Последнее уравнение просто соответствует утверждению, что натяжение выравнивает все «выпучивания» мембраны, что отклонение в любой точке равно среднему значению отклонений в соседних точках. Мы видим, что уравнение Лапласа для мембраны соответствует требованию, что мембрана принимает форму, требующую наименьшего растяжения.

Дополнительная нагрузка мембраны, перпендикулярная к плоскости равновесия $\psi = 0$, вызывает «выпучивание» мембраны. Как будет показано далее, лапласиан ψ в точке нагруженной мембраны пропорционален нагрузке, отнесенной к единице площади в этой точке. Можно сказать, что двумерный оператор Лапласа измеряет «выпучивание» мембраны.

Обобщение этого рассмотрения на три измерения труднее представить, но в принципе оно столь же просто. Мы можем представить себе, что скалярная функция ψ соответствует концентрации некоторого вещества в растворе. Трехмерный аналог «выпучивания» может быть назван «сгущенностью»;

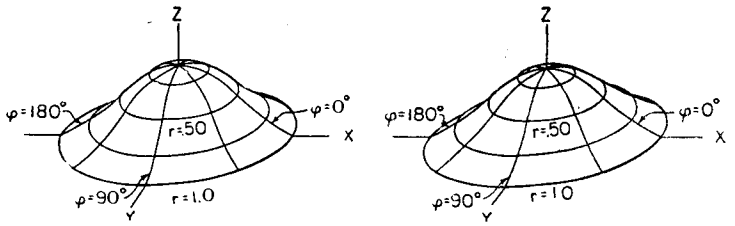

Рис. 1.2. Форма круглой мембраны, равномерно нагруженной ($\nabla^2\psi = \text{const}$) от $r=0$ до $r={}^1/_2$ и свободной от нагрузки ($\nabla^2\psi = 0$) от $r={}^1/_2$ до $r=1$; край мембраны $r=1$ закреплен.

если есть тенденция вещества «сгущаться» в некоторой точке, то лапласиан концентрации будет отрицателен в этой точке. Если $\nabla^2\psi = 0$, то вещество вообще не имеет «сгущений», его плотность распределяется так, чтобы различия в концентрации, порождаемые краевыми условиями, максимально сглаживались. Как и в двумерном случае, уравнение Лапласа соответствует требованию, чтобы ψ в каждой точке было равно среднему значению ψ в соседних точках.

Наличие электрических зарядов плотности ρ вызывает (отрицательную) концентрацию электрического потенциала ψ, так что $\nabla^2\psi = -\rho/\varepsilon$, где ε — постоянная. Наличие распределенных источников тепла Q в твердом теле вызывает концентрацию температуры T, так что $\nabla^2 T = -KQ$, где K — постоянная. Вообще во многих случаях на скалярное поле влияет *функция источника* $q(x, y, z)$ (которая сама является скалярным полем, удовлетворяющим некоторым другим уравнениям), причем это влияние описывается уравнением

$$\nabla^2\psi = -q. \tag{1.1.5}$$

Это уравнение называется *уравнением Пуассона*. Мы будем его подробнее рассматривать в этой главе позже и уделим много места его решению в дальнейших главах книги.

1.2. Векторные поля

Мы рассмотрели в предварительном порядке ряд полей, которые характеризуются в каждой точке одной единственной величиной. Такие поля были названы скалярными полями. Многие другие поля требуют для своего полного определения задания в каждой точке *величины и направления*. Такие поля называются *векторными полями*. Они также часто могут быть определены в терминах пределов отношений, хотя здесь определения, как

правило, более сложны, чем для скалярных полей. Сила, действующая на некоторую массу жидкости в гравитационном или электрическом поле, является вектором, имеющим величину и направление. Предел отношения этой силы к объему, занимаемому той массой жидкости, на которую сила воздействует, при уменьшении этого объема определяет в каждой точке пространства некоторый вектор, задающий *силовое поле*. Как и для скалярных полей, в некоторых случаях оказывается важным не допускать уменьшения объема до атомных размеров.

Иногда векторное поле легче всего определяется через скалярное отношение, которое уже само учитывает направление. Например, в случае проводника, через который течет ток, можно представить себе инструмент, который измерял бы силу тока, проходящего через элемент площади dA с центром в некоторой точке проводника. Тогда мы нашли бы, что измеренная сила тока зависит не только от величины dA, но и от ориентации элемента dA. Измерения соответствовали бы формуле $J\,dA\cos\vartheta$, где ϑ — угол между нормалью к dA и некоторым направлением, характеристическим для данного распределения тока. Величиной вектора поля в данной точке будет, следовательно, J, а его направлением будет то, от которого отсчитывается угол ϑ.

Векторные поля в трех измерениях определяются заданием *трех* количеств в каждой точке: величины и двух углов, определяющих направление, или трех составляющих (компонент) вектора по трем осям координат. Четырехмерные векторы будут рассмотрены позже.

