Величины f^n называются *контравариантными* составляющими вектора в системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3. Они отличаются от «фактических» составляющих множителем, обратным коэффициенту Ламе; они дают вектор только в том случае, когда эти составляющие умножаются на «единичный вектор» $\mathbf{a}_n = h_n \mathbf{a}_n$.

Если рассматривать «единичные векторы» $\hat{\mathbf{a}}^n = \mathbf{a}_n / h_n$ вдоль координатных линий с масштабом, обратным координатному, то соответствущие «составляющие» будут

$$f_n = h_n F_n, \quad \mathbf{F} = \sum_n f_n \hat{\mathbf{a}}^n,$$

и в этом случае f_n преобразуется по формулам:

$$(f_n)' = \sum_m f_m \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi_n'} = \sum_m f_m \left(\frac{h_n'}{h_m} \right)^2 \frac{\partial \xi_n'}{\partial \xi_m}. \tag{1.3.13}$$

Величины f_n называются *ковариантными* составляющими вектора в системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Эти формулы преобразований обладают несколько большей формальной симметрией, нежели формулы (1.3.9) для обычных составляющих, так как коэффициенты h не входят под знаком суммы хотя бы в одно из выражений (1.3.12) и (1.3.13). Это сомнительное преимущество часто сводится на нет тем фактом, что новые составляющие не обязательно сохраняют свою размерность при переходе от одной координаты к другой. Например, в сферических координатах, если $\mathbf{F}$ имеет размерность длины, составляющие F_r, F_ϑ, F_φ после преобразования все еще имеют размерность длины, тогда как f^ϑ и f^φ безразмерны, а f_ϑ и f_φ имеют размерность площади.

Мы вернемся к этим обозначениям позже, когда будем говорить о тензорах. Там мы обнаружим, что составляющие f полезны в предварительных рассмотрениях задачи, когда формальная симметрия их формул преобразования может упростить выкладки. Но когда приходится проводить подробные вычисления, то, как правило, оказывается проще использовать «фактические» составляющие F_n, которые всегда имеют ту же размерность, что и $\mathbf{F}$, и единичные векторы $\mathbf{a}_n$, которые всегда имеют единичную длину.

1.4. Дифференциальный оператор ∇

После того как мы рассмотрели основные принципы преобразований координат и указали, как можно распознавать скаляры и векторы по их формулам преобразований, можно перейти к изучению общих дифференциальных свойств векторов. Выше мы изучали свойства в целом или макроскопические свойства векторных полей при помощи поверхностных и криволинейных интегралов. Теперь мы хотим подробно изучить их микроскопические свойства. По аналогии с дифференциальным оператором d/dx, который, действуя на скалярную функцию $\varphi(x)$, переводит ее в производную, выражающую наклон графика φ, мы имеем дифференциальный оператор, действующий по всем трем координатам, который, будучи приложен к скалярным или векторным полям, переводит их в другие поля. Получаемые таким образом поля являются мерою скорости изменения исходного поля от точки к точке.

Градиент. Скорость изменения скаляра $\psi(x, y, z)$ изображается вектором, направление которого совпадает с направлением наискорейшего возрастания ψ, а величина равна этой максимальной скорости

возрастания. Мы уже указывали [см. формулу (1.1.1)], что изменение ψ при переходе из точки с радиусом-вектором $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ в соседнюю точку $\mathbf{A} + d\mathbf{s}$, где элементарное смещение $d\mathbf{s} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$, равно $d\psi = d\mathbf{s} \cdot \operatorname{grad} \cdot \psi$, причем

$$\operatorname{grad} \psi = \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{k}. \tag{1.4.1}$$

Если $d\mathbf{s}$ лежит на поверхности уровня $\psi = \text{const}$, то $d\psi$ должно быть равно нулю, так что вектор $\operatorname{grad} \psi$ должен быть перпендикулярен к поверхности уровня. Максимальное значение $d\psi$ соответствует $d\mathbf{s}$, перпендикулярному к этой поверхности, и в этом случае (как уже было отмечено выше)

$$d\psi = \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}\, ds.$$

Величина, обозначаемая символами $\operatorname{grad} \psi$ или $\nabla \psi$ (читается «*набла*» ψ), является, таким образом, мерой скорости изменения скалярного поля ψ в точке (x, y, z). Для того чтобы показать, что она является действительно вектором, мы должны установить, что она преобразуется в соответствии с формулами (1.3.9). Это нетрудно сделать, так как очевидно, что выражение градиента в криволинейных координтах ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеет вид

$$\operatorname{grad} \psi = \nabla \psi = \frac{\mathbf{a}_1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} + \frac{\mathbf{a}_2}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} + \frac{\mathbf{a}_3}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3}. \tag{1.4.2}$$

Если мы теперь преобразуем это выражение к другой системе координат ξ_1', ξ_2', ξ_3', предполагая, что оно является вектором, мы придем к той же форме в новых координатах, что и в старых. В самом деле, используя соотношения (1.3.9) и тождества

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi_n'} = \sum_m \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi_n'},$$

мы получим

$$\nabla \psi = \sum_m \frac{\mathbf{a}_m}{h_m} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} = \sum_n \mathbf{a}_n' \sum_m \left(\frac{1}{h_m} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m}\right)\left(\frac{h_m}{h_n'} \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi_n'}\right) = \sum_n \frac{\mathbf{a}_n'}{h_n'} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n'},$$

как и должно быть, если $\operatorname{grad} \psi$ есть вектор, выражаемый в любой системе ортогональных координат формулой (1.4.2).

