многих случаях на скалярное поле влияет *функция источника* $q(x, y, z)$ (которая сама является скалярным полем, удовлетворяющим некоторым другим уравнениям), причем это влияние описывается уравнением

$$\nabla^2\psi = -q. \quad (1.1.5)$$

Это уравнение называется *уравнением Пуассона*. Мы будем его подробнее рассматривать в этой главе позже и уделим много места его решению в дальнейших главах книги.

1.2. Векторные поля

Мы рассмотрели в предварительном порядке ряд полей, которые характеризуются в каждой точке одной единственной величиной. Такие поля были названы скалярными полями. Многие другие поля требуют для своего полного определения задания в каждой точке *величины и направления*. Такие поля называются *векторными полями*. Они также часто могут быть определены в терминах пределов отношений, хотя здесь определения, как