Набранные жирным шрифтом заглавные латинские буквы ($\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{X}$) обозначают в настоящей книге векторы; соответствующие буквы, набранные обычным шрифтом (A, F, X), обозначают величины соответствующих векторов (обычный шрифт будет, как правило, применяться для обозначения скалярных величин). Составляющие $\mathbf{A}$ по трем осям координат будут обозначаться через A_x, A_y, A_z. Вектор единичной длины в направлении $\mathbf{A}$ обозначается через $\mathbf{a}$; единичные векторы в направлении осей x, y, z обозначаются, как обычно, через $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Единичные векторы вдоль криволинейных осей координат будут обозначаться через $\mathbf{a}$ с индексом, указывающим соответствующую ось (например, в полярных координатах единичный вектор в направлении r обозначается через $\mathbf{a}_r$, в направлении ϑ — через $\mathbf{a}_\vartheta$ и т. д.). Если не оговорено противное, используются правые системы координат: при вращении от x к y правый винт, расположенный вдоль оси z, будет иметь поступательное движение в положительном направлении оси z, или, что то же, наблюдатель, стоящий лицом к доске и видящий на ней ось x, направленную вправо, и ось y, направленную вверх, смотрит на плоскость xy со стороны положительных z.

В этих обозначениях векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ удовлетворяют следующим общим отношениям:

$$\begin{gathered}\mathbf{A} = A\mathbf{a} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k},\\ \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\,\mathbf{i} + (A_y + B_y)\,\mathbf{j} + (A_z + B_z)\,\mathbf{k},\end{gathered} \tag{1.2.1}$$

дающим определения составляющих и векторного сложения.

Векторы не инвариантны относительно замены координат в том же смысле, как скаляры, так как составляющие изменяются с изменением направления осей координат. Свойства преобразований векторов будут рассмотрены ниже.

Умножение векторов. Два вектора могут быть перемножены двумя различными путями: один тип умножения приводит к скаляру, другой — к вектору. *Скалярное произведение* двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ (*произведение*

с точкой) равно произведению величины одного из них на проекцию другого на направление первого:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\vartheta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z, \tag{1.2.2}$$

где ϑ — угол между $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Выражение $AB\cos\vartheta$ не зависит от выбора системы координат, примененной для вычисления составляющих A_x и т. д., так что *значение* скалярного произведения не зависит от системы координат. Скалярное произведение является поэтому истинным скаляром, простейшим инвариантом, который может быть образован из двух векторов.

Скалярное произведение полезно для выражения многих физических величин: работа, совершаемая при перемещении тела, равна скалярному произведению силы на перемещение; плотность электрической энергии в пространстве пропорциональна скалярному произведению электрической напряженности и электрической индукции и т. д. Скалярное произведение двух единичных векторов равно косинусу угла между ними. Максимальное значение скалярного произведения двух векторов достигается, когда оба вектора параллельны (и одинаково направлены); оно равно нулю, когда они перпендикулярны. В некотором смысле скалярное произведение есть мера равнонаправленности двух векторов.

Векторное произведение $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ двух векторов является вектором, величина которого равна площади параллелограмма, определенного этими двумя векторами, а направление перпендикулярно к этому параллелограмму. Выбор того конца перпендикуляра, который должен быть снабжен стрелкой, произвольно определяется тем условием, чтобы тройка $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ была правой: если правый винт расположить перпендикулярно к $\mathbf{A}$ и к $\mathbf{B}$, то вращение от $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ должно придавать винту поступательное движение в направлении $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$. В правой прямоугольной системе координат

$$\begin{gathered}\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_yB_z - B_yA_z)\,\mathbf{i} + (A_zB_x - B_zA_x)\,\mathbf{j} + (A_xB_y - B_xA_y)\,\mathbf{k},\\ \text{Величина } (\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = AB\sin\vartheta.\end{gathered} \tag{1.2.3}$$

Отметим, что векторное произведение некоммутативно, так как $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$.

Аксиальные векторы. Хотя (как мы далее увидим) векторное произведение двух векторов является вектором, обладающим при преобразованиях большинством свойств «истинного» вектора, здесь имеется все же одно важное различие. Векторное произведение, определенное равенством (1.2.3), меняет знак при переходе от правой системы координат к левой. Это один из аспектов того факта, что векторное произведение имеет скорее свойства ориентации элемента площади, нежели стрелки. Направление, связанное с элементом площади, определено однозначно как направление, нормальное к элементу, однако нет обязательного правила[1]) для выбора положительной стороны элемента. Площадь определяет, так сказать, древко стрелы, но не говорит о том, с какой стороны должен быть наконечник. Этот вопрос должен быть решен каким-либо полностью произвольным правилом, как, например, указанным выше правилом (правого винта), которого мы и будем придерживаться.

Вообще векторы с данным «древком» (т. е. с заданной несущей прямой и данной длины), но с заменяемыми стрелками называются *аксиальными*

---

[1]) Имеется в виду правило, не зависящее от ориентации системы координат. — *Прим. перев.*

векторами (они иногда называются также *псевдовекторами*). В дальнейшем мы увидим, что три составляющие аксиального вектора фактически являются тремя компонентами трехмерного кососимметрического тензора второго порядка. Кососимметрический тензор можно представить аксиальным вектором в трехмерном пространстве.

