линия являются простейшими примерами *особенностей* векторных полей. В результате наших дальнейших рассмотрений мы убедимся в том, что особенности, подобные этим, являются обычно наиболее важными моментами, характеризующими скалярные и векторные поля. Физическая сущность задачи, как правило, тесно связана с типом особенностей поля. Точно так же математические свойства решений дифференциальных уравнений определяются характером особенностей, которыми обладают уравнения и их решения. Нам придется много заниматься физическими и математическими свойствами особенностей в полях.

Поле, порождаемое простым источником, расходится из точки, а поле, порождаемое вихревой линией, вращается вокруг этой линии. Источники можно распределить вдоль линий, или поверхностей, или даже по некоторому объему, а вихревые линии — по поверхностям или по объему, но их нельзя стянуть в точку. Это связано с тем фактом, что для вращения требуется ось, т. е. линия, вокруг которой происходит вращение.

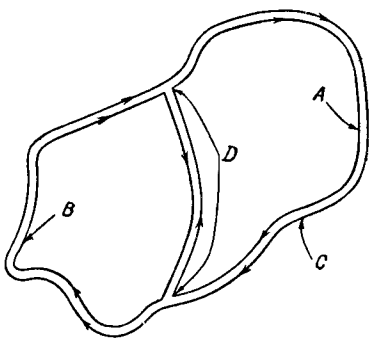

Рис. 1.8. Аддитивность циркуляции.

Циркуляция и поток вектора в любых полях обладают одним интересным общим свойством, а именно, «аддитивностью». Например, на рис. 1.8 циркуляция вдоль пути C равна сумме циркуляций по путям A и B, так как интегрирование по внутренней части D путей A и B совершается в противоположных направлениях и соответствующие интегралы взаимно уничтожаются, а остатки в сумме дают интеграл по пути C. Аналогично поток из любой области равен сумме потоков из всех частей области, которые ее составляют. Это также объясняется тем, что интегралы по поверхностям, проходящим внутри исходной области, встречаются парами и взаимно уничтожаются, так что сумма остающихся интегралов равна интегралу по поверхности, ограничивающей эту исходную область.

1.3. Криволинейные координаты

До сих пор мы молчаливо предполагали, что рассматриваемые поля могут быть выражены через три прямоугольные декартовы координаты x, y, z (четвертая координата, время, будет рассмотрена позже). Векторные и скалярные поля всегда могут быть так выражены, но часто оказывается гораздо более удобным выразить их в других системах координат. Мы уже видели, что иногда оказывается возможным построить некоторую «естественную» для данного векторного поля систему координат, используя для этого линии тока и потенциальные поверхности. Во многих случаях природа поля определяется указанием его поведения на некоторой граничной поверхности или указанием характера и расположения его особенностей (или тем и другим); при этом часто оказывается, что «естественная» для поля система координат каким-то простым образом связана с граничной поверхностью или с распределением особенностей (или и с тем и с другим). В этих «естественных» координатах выражение поля часто принимает простой и удобообозримый вид, тогда как в координатах x, y, z это выражение становится очень сложным, а необходимые вычисления — почти невыполнимыми.

В силу этих и ряда других соображений, с которыми мы ознакомимся при дальнейшем углублении в наш предмет, полезно сейчас заняться выражениями полей, а также дифференциальных и интегральных операторов, которые действуют на них, в обобщенных трехмерных координатах. Мы ограничимся *ортогональными* координатами, для которых три семейства координатных поверхностей взаимно перпендикулярны, так как задачи, требующие неортогональных координат, почти никогда не решаются точно. Техника же приближенного решения таких задач обычно использует решения в ортогональной системе координат.

Обобщенная система координат состоит из трех семейств поверхностей, уравнения которых в декартовой системе координат имеют вид $\xi_1(x, y, z) = \text{const}$, $\xi_2(x, y, z) = \text{const}$, $\xi_3(x, y, z) = \text{const}$ (мы предполагаем, что читатель достаточно хорошо знаком со свойствами декартовых

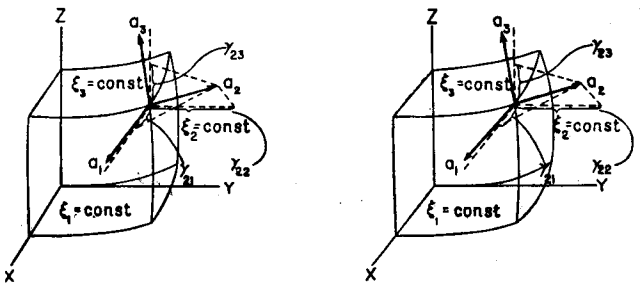

Рис. 1.9. Элемент криволинейной системы координат с единичными векторами $\mathbf{a}_n$ и направляющими косинусами γ_{nm}.