Отметим, что $\operatorname{grad} \psi$ является истинным, а не аксиальным вектором. Это доказывается тем фактом, что $d\psi = \operatorname{grad} \psi \cdot d\mathbf{s}$ является истинным скалярным инвариантом.

Так как $d\mathbf{s}$ — истинный вектор, $\operatorname{grad} \psi$ также должен быть истинным вектором. Заметим также, что циркуляция градиента равна нулю

$$\oint \operatorname{grad} \psi \cdot d\mathbf{s} = \oint d\psi = 0.$$

То обстоятельство, что циркуляция градиента всегда равна нулю, уже было отмечено на стр. 28.

Это краткое рассмотрение служит для того, чтобы подчеркнуть тот факт, что если мы выражаем некоторую «физическую» величину через коэффициенты Ламе h в системе координат ξ, то в другой системе координат ξ' она должна выразиться формулой *того же вида* через коэффициенты h'.

Производная по направлению. В наших уравнениях будет иногда встречаться величина $\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad} \psi$. Если $\mathbf{B}$ — единичный вектор, эта величина называется *производной* ψ *по направлению* единичного вектора $\mathbf{B}$; она пред-

ставляет собой скорость изменения ψ в направлении **B**. Независимо от того, является ли **B** единичным вектором или нет,

$$\mathbf{B}\cdot\operatorname{grad}\psi=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\psi=B_x\frac{\partial\psi}{\partial x}+B_y\frac{\partial\psi}{\partial y}+B_z\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{B_1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}+\frac{B_2}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2}+\frac{B_3}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_3}.$$

Скалярный оператор $(\mathbf{B}\cdot\nabla)=(\mathbf{B}\cdot\operatorname{grad})$ может быть также приложен к вектору, что дает

$$(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{A}=(\mathbf{B}\cdot\operatorname{grad})\,\mathbf{A}=\mathbf{i}\,(\mathbf{B}\cdot\operatorname{grad}\mathrm{A}_x)+\mathbf{j}\,(\mathbf{B}\cdot\operatorname{grad}\mathrm{A}_y)+\mathbf{k}\,(\mathbf{B}\cdot\operatorname{grad}\mathrm{A}_z).$$

В криволинейных координатах это выражение становится более сложным, потому что единичные векторы **a** также являются переменными [см. формулы (1.3.6)]. Используя формулы (1.3.6), можно найти, что ξ_1-составляющая рассматриваемого вектора равна

$$[(\mathbf{B}\cdot\operatorname{grad})\,\mathbf{A}]_1=\frac{B_1}{h_1}\frac{\partial A_1}{\partial\xi_1}+\frac{B_2}{h_2}\frac{\partial A_1}{\partial\xi_2}+\frac{B_3}{h_3}\frac{\partial A_1}{\partial\xi_3}+$$
$$+\frac{A_2}{h_1h_2}\left[B_1\frac{\partial h_1}{\partial\xi_2}-B_2\frac{\partial h_2}{\partial\xi_1}\right]+\frac{A_3}{h_1h_3}\left[B_1\frac{\partial h_1}{\partial\xi_3}-B_3\frac{\partial h_3}{\partial\xi_1}\right]. \qquad (1.4.3)$$

Остальные составляющие получаются из этой формулы круговой подстановкой индексов. Первые три слагаемых в правой части формулы (1.4.3) в сумме равны $\mathbf{B}\cdot\operatorname{grad}\mathrm{A}_1$; остальные слагаемые являются поправками, возникающими вследствие того, что направления новых осей меняются от точки к точке.

Элементарные повороты. Один из типов преобразований координат, который будет представлять для нас в дальнейшем особый интерес, получается в результате бесконечно малого вращения прямоугольной декартовой системы координат вокруг некоторой оси, проходящей через начало. Предположим, что вектор $\mathbf{d\omega}$ по величине равен углу вращения (выраженному в радианах), а по направлению совпадает с осью вращения и указывает в сторону поступательного движения правого винта, вращаемого вместе с координатной системой. Точка с радиус-вектором $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ при вращении с системой координат получит смещение, представляемое вектором $\mathbf{d\omega}\times\mathbf{r}=-\mathbf{r}\times\mathbf{d\omega}$. Если, наоборот, точку считать фиксированной в пространстве, то ее координаты в вращаемой системе (которые мы будем снабжать штрихом) будут связаны с ее координатами в исходной системе до вращения соотношением $\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\mathbf{r}\times\mathbf{d\omega}$, или

$$x'=x+(y\,d\omega_z-z\,d\omega_y),$$
$$y'=y+(z\,d\omega_x-x\,d\omega_z),$$
$$z'=z+(x\,d\omega_y-y\,d\omega_x).$$

Мы могли бы также записать: $\mathbf{r}=\mathbf{r}'-\mathbf{r}'\times\mathbf{d\omega}$. [Эти соотношения справедливы только для очень малых поворотов; иначе мы должны применить уравнения (1.3.8), правые части которых отличаются от приведенных выше на бесконечно малые высших порядков относительно θ и $\Phi+\psi$.]

Допустим теперь, что некоторое скалярное поле ψ медленно вращается (поле может быть, например, плотностью медленно вращающегося твердого тела). Благодаря этому вращению значение поля ψ' в фиксированной точке пространства связано с значением поля ψ в этой точке до вращения соотношением

$$\psi'(x,\,y,\,z)=\psi\,(x,\,y,\,z)+(\mathbf{r}\times\mathbf{d\omega})\cdot\operatorname{grad}\psi=\