Как указывалось выше, аксиальный вектор, связанный с элементом площади $\mathbf{dA}$, можно записать в виде

$$\mathbf{dA} = \mathbf{n}\,dA = \mathbf{dx} \times \mathbf{dy},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к элементу и где $\mathbf{dx}$ и $\mathbf{dy}$ — векторы, соответствующие составляющим элементам dx и dy. Если применяются первые два обозначения, необходимо дополнительно указать, какая сторона элемента считается положительной; если используется последнее обозначение, наше правило правого винта автоматически решает и этот вопрос.

Другие аксиальные векторы также могут быть представлены в виде векторного произведения: момент количества движения материальной частицы относительно некоторой точки равен векторному произведению вектора, представляющего импульс частицы, и радиус-вектора частицы; момент силы равен векторному произведению вектора силы и вектора, представляющего плечо, и т. д. Вращение определяет плоскость и ось, нормальную к этой плоскости, т. е. характеристики аксиального вектора. В соответствии с нашим правилом направление вектора, изображающего вращение, совпадает с поступательным движением правого винта при рассматриваемом вращении.

Полезным примером произведения трех векторов является *смешанное тройное произведение*

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{1.2.4}$$

Это выражение равно объему (или объему, взятому со знаком минус) параллелепипеда с ребрами $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$. Оно представляет собой скаляр, являющийся скалярным произведением аксиального вектора и истинного вектора, и меняет знак при переходе от правой к левой системе координат, а также при перестановке двух векторов; поэтому такой скаляр называется иногда *псевдоскаляром*. Заметим, что скалярное произведение двух аксиальных векторов (или двух истинных векторов) является «истинным» скаляром без неопределенности в знаке.

В частности, правилами умножения единичных векторов являются:

$$\begin{gathered} \mathbf{i}^2 = \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{i}\times\mathbf{i} = \ldots = 0, \qquad \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}. \end{gathered} \tag{1.2.5}$$

Линии тока. Как уже было указано, векторное поле определяется заданием вектора в каждой точке пространства или, другими словами, заданием вектора, являющегося функцией x, y, z: $\mathbf{F}(x, y, z)$. В большинстве интересующих нас случаев этот вектор является непрерывной функцией x, y, z, за исключением либо изолированных точек, или *особенностей*, либо изолированных линий — *особых линий*. Там, где вектор непрерывен, мы можем определить *линии тока* поля, которые являются линиями, касательными в каждой точке к вектору в этой точке. Дифференциальные уравнения этих линий выводятся из требования пропорциональности

составляющих dx, dy, dz смещения вдоль линии и составляющих F_x, F_y, F_z вектора поля в данной точке

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \tag{1.2.6}$$

[ср. с уравнениями (1.1.3)].

В некоторых простых случаях эти уравнения могут быть проинтегрированы, что дает уравнения семейства линий тока.

Например, если $F_x = -ay$, $F_y = ax$, $F_z = b(x^2+y^2)$, то линии тока являются винтовыми линиями. Уравнение $dx/F_x = dy/F_y$ превращается

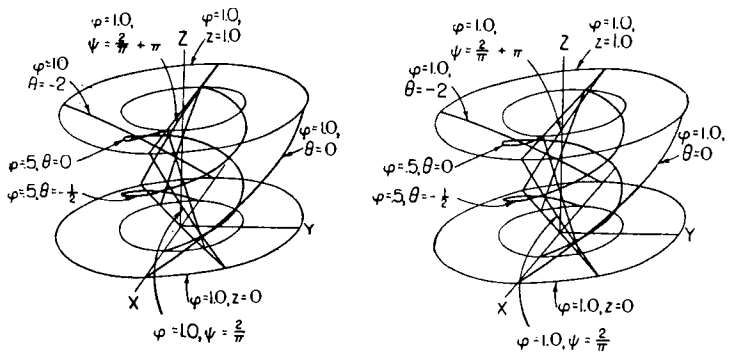

Рис. 1.3. Винтовые линии тока θ, $\varphi = \text{const}$ с псевдопотенциальными поверхностями $\psi = \text{const}$ (см. стр. 26).

в $x\,dx = -y\,dy$; интегрируя его, находим уравнение кругового цилиндра $x^2+y^2=\varphi^2$, где φ — произвольная постоянная, частично определяющая выбор линии тока. Уравнение

$$\frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$

превращается в

$$\frac{\varphi^2\,dy}{\sqrt{\varphi^2-y^2}} = \frac{a\,dz}{b}$$

(если выразить x из уравнения, связывающего x и y). Интегрируя его, находим

$$z = \frac{b\varphi^2}{a}\arcsin\frac{y}{\varphi} + \theta = \frac{b}{a}(x^2+y^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \theta,$$

где θ — другая постоянная интегрирования, которая необходима для полного определения линии тока. Уравнения

$$\varphi = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = z - \frac{b}{a}(x^2+y^2)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

определяют дважды бесконечное семейство линий тока, причем каждая отдельная линия тока задается парой значений φ и θ.