координат x, y, z, так что нет необходимости заниматься ими здесь). Эти равенства определяют ξ_1, ξ_2 и ξ_3 как функции от x, y и z. Во многих случаях оказывается более удобным обратить уравнения и выразить x, y, z через ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Линии пересечения этих поверхностей образуют три семейства кривых (вообще говоря) линий. От точки (x, y, z) или (ξ_1, ξ_2, ξ_3) мы откладываем три единичных вектора $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, каждый из которых касателен к проходящей через эту точку соответствующей координатной линии криволинейной системы. Это новая тройка единичных векторов, через которые мы можем выразить векторное поле $\mathbf{F}$. Повторяем, что векторы $\mathbf{a}$ имеют *единичную* длину, скажем 1 *см* (или какая-либо другая примененная единица длины), т. е. ту же длину, что и векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Для ортогональных систем координат векторы $\mathbf{a}$ в каждой точке взаимно перпендикулярны.

Направляющие косинусы. Обозначим направляющие косинусы единичного вектора $\mathbf{a}_1$ относительно старых осей через $\alpha_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{i}$, $\beta_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{j}$, $\gamma_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{k}$; направляющие косинусы вектора $\mathbf{a}_2$ — через α_2, β_2, γ_2 и т. д. В общем случае эти направляющие косинусы изменяются от точки к точке, т. е. α, β и γ являются функциями ξ_1, ξ_2, ξ_3. В силу свойств направляющих косинусов имеем равенства

$$\alpha_n^2 + \beta_n^2 + \gamma_n^2 = 1, \quad n = 1, 2, 3,$$

справедливые для всех значений координат.

Если новые единичные векторы $\mathbf{a}$ взаимно перпендикулярны в каждой точке, то новая система координат *ортогональна*. В этом случае

α_1, α_2, α_3 являются направляющими косинусами $\mathbf{i}$ относительно векторов $\mathbf{a}$, и девять введенных направляющих косинусов симметричны относительно обеих систем координат. Чтобы подчеркнуть эту симметрию, мы введем новые обозначения:

$$\alpha_n = \gamma_{n1}, \quad \beta_n = \gamma_{n2}, \quad \gamma_n = \gamma_{n3},$$

так что

$$\mathbf{a}_n = \gamma_{n1}\mathbf{i} + \gamma_{n2}\mathbf{j} + \gamma_{n3}\mathbf{k}; \quad \mathbf{i} = \sum_n \gamma_{n1}\mathbf{a}_n,$$

и т. д.

Так как $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$, $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1 = 1$, $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2 = 0$ и т. д., указанные соотношения между направляющими косинусами и единичными векторами приводят к ряду уравнений, связывающих значения γ_{mn}:

$$\sum_s \gamma_{ms}\gamma_{ns} = \sum_s \gamma_{sm}\gamma_{sn} = \delta_{mn}, \tag{1.3.1}$$

где δ_{mn} — *дельта-функция Кронекера, или символ Кронекера*, равный нулю, если $m \neq n$, и равный единице при $m = n$.

Обращаясь к равенству (1.2.4), мы отмечаем, что если система координат ξ правая (система x, y, z предполагается правой), то определитель $|\gamma_{mn}|$ равен $+1$; если ξ образуют левую систему, то этот определитель равен -1. Используя соотношения (1.2.5) или решая уравнения (1.3.1) относительно одного из γ, мы найдем, что

$$\gamma_{mn} = \pm M_{mn}, \tag{1.3.2}$$

где знак плюс имеет место в случае, когда ξ образуют правую систему координат, а знак минус — когда они образуют левую систему. Величина M_{mn} является алгебраическим дополнением γ_{mn} в определителе $|\gamma_{mn}|$:

$$M_{11} = \gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{23}\gamma_{32},$$
$$M_{12} = \gamma_{23}\gamma_{31} - \gamma_{21}\gamma_{33},$$
$$M_{31} = \gamma_{12}\gamma_{23} - \gamma_{13}\gamma_{22} \quad \text{и т. д.}$$

Следует, конечно, иметь в виду, что соотношения (1.3.1) и (1.3.2) остаются в силе и в том случае, когда речь идет о *двух произвольных* ортогональных системах, а не только о декартовой системе и одной произвольной ортогональной системе. В равенстве (1.3.2) знак плюс имеет место, если обе системы правые или обе левые; знак минус — если одна из них правая, а другая левая.