Другим примером является $F_x = \frac{x}{r^3}$, $F_y = \frac{y}{r^3}$, $F_z = \frac{z}{r^3}$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Уравнения для линий тока сводятся к системе

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Первое из уравнений этой системы дает $\ln x = \ln y + \text{const}$ или $x/y = \text{const}$. Аналогично мы находим, что либо x/z, либо $y/z = \text{const}$ или $(x^2+y^2)/z^2 =$

$=\text{const}$. Наиболее удобной формой выражения постоянных интегрирования является (по аналогии с предыдущим примером)

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.$$

И в этом примере выбор значений для φ и θ определяет индивидуальную линию тока; она является в данном случае полупрямой, исходящей из начала координат.

С другой точки зрения φ и θ могут рассматриваться как функции x, y, z и называются *функциями тока*. Значения φ и θ в некоторой точке выделяют линию тока, проходящую через эту точку. Еще с одной точки зрения два семейства поверхностей $\varphi=\text{const}$ и $\theta=\text{const}$ могут рассматриваться как семейства координатных поверхностей некоторой обобщенной

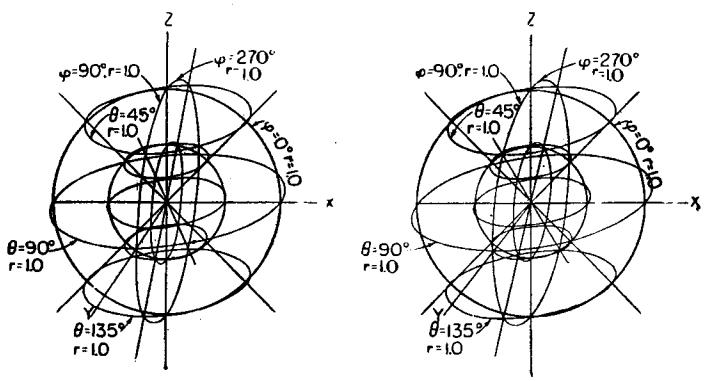

Рис. 1.4. Радиальные линии тока и сферические эквипотенциальные поверхности для поля вокруг точечного источника.

системы координат. Пересечением двух таких поверхностей $\varphi=\varphi_0$ и $\theta=\theta_0$ является линия тока, соответствующая паре значений (φ_0, θ_0); это — координатная линия в новой системе координат.

Потенциальные поверхности. Линии тока могут также определять другое семейство поверхностей, перпендикулярных к ним (если только эти линии не «закручиваются» так, что такого семейства поверхностей не существует). По аналогии с уравнением (1.1.2) уравнение такой поверхности имеет вид

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = 0 \tag{1.2.7}$$

в соответствии с тем фактом, что любой вектор смещения на поверхности должен быть перпендикулярным к $\mathbf{F}$.

В некоторых случаях это уравнение интегрируемо. Если существует такая функция ψ, что

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial x} = F_x, \quad \mu\frac{\partial\psi}{\partial y} = F_y, \quad \mu\frac{\partial\psi}{\partial z} = F_z,$$

то уравнением семейства поверхностей будет $\psi=\text{const}$. Величина μ может быть функцией x, y, z; она называется *интегрирующим множителем*. Критерий того, существует ли уравнение поверхностей в интегральной

форме, может быть получен следующим образом. Рассмотрим выражение

$$F_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+F_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+F_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)=$$
$$=\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]+\mu\frac{\partial\psi}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]+$$
$$+\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]=0. \quad (1.2.8)$$

Это выражение равно нулю, если функция ψ с указанными свойствами существует. Обратно, если выражение

$$F_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+F_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+F_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

оказывается равным нулю, то интегрирование дифференциального уравнения для поверхностей, перпендикулярных к линиям тока, возможно[1]). Другими словами, если вектор с составляющими

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right),\ \left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

по осям x, y, z перпендикулярен к вектору **F** *в каждой точке*, то можно получить уравнение нормальных поверхностей в интегральной форме $\psi(x, y, z) = \text{const}$. Подробнее этот вектор будет рассмотрен ниже. Функция ψ называется *псевдопотенциальной функцией*.

В некоторых случаях μ постоянно и может быть положено равным —1, так что

$$F_x=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad F_y=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad F_z=-\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Позже будет объяснено, почему выбирается знак минус. В этих случаях функция ψ называется *потенциальной функцией* векторного поля **F**, а поверхности $\psi = \text{const}$ называются *эквипотенциальными поверхностями*[2]). Для того чтобы это имело место, каждая из разностей

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z},\quad \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x},\quad \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}$$

должна быть равна нулю, как в этом можно убедиться, заменив выражения для составляющих **F** производными функции ψ.

В других случаях уравнение поверхностей не интегрируемо ни при помощи интегрирующего множителя, ни без него; тогда невозможно найти хорошо ведущее себя семейство поверхностей, всюду перпендикулярных линиям тока. Мы еще вернемся к этому рассмотрению на стр. 29.

В первом примере предыдущего пункта, где линиями тока являются винтовые линии, вектор с составляющими

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}=2by,\quad \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}=-2bx,\quad \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=2a$$

перпендикулярен к вектору **F**. Поэтому дифференциальное уравнение (1.2.7) семейства поверхностей интегрируемо. После умножения уравнения

---

[1]) Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, ГТТИ, М.—Л., 1950, гл. IX, § 2. — *Прим. перев.*

[2]) В некоторых местах книги под потенциальной функцией понимается не ψ, а $-\psi$. — *Прим. ред.*

на интегрирующий множитель $\mu = (x^2+y^2)^{-1}$ мы получаем в левой части полный дифференциал. Полагая

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \frac{b}{a}z,$$

находим, что

$$F_x = a\,(x^2+y^2)\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad F_y = a(x^2+y^2)\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad F_z = a\,(x^2+y^2)\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

так что проинтегрированное уравнение, соответствующее уравнению (1.2.7), в этом случае имеет вид $\psi = \text{const}$. Система поверхностей $\psi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ образует систему обобщенных координатных поверхностей (которые в данном случае не являются взаимно перпендикулярными), наиболее естественную для рассматриваемого векторного поля. Значения φ и θ в некоторой точке определяют линию тока, проходящую через эту точку, а значение ψ определяет положение точки на этой линии тока.

Во втором рассмотренном выше примере все разности

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

равны нулю, так что уравнение (1.2.7) интегрируется непосредственно без применения интегрирующего множителя. Функция

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

поэтому является потенциальной функцией, а сферические поверхности $\psi = \text{const}$ являются эквипотенциальными поверхностями. Компоненты $\mathbf{F}$ связаны с ψ требуемыми соотношениями

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} = -F_x, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{y}{r^3} = -F_y, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{z}{r^3} = -F_z,$$
$$r^2 = x^2+y^2+z^2.$$

Система координат, соответствующая линиям тока и эквипотенциальным поверхностям, является сферической

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

В этом случае координатные поверхности взаимно-перпендикулярны.

Если для данного векторного поля $\mathbf{F}$ существует семейство эквипотенциальных поверхностей, то это поле может быть представлено через скалярное потенциальное поле ψ, и тогда, как правило, гораздо легче вычислить сначала это скалярное поле, а векторное поле получить дифференцированием.

Поверхностные интегралы. Векторные поля и их линии тока обладают рядом общих свойств, играющих важную роль для наших целей. Одним из этих свойств является «расхождение» или «поток» линий тока, отнесенное к данной области, причем это понятие учитывает как тот случай, когда линии тока начинаются в этой области или пропадают в ней, так и тот случай, когда они просто переходят через область с одной ее стороны до другой. Другим интересным свойством является мера «закрученности» линий, независимо от того, находятся ли в векторном поле «завихрения» или нет.

Расхождение линий тока из области может быть измерено при помощи *поверхностного интеграла*. Предположим, что мы рассматриваем

элемент площади поверхности, ограничивающей область, представленный бесконечно малым аксиальным вектором $\mathbf{dA}$, равным по величине площади элемента и направленным перпендикулярно к поверхности. Скалярное произведение $\mathbf{F}\cdot\mathbf{dA}$ равно тогда произведению площади элемента поверхности на составляющую вектора $\mathbf{F}$, нормальную к поверхности. Если вектор поля $\mathbf{F}(x, y, z)$ представляет вектор скорости движения жидкости, то $\mathbf{F}\cdot\mathbf{dA}$ равно объему жидкости, протекшему через элемент поверхности (в единицу времени), а $\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{dA}$ равен объему всей жидкости, протекшей (в единицу времени) через ту поверхность, по которой распространяется интегрирование. Знак интеграла зависит от выбора направлений аксиальных векторов $\mathbf{dA}$, т. е. от того, направлены ли эти векторы от одной стороны поверхности или от другой. Абсолютная величина этого интеграла иногда называется *числом линий тока поля, пересекающих поверхность* (являющуюся областью интегрирования), — термин, который определяет, что следует понимать под «числом линий тока».

Если поверхность, по которой производится интегрирование, является замкнутой и если векторы $\mathbf{dA}$ направлены *от области*, ограниченной поверхностью, то интеграл будет записываться в виде

$$\oint \mathbf{F}\cdot\mathbf{dA}$$

и называться *потоком вектора* $\mathbf{F}$ из области, ограниченной замкнутой поверхностью интегрирования. Если $\mathbf{F}$ есть вектор скорости жидкости, то этот интеграл равен «расходу жидкости» в рассматриваемой области. Ограничивающая эту область поверхность не обязана состоять из одной связной части, ограничивающей односвязную область; область может быть ограничена несколькими поверхностями, например одной внутренней и одной внешней (или даже несколькими внутренними поверхностями). В этом случае внешняя ограничивающая поверхность может лежать в бесконечности, так что область будет состоять из всего пространства, внешнего относительно одной или нескольких замкнутых поверхностей. Векторы $\mathbf{dA}$ в точках внутренних поверхностей должны быть направлены внутрь от рассматриваемой внешней области.