Так как мы предположили, что наша криволинейная система координат ортогональна, то любой вектор $\mathbf{F}$ в точке (ξ_1, ξ_2, ξ_3) может быть представлен разложением на составляющие по направлениям новых единичных векторов

$$\mathbf{F} = \sum_m F_m\mathbf{a}_m, \quad \text{где } F_m = \mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_m.$$

Используя направляющие косинусы γ_{mn}, легко показать, что между этими составляющими и декартовыми составляющими $\mathbf{F}$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} F_m &= \gamma_{m1}F_x + \gamma_{m2}F_y + \gamma_{m3}F_z = \alpha_m F_x + \beta_m F_y + \gamma_m F_z, \\ F_x &= \sum_m \gamma_{m1}F_m = \sum_m \alpha_m F_m \qquad \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Любая система трех величин, определенных относительно систем координат так, что выбору x, y, z соответствует тройка функций от x, y, z, а выбору ξ_1, ξ_2, ξ_3 соответствует другая тройка функций от ξ_1, ξ_2, ξ_3, может рассматриваться как система составляющих некоторого вектора в том и только в том случае, когда эти две тройки функций связаны между собой соотношениями вида (1.3.3).

Коэффициенты Ламе. Проведенные выше рассмотрения не окажут нам, однако, существенной помощи, если значения направляющих косинусов α, β, γ в каждой точке остаются неизвестными. Как правило, нам задаются уравнения новых координатных поверхностей; исходя из них, мы должны вывести выражения для направляющих косинусов. Например, обычное определение сферических координат $z=\xi_1\cos\xi_2$, $x=\xi_1\sin\xi_2\cos\xi_3$, $y=\xi_1\sin\xi_2\sin\xi_3$ не дает непосредственно α, β, γ, выраженных через ξ_1, ξ_2, ξ_3 (ξ_1 — сферическая координата r, ξ_2 — сферическая координата θ, ξ_3 — сферическая координата φ).

Необходимая нам связь обычно устанавливается при помощи элемента дуги. Длина ds бесконечно малого вектора дается в ортогональной системе координат формулой

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=\sum_n h_n^2\,d\xi_n^2.$$

Простая подстановка показывает, что

$$h_n^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi_n}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi_n}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi_n}\right)^2=\left[\left(\frac{\partial\xi_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi_n}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi_n}{\partial z}\right)^2\right]^{-1}. \qquad (1.3.4)$$

Величина h_n называется *коэффициентом Ламе* (масштабным множителем) для координаты ξ_n. Изменению $d\xi_n$ этой координаты соответствует смещение $h_n d\xi_n$ *см* вдоль координатной линии. В общем случае h_n изменяется от точки к точке.

Отметим, что для вывода выражений коэффициентов h через координаты ξ необходимо выразить старые координаты x, y, z через новые ξ_1, ξ_2, ξ_3, как это было сделано выше для сферических координат. Такой способ записи соотношений между двумя координатными системами является, как правило, наиболее целесообразным.

Так как $h_n d\xi_n$ представляет собой величину смещения, соответствующего $d\xi_n$, то скорость смещения вдоль ξ_n-линии при перемещении точки параллельно оси x равна $h_n\,\partial\xi_n/\partial x$. Эта величина равна, следовательно, направляющему косинусу $\alpha_n=\gamma_{n1}$. Аналогично, если x выразить через ξ, то скорость смещения вдоль оси x относительно смещения вдоль ξ_n-линии будет равна $(1/h_n)(\partial x/\partial\xi_n)$, что также равно $\gamma_{n1}=\alpha_n$. Таким образом, направляющие косинусы осей ξ_n относительно осей x, y, z могут быть выражены через производные ξ по x, y, z или через производные x, y, z, по ξ:

$$\gamma_{n1}=\alpha_n=\frac{1}{h_n}\frac{\partial x}{\partial\xi_n}=h_n\frac{\partial\xi_n}{\partial x},\quad \gamma_{n2}=\beta_n=\frac{1}{h_n}\frac{\partial y}{\partial\xi_n}=h_n\frac{\partial\xi_n}{\partial y},$$
$$\gamma_{n3}=\gamma_n=\frac{1}{h_n}\frac{\partial z}{\partial\xi_n}=h_n\frac{\partial\xi_n}{\partial z}, \qquad (1.3.5)$$

в зависимости от того, выражены ли x, y, z через ξ или ξ — через x, y, z.