Интеграл $\oint \mathbf{F}\cdot\mathbf{dA}$ является мерой числа линий тока, берущих свое начало внутри области. Если таких линий нет, т. е. все линии тока проходят с одной стороны границы области до другой, то этот интеграл равен нулю.

Источник. Один простой пример векторного поля представляет для нас особый интерес; он иллюстрирует важное свойство потока вектора. Это тот случай, когда все линии тока берут свое начало в одной точке O, причем вектор $\mathbf{F}$ в точке P имеет величину Q/r^2 и направлен вдоль $\mathbf{r}$. Величина r есть расстояние от O до P, как показано на рис. 1.5, а точка O называется *простым источником* линий тока; Q называется *мощностью* источника. Элемент поверхностного интеграла в этом случае равен

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{dA} = \frac{Q}{r^2}\cos\theta\, dA.$$

Но $dA(\cos\theta/r^2)$ равно $d\Omega$ — элементу телесного угла, под которым из точки O виден элемент площади dA, когда нормаль к этому элементу наклонена под углом θ к радиусу. Поток вектора в этом случае сводится к $Q\oint d\Omega$, что равно нулю, если O лежит вне области, ограниченной

поверхностью интегрирования, и равно $4\pi Q$, если O лежит внутри этой области. Более подробное рассмотрение, аналогичное приведенному выше, показывает, что это справедливо для замкнутых поверхностей любой формы и строения, ограничивающих область.

Изложенное выше дает нам довольно окольный путь для определения простого источника. Более непосредственным было бы определение простого источника мощности Q как точечной особенности векторного поля, обладающей тем свойством, что поток вектора из любой области, содержащей эту особенность (и не содержащей других), равен $4\pi Q$.

Полученный результат может быть сформулирован в виде равенств

$$\oint \frac{Q}{r^2}\mathbf{a}_r\cdot d\mathbf{A} = \begin{cases} 0, \text{ если источник находится вне области,} \\ 4\pi Q, \text{ если источник находится внутри области.} \end{cases} \tag{1.2.9}$$

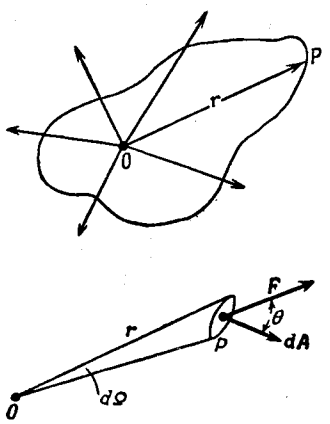

Рис. 1.5. Векторное поле вокруг точечного источника. Элемент интеграла, выражающего поток вектора.

Здесь $\mathbf{a}_r$ обозначает единичный вектор, направленный от O вдоль $\mathbf{r}$.

Иногда векторное поле является наложением полей, порожденных несколькими простыми источниками: одним в точке O_1 мощности Q_1, другим в точке O_2 мощности Q_2 и т. д. Другими словами,

$$\mathbf{F} = \sum \frac{Q_n}{r_n^2}\mathbf{a}_{rn},$$

где r_n — расстояние от точки O_n до P, а $\mathbf{a}_{rn}$ — единичный вектор, направленный вдоль $\mathbf{r}_n$. В этом случае поток вектора будет равен

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \sum \oint \frac{Q_n}{r_n^2}\mathbf{a}_{rn}\cdot d\mathbf{A} = \sum{}' 4\pi Q_n, \tag{1.2.10}$$

где штрих у суммы означает суммирование по тем источникам, которые содержатся внутри области, ограниченной поверхностью интегрирования, а сумма без штриха распространяется на все источники.

Криволинейные интегралы. Вместо интегрирования нормальной составляющей вектора по поверхности можно также интегрировать его составляющую вдоль линии. Если $d\mathbf{s}$ — векторный элемент дуги вдоль некоторого пути, то интеграл $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, взятый вдоль этого пути, называется *криволинейным интегралом* $\mathbf{F}$ (вдоль соответствующего пути). Если $\mathbf{F}$ — вектор силы, то криволинейный интеграл является работой, совершенной вдоль пути; если $\mathbf{F}$ — электрическая напряженность, то криволинейный интеграл равен э. д. с. между концами пути и т. д.

Вообще говоря, значение криволинейного интеграла между двумя точками зависит от выбора пути между ними. В некоторых случаях, однако, оно зависит только от положения конечных точек. Это имеет место в случае, рассмотренном на стр. 25, где составляющие $\mathbf{F}$ являлись производными некоторой потенциальной функции ϕ. В таком случае криволинейный интеграл от точки O до другой точки P вдоль некоторого пути A равен по абсолютной величине и обратен по знаку криволинейному интегралу, взятому в обратном направлении от P к O вдоль какого-либо другого пути B. Поэтому интеграл вдоль замкнутого пути от O по A к P и затем обратно вдоль B к O для такого поля равен нулю. Вообще же говоря, криволинейный интеграл векторного поля вдоль замкнутого пути не равен нулю.

Криволинейный интеграл вдоль замкнутого пути обозначается

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

и называется *циркуляцией* **F** вдоль этого пути. Этот интеграл является мерой «закрученности» линий тока поля. Например, если линии тока замкнуты (как, например, линии магнитной напряженности вокруг проводника, по которому идет ток), то криволинейный интеграл **F** вдоль таких линий будет, конечно, отличен от нуля. Этот интеграл называется *циркуляцией* потому, что если **F** представляет вектор скорости в потоке жидкости, то $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ является мерой циркуляции жидкости вдоль выбранного замкнутого пути.

Мы видели, что в том случае, когда векторное поле имеет потенциальную функцию, циркуляция равна нулю. Поэтому мы называем все

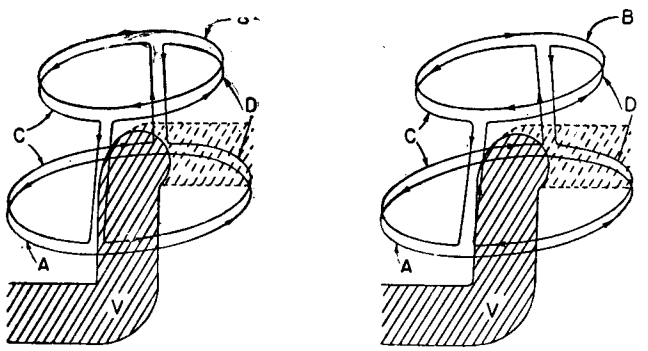

Рис. 1.6. Пути для интеграла циркуляции вокруг вихревых областей.

поля, имеющие потенциальные функции, *полями без циркуляции* или *безвихревыми* полями. В полях, для которых существуют псевдопотенциалы, циркуляция не обязательно должна быть равна нулю. Это будет иметь место только в том случае, когда grad μ (см. стр. 25) в каждой точке параллелен **F**.

Существуют векторные поля, которые являются безвихревыми всюду вне некоторой области пространства; точнее, в этих полях циркуляция по замкнутому пути, охватывающему эту область, отлична от нуля, а циркуляция по замкнутому полю, не охватывающему эту область, равна нулю. По аналогии с задачей о потоке жидкости мы будем такую область, «порождающую» циркуляцию, называть *вихревой областью*. Вихревые области должны иметь форму трубки, которая не имеет ни начала, ни конца. Она должна либо уходить в обе стороны в бесконечность, либо иметь форму «баранки». Действительно, если бы вихревая область заканчивалась как V (см. рис. 1.6), то это означало бы, что циркуляция по пути A отлична от нуля, тогда как интегралы по путям B, C и D равны нулю. Однако нетрудно усмотреть, что если интеграл по A отличен от нуля и, например, интегралы по B и C равны нулю, то интеграл по D *не может быть равен нулю*. Это следует из того, что интегралы по соседним параллельным частям путей, проходимых в противоположных направлениях, взаимно уничтожаются, так что сумма всех четырех интегралов по A, B, C и D должна быть равна нулю. Поэтому, если интегралы по B и C равны нулю, то интеграл по D должен быть равен

интегралу по A, взятому с обратным знаком, который по условию отличен от нуля. Следовательно, вихревая область не может заканчиваться на V, а должна продолжаться каким-то образом, как, например, показано пунктирной штриховкой на рис. 1.6. (При этом рассуждении мы молчаливо предполагаем, что поле непрерывно вне вихревой области; в противном случае положение может быть совершенно иным.)

Вихревая область может, конечно, «разветвляться» на несколько трубок, из которых одни могут замыкаться, а другие — уходить в бесконечность. Доказанное выше утверждение может быть обобщено и на этот случай; в дифференциальной форме соответствующая общая теорема будет приведена на стр. 51.

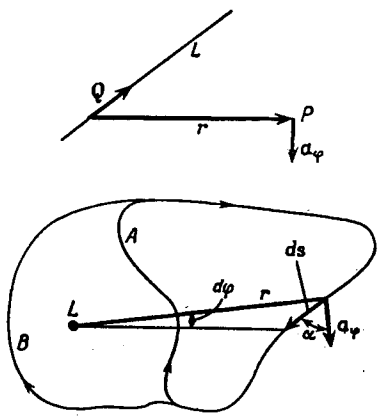

Рис. 1.7. Векторное поле вокруг линии вихрей. Элемент циркуляции.