Соотношения (1.3.5) полезны, но применяются не так часто, как этого можно было бы ожидать. Интересно отметить, что все дифференциальные выражения, которые мы далее получим и будем в дальнейшем неоднократно применять, требуют для их вычисления в обобщенной си-

стеме координат только коэффициентов h, но не γ. Очевидно, что масштаб новых координат и изменение масштаба от точки к точке выражают существенные свойства координат. Направления же координатных

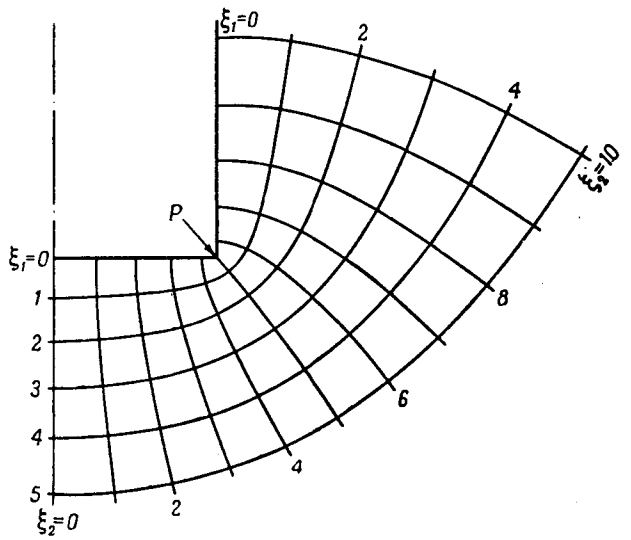

Рис. 1.10. Ортогональная система координат с переменными коэффициентами Ламе h. В данном случае $h_1=h_2$ всюду, а в точке P—точке концентрации системы—$h_1=h_2=0$.

линий в данной точке по отношению к осям x, y, z играют сравнительно меньшую роль.

Кривизна координатных линий. Например, даже изменение направления единичных векторов **a** может быть выражено через коэффициенты h. Выражения для этих изменений подсказываются рис. 1.11.

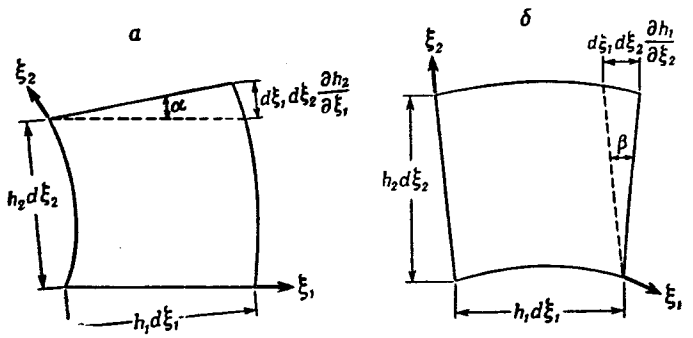

Рис. 1.11. Изменение направления единичных векторов $\mathbf{a}_n$.

Из рис. 1.11, *а* мы видим, что изменение $\mathbf{a}_1$, соответствующее изменению ξ_2, равно $\mathbf{a}_2\,\alpha$, где

$$\alpha = \frac{d\xi_1}{h_1}\frac{d\xi_2}{d\xi_1}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_1},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \xi_2} = \frac{\mathbf{a}_2}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}.$$

Аналогично из рис. 1.11, *б* находим, что изменение $\mathbf{a}_1$, соответствующее изменению ξ_1, имеет составляющую в направлении ξ_2, равную

$$-\beta = -\frac{d\xi_1}{h_2}\frac{d\xi_2}{d\xi_2}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_2},$$