Вихревая линия. Простейшим видом вихревой области является *простая вихревая прямая линия*, поле которой дается уравнением

$$\mathbf{F} = \frac{2}{r}(\mathbf{Q} \times \mathbf{a}_r) = \frac{2Q}{r}\mathbf{a}_\varphi, \qquad (1.2.11)$$

где $\mathbf{Q}$, называемый иногда *вектором завихренности*, является вектором произвольной длины, направленным вдоль вихревой прямой линии L. Пусть $\mathbf{q}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{Q}$. Вектор $\mathbf{r}$ перпендикулярен к $\mathbf{Q}$ и идет от L к точке P, в которой рассматривается вектор поля $\mathbf{F}$, $\mathbf{a}_r$ — единичный вектор в том же направлении и $\mathbf{a}_\varphi = \mathbf{q} \times \mathbf{a}_r$ — единичный вектор, перпендикулярный к $\mathbf{a}_r$ и к $\mathbf{Q}$. Для пути в плоскости, перпендикулярной к L, циркуляция в этом поле равна

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 2Q \oint \frac{\cos\alpha}{r} ds,$$

где α — угол между $d\mathbf{s}$ и $\mathbf{a}_\varphi$.

Вторая часть рис. 1.7 показывает, что $ds(\cos\alpha)/r = d\varphi$ — элементу угла вращения $\mathbf{r}$ вокруг L. Поэтому циркуляция сводится к интегралу $2Q\oint d\varphi$, который может быть непосредственно вычислен. Так, для пути B, обходящего L, он равен $4\pi Q$, а для пути A, не обходящего L, он равен нулю. Это рассмотрение может быть обобщено на пути, не лежащие в плоскости, перпендикулярной к L, и окончательный результат для поля простой вихревой линии имеет вид

$$\oint \left(\frac{2Q}{r}\right) \mathbf{a}_\varphi \cdot d\mathbf{s} = \begin{cases} 0, & \text{если путь не обходит } L, \\ \pm 4\pi Q, & \text{если путь один раз обходит } L, \end{cases} \qquad (1.2.12)$$

справедливый для всевозможных путей. Знак плюс следует брать, если при интегрировании обход L совершается по часовой стрелке, если смотреть в направлении положительных Q; знак минус — если обход совершается в противоположном направлении.

Особенности полей. Интересно отметить параллелизм между свойствами интеграла, выражающего поток вектора вблизи простого источника, рассмотренными на стр. 28, и только что рассмотренными свойствами интеграла циркуляции вблизи вихревой линии. Источник и вихревая

линия являются простейшими примерами *особенностей* векторных полей. В результате наших дальнейших рассмотрений мы убедимся в том, что особенности, подобные этим, являются обычно наиболее важными моментами, характеризующими скалярные и векторные поля. Физическая сущность задачи, как правило, тесно связана с типом особенностей поля. Точно так же математические свойства решений дифференциальных уравнений определяются характером особенностей, которыми обладают уравнения и их решения. Нам придется много заниматься физическими и математическими свойствами особенностей в полях.

Поле, порождаемое простым источником, расходится из точки, а поле, порождаемое вихревой линией, вращается вокруг этой линии. Источники можно распределить вдоль линий, или поверхностей, или даже по некоторому объему, а вихревые линии — по поверхностям или по объему, но их нельзя стянуть в точку. Это связано с тем фактом, что для вращения требуется ось, т. е. линия, вокруг которой происходит вращение.

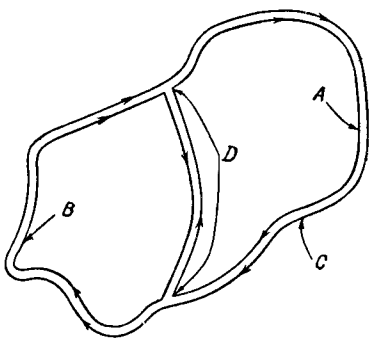

Рис. 1.8. Аддитивность циркуляции.

Циркуляция и поток вектора в любых полях обладают одним интересным общим свойством, а именно, «аддитивностью». Например, на рис. 1.8 циркуляция вдоль пути C равна сумме циркуляций по путям A и B, так как интегрирование по внутренней части D путей A и B совершается в противоположных направлениях и соответствующие интегралы взаимно уничтожаются, а остатки в сумме дают интеграл по пути C. Аналогично поток из любой области равен сумме потоков из всех частей области, которые ее составляют. Это также объясняется тем, что интегралы по поверхностям, проходящим внутри исходной области, встречаются парами и взаимно уничтожаются, так что сумма остающихся интегралов равна интегралу по поверхности, ограничивающей эту исходную область.

1.3. Криволинейные координаты

До сих пор мы молчаливо предполагали, что рассматриваемые поля могут быть выражены через три прямоугольные декартовы координаты x, y, z (четвертая координата, время, будет рассмотрена позже). Векторные и скалярные поля всегда могут быть так выражены, но часто оказывается гораздо более удобным выразить их в других системах координат. Мы уже видели, что иногда оказывается возможным построить некоторую «естественную» для данного векторного поля систему координат, используя для этого линии тока и потенциальные поверхности. Во многих случаях природа поля определяется указанием его поведения на некоторой граничной поверхности или указанием характера и расположения его особенностей (или тем и другим); при этом часто оказывается, что «естественная» для поля система координат каким-то простым образом связана с граничной поверхностью или с распределением особенностей (или и с тем и с другим). В этих «естественных» координатах выражение поля часто принимает простой и удобообозримый вид, тогда как в координатах x, y, z это выражение становится очень сложным, а необходимые вычисления — почти невыполнимыми.