и аналогичную составляющую в направлении ξ_3. Таким образом, мы приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \xi_1} = -\frac{\mathbf{a}_2}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} - \frac{\mathbf{a}_3}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_3}, && \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \xi_2} = \frac{\mathbf{a}_2}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}, && \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \xi_3} = \frac{\mathbf{a}_3}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial \xi_1},\\
&\frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial \xi_2} = -\frac{\mathbf{a}_3}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_3} - \frac{\mathbf{a}_1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}, && \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial \xi_3} = \frac{\mathbf{a}_3}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial \xi_2}, && \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial \xi_1} = \frac{\mathbf{a}_1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_2},\\
&\frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial \xi_3} = -\frac{\mathbf{a}_1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial \xi_1} - \frac{\mathbf{a}_2}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial \xi_2}, && \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial \xi_1} = \frac{\mathbf{a}_1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_3}, && \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial \xi_2} = \frac{\mathbf{a}_2}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_3}.
\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Мы можем доказать справедливость этих формул, выражая **a** через **i**, **j**, **k**, производя соответствующие дифференцирования и используя определения коэффициентов h из равенств (1.3.4). Например,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left[\frac{\mathbf{i}}{h_1}\frac{\partial x}{\partial \xi_1} + \frac{\mathbf{j}}{h_1}\frac{\partial y}{\partial \xi_1} + \frac{\mathbf{k}}{h_1}\frac{\partial z}{\partial \xi_1}\right] =\\
&= h_1\mathbf{a}_1\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{1}{h_1}\right) + \frac{1}{h_1}\left[\mathbf{i}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \mathbf{j}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \mathbf{k}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right] =\\
&= -\mathbf{a}_1\frac{\partial \ln h_1}{\partial \xi_2} + \frac{1}{h_1}\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\left[\frac{\mathbf{a}_1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial \xi_1} + \frac{\mathbf{a}_2}{h_2}\frac{\partial x}{\partial \xi_2} + \frac{\mathbf{a}_3}{h_3}\frac{\partial x}{\partial \xi_3}\right] + \right.\\
&\left. + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\left[\frac{\mathbf{a}_1}{h_1}\frac{\partial y}{\partial \xi_1} + \frac{\mathbf{a}_2}{h_2}\frac{\partial y}{\partial \xi_2} + \frac{\mathbf{a}_3}{h_3}\frac{\partial y}{\partial \xi_3}\right] + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\left[\frac{\mathbf{a}_1}{h_1}\frac{\partial z}{\partial \xi_1} + \frac{\mathbf{a}_2}{h_2}\frac{\partial z}{\partial \xi_2} + \frac{\mathbf{a}_3}{h_3}\frac{\partial z}{\partial \xi_3}\right]\right\},
\end{aligned}$$

или [1])

$$\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \xi_2} = -\mathbf{a}_1\frac{\partial \ln h_1}{\partial \xi_2} + \frac{\mathbf{a}_1}{2h_1^2}\frac{\partial h_1^2}{\partial \xi_2} + \frac{\mathbf{a}_2}{2h_1 h_2}\frac{\partial h_2^2}{\partial \xi_1} = \frac{\mathbf{a}_2}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}$$

в соответствии с приведенным выше выражением.

Кривизна координатной поверхности $\xi_1 = \text{const}$ может быть легко вычислена при помощи формул (1.3.6). Единичный вектор $\mathbf{a}_1$, перпендикулярный к поверхности, при смещении ds в направлении ξ_2-линии изменяется на $\frac{1}{h_2}\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \xi_2}ds$. Это изменение имеет направление ξ_2-линии и является мерою кривизны поверхности $\xi_1 = \text{const}$ в направлении ξ_2-линии. Точнее, величина $\mathbf{a}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \xi_2}$ обратна радиусу кривизны нормального сечения рассматриваемой поверхности в направлении ξ_2-линии в точке (ξ_1, ξ_2, ξ_3); если эта величина положительна, то ξ_2-линия в положительном направлении ξ_1 выпукла, а если она отрицательна, то вогнута.

---

[1]) Сумма коэффициентов при $\mathbf{a}_3$ равна нулю, что можно показать хотя бы при помощи дифференцирования тождеств

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_m}\frac{\partial x}{\partial \xi_n} + \frac{\partial y}{\partial \xi_m}\frac{\partial y}{\partial \xi_n} + \frac{\partial z}{\partial \xi_m}\frac{\partial z}{\partial \xi_n} = 0 \quad (m \neq n)$$

по третьему ξ. — *Прим. ред.*

Нетрудно показать, что полная кривизна поверхности $\xi_1 = \text{const}$ в точке (ξ_1, ξ_2, ξ_3) равна

$$C = -\left(\frac{\mathbf{a}_2}{h_2}\right)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \xi_2}\right) - \left(\frac{\mathbf{a}_3}{h_3}\right)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \xi_3}\right) = -\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial \xi_1}(h_2 h_3),$$

где знак указывает направление вогнутости. Эта формула и соответствующие формулы для поверхностей $\xi_2 = \text{const}$ и $\xi_3 = \text{const}$ будут в дальнейшем полезными при вычислении восстанавливающей силы искривленной поверхности в напряженном состоянии.

В качестве простого примера рассмотрим сферические координаты r, θ, φ; здесь кривизна r-поверхности равна $-2/r$, так как сфера вогнута внутрь и искривлена как в направлении θ, так и в направлени φ (чем объясняется множитель 2). Кривизна конической поверхности $\theta = \text{const}$ равна $(-1/r)\operatorname{ctg}\theta$, а плоскость $\varphi = \text{const}$ имеет кривизну нуль.

Во всяком случае, как только нам известны выражения x, y, z через новые координаты, соотношения (1.3.4) — (1.3.6) позволяют вычислить масштаб новой системы, составляющие вектора по осям этой системы, их изменения и много других важных выражений, которые будут рассмотрены ниже.

Элемент объема и другие формулы. Другой величиной, играющей важную роль в дальнейшем, является элемент объема в новой системе координат. Так как элементам $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$ соответствуют смещения $h_1 d\xi_1$, $h_2 d\xi_2$, $h_3 d\xi_3$ вдоль взаимно-перпендикулярных направлений, объем прямоугольного параллелепипеда, определенного этими дифференциалами, равен

$$dv = h_1 h_2 h_3\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \tag{1.3.7}$$

Это — элемент объема в новой системе координат. Он, конечно, всегда положителен.

Для примера рассмотрим упомянутую выше сферическую систему координат $x = \xi_1 \sin\xi_2 \cos\xi_3$, $y = \xi_1 \sin\xi_2 \sin\xi_3$, $z = \xi_1 \cos\xi_2$. Для коэффициентов Ламе находим следующие выражения:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \xi_1, \quad h_3 = \xi_1 \sin\xi_2.$$

Направляющие косинусы единичных векторов в направлении сферических осей поэтому равны

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \sin\xi_2 \cos\xi_3, && \alpha_2 = \cos\xi_2 \cos\xi_3, && \alpha_3 = -\sin\xi_3, \\ &\beta_1 = \sin\xi_2 \sin\xi_3, && \beta_2 = \cos\xi_2 \sin\xi_3, && \beta_3 = \cos\xi_3, \\ &\gamma_1 = \cos\xi_2, && \gamma_2 = -\sin\xi_2, && \gamma_3 = 0. \end{aligned}$$

Они удовлетворяют соотношениям ортогональности, приведенным на стр. 33.

Элемент объема в новой системе координат $dv = \xi_1^2 \sin\xi_2 \cdot d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3$, а составляющие вектора по направлениям новых осей равны

$$\begin{aligned} F_1 &= F_x \sin\xi_2 \cos\xi_3 + F_y \sin\xi_2 \sin\xi_3 + F_z \cos\xi_2, \\ F_2 &= F_x \cos\xi_2 \cos\xi_3 + F_y \cos\xi_2 \sin\xi_3 - F_z \sin\xi_2, \\ F_3 &= -F_x \sin\xi_3 + F_y \cos\xi_3. \end{aligned}$$

Если функции F_x, F_y, F_z выражены через ξ_1, ξ_2, ξ_3, то новые составляющие выражаются только через новые координаты и преобразование будет завершено.

Вращение осей. Другим примером преобразования координат является тот случай, когда новая система координат, также прямоугольная,

повернута относительно старой на углы Эйлера θ, Φ, ψ (см. рис. 1.12). Уравнения преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} x &= (\sin\psi\sin\Phi + \cos\psi\cos\Phi\cos\theta)\,\xi_1 + \\ &\qquad + (\cos\psi\sin\Phi - \sin\psi\cos\Phi\cos\theta)\,\xi_2 + \sin\theta\cos\Phi\,\xi_3, \\ y &= (\sin\psi\cos\Phi - \cos\psi\sin\Phi\cos\theta)\,\xi_1 + \\ &\qquad + (\cos\psi\cos\Phi + \sin\psi\sin\Phi\cos\theta)\,\xi_2 - \sin\theta\sin\Phi\,\xi_3, \\ z &= -\cos\psi\sin\theta\,\xi_1 + \sin\psi\sin\theta\,\xi_2 + \cos\theta\,\xi_3. \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

Коэффициенты Ламе в этом случае все равны единице, как и следовало ожидать, так как это преобразование не изменяет масштаба осей.

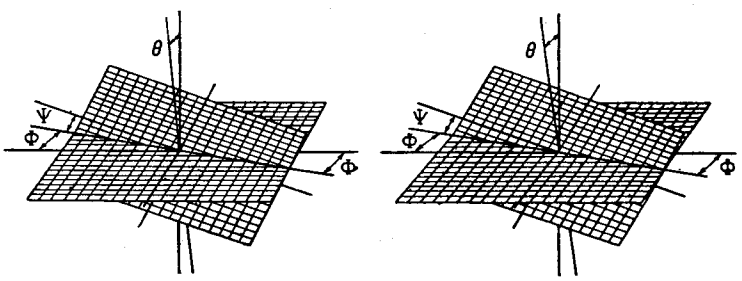

Рис 1.12. Вращение осей с указанием углов Эйлера.

Направляющие косинусы для этого преобразования являются коэффициентами линейных уравнений (1.3.8)

$$\alpha_1 = \sin\psi\sin\Phi + \cos\psi\cos\Phi\cos\theta \quad \text{и т. д.},$$
$$\beta_1 = \sin\psi\cos\Phi - \cos\psi\sin\Phi\cos\theta \quad \text{и т. д.}$$

При помощи этих направляющих косинусов можно получить формулы преобразования вектора.

Законы преобразования векторов. Мы видели, что для того, чтобы три функции точки могли служить тремя составляющими некоторого вектора, они должны преобразовываться в соответствии с правилами, содержащимися в соотношениях (1.3.3) и (1.3.5). Если мы преобразуем составляющие из одной криволинейной системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 с коэффициентами Ламе h_1, h_2, h_3 к другой системе ξ_1', ξ_2', ξ_3' с коэффициентами Ламе h_1', h_2', h_3', то составляющие в новой системе должны выражаться через составляющие в старой системе формулами

$$F_n' = \sum_m \gamma_{nm} F_m, \tag{1.3.9}$$

где

$$\frac{h_m}{h_n'}\frac{\partial\xi_m}{\partial\xi_n'} = \gamma_{nm} = \frac{h_n'}{h_m}\frac{\partial\xi_n'}{\partial\xi_m}.$$

Так как $h_m\,d\xi_m$ и $h_n'\,d\xi_n'$ являются расстояниями в сантиметрах, то новые составляющие F_n' измерены в тех же единицах, что и старые. Если мы, развивая какую-либо новую теорию, найдем, что некоторые три величины преобразуются согласно соотношениям (1.3.9), то мы можем быть вполне уверены, что найдены составляющие некоторого вектора.

Здесь уместно исследовать преобразование векторного произведения $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$. Вспомним, что на стр. 21 было отмечено, что $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ не является

истинным вектором. Сейчас мы увидим, почему это так. Используя соотношения (1.3.9), мы найдем, что составляющая $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ по ξ_1' равна

$$(\mathbf{A}'\times\mathbf{B}')_1 = A_2'B_3' - A_3'B_2' = \sum_{m,n} (\gamma_{2m}\gamma_{3n} - \gamma_{3m}\gamma_{2n}) A_m B_n =$$

$$= \sum_{m>n} (\gamma_{2m}\gamma_{3n} - \gamma_{3m}\gamma_{2n}) (A_m B_n - A_n B_m). \qquad (1.3.10)$$

Используя соотношения (1.3.2) (легко видеть, что эти соотношения остаются в силе и для рассматриваемых здесь общих преобразований, лишь бы обе системы были ортогональны), мы находим, что

$$(\mathbf{A}'\times\mathbf{B}')_1 = \pm \sum_n (\mathbf{A}\times\mathbf{B})_n \gamma_{1n}, \qquad (1.3.11)$$

где знак плюс имеет место, если обе системы правые или обе левые, а знак минус — если одна из них правая, а другая левая [кроме того, равенства (1.3.11) справедливы только для ортогональных систем].

Отсюда следует, что $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ — аксиальный вектор.

Равенство (1.3.9) также дает нам способ легко различать истинные и аксиальные векторы, так как они ведут себя по-разному при преобразовании правой системы в левую. Простым примером такого преобразования является *изменение направления осей* (инверсия) $\xi_1 = -x$, $\xi_2 = -y$, $\xi_3 = -z$. Если составляющие истинного вектора суть A_x, A_y, A_z, то $A_1 = -A_x$, $A_2 = -A_y$, $A_3 = -A_z$, т. е. составляющие истинного вектора при таком преобразовании меняют знак. С другой стороны, для аксиального вектора $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ при этом перемены знака не произойдет, так что составляющие аксиального вектора при изменении направления всех осей на обратные не меняют знака.

Аналогично истинный скаляр, или инвариант, примером которого является $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, не изменяется при изменении направления всех осей на обратные. С другой стороны, псевдоскаляр, как например $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$, при этом меняет свой знак на обратный.

Использование соотношений (1.3.9) для установления того, являются ли три величины составляющими некоторого вектора или нет, может оказаться весьма громоздким. Другой способ заключается в использовании инвариантов, образованных при помощи этих величин. Например, если $\sum A_i B_i$ является инвариантом, а B_i суть составляющие истинного вектора, то и A_i должны быть составляющими истинного вектора. Несколько примеров приложений этого метода встретятся нам дальше в этой же главе.

Контравариантные и ковариантные векторы. Существуют еще два способа записи составляющих вектора, которые иногда используются, состоящие в применении разных «единичных векторов» для разложения $\mathbf{F}$ на составляющие. Допустим, что «единичные векторы» определены как векторы $\hat{\mathbf{a}}_n = h_n \mathbf{a}_n$ переменной длины, так что $\hat{\mathbf{a}}_n$ соответствует единичному изменению ξ_n, а не имеет длину в 1 *см* (как $\mathbf{a}_n$). Вектор $\mathbf{F}$ через эти новые «единичные векторы» может быть записан в виде

$$\mathbf{F} = \sum_n f^n \hat{\mathbf{a}}_n, \quad f^n = \frac{F_n}{h_n}.$$

В этом случае новые «составляющие» преобразуются по формулам

$$(f^n)' = \sum_m f^m \frac{\partial \xi_n'}{\partial \xi_m} = \sum_m f^m \left(\frac{h_m}{h_n'}\right)^2 \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi_n'}. \qquad (1.3.12)$$

Величины f^n называются *контравариантными* составляющими вектора в системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3. Они отличаются от «фактических» составляющих множителем, обратным коэффициенту Ламе; они дают вектор только в том случае, когда эти составляющие умножаются на «единичный вектор» $\mathbf{a}_n = h_n \mathbf{a}_n$.

Если рассматривать «единичные векторы» $\hat{\mathbf{a}}^n = \mathbf{a}_n / h_n$ вдоль координатных линий с масштабом, обратным координатному, то соответствущие «составляющие» будут

$$f_n = h_n F_n, \quad \mathbf{F} = \sum_n f_n \hat{\mathbf{a}}^n,$$

и в этом случае f_n преобразуется по формулам:

$$(f_n)' = \sum_m f_m \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi_n'} = \sum_m f_m \left(\frac{h_n'}{h_m} \right)^2 \frac{\partial \xi_n'}{\partial \xi_m}. \tag{1.3.13}$$

Величины f_n называются *ковариантными* составляющими вектора в системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Эти формулы преобразований обладают несколько большей формальной симметрией, нежели формулы (1.3.9) для обычных составляющих, так как коэффициенты h не входят под знаком суммы хотя бы в одно из выражений (1.3.12) и (1.3.13). Это сомнительное преимущество часто сводится на нет тем фактом, что новые составляющие не обязательно сохраняют свою размерность при переходе от одной координаты к другой. Например, в сферических координатах, если $\mathbf{F}$ имеет размерность длины, составляющие F_r, F_ϑ, F_φ после преобразования все еще имеют размерность длины, тогда как f^ϑ и f^φ безразмерны, а f_ϑ и f_φ имеют размерность площади.

Мы вернемся к этим обозначениям позже, когда будем говорить о тензорах. Там мы обнаружим, что составляющие f полезны в предварительных рассмотрениях задачи, когда формальная симметрия их формул преобразования может упростить выкладки. Но когда приходится проводить подробные вычисления, то, как правило, оказывается проще использовать «фактические» составляющие F_n, которые всегда имеют ту же размерность, что и $\mathbf{F}$, и единичные векторы $\mathbf{a}_n$, которые всегда имеют единичную длину.

1.4. Дифференциальный оператор ∇

После того как мы рассмотрели основные принципы преобразований координат и указали, как можно распознавать скаляры и векторы по их формулам преобразований, можно перейти к изучению общих дифференциальных свойств векторов. Выше мы изучали свойства в целом или макроскопические свойства векторных полей при помощи поверхностных и криволинейных интегралов. Теперь мы хотим подробно изучить их микроскопические свойства. По аналогии с дифференциальным оператором d/dx, который, действуя на скалярную функцию $\varphi(x)$, переводит ее в производную, выражающую наклон графика φ, мы имеем дифференциальный оператор, действующий по всем трем координатам, который, будучи приложен к скалярным или векторным полям, переводит их в другие поля. Получаемые таким образом поля являются мерою скорости изменения исходного поля от точки к точке.

Градиент. Скорость изменения скаляра $\psi(x, y, z)$ изображается вектором, направление которого совпадает с направлением наискорейшего возрастания ψ, а величина равна этой максимальной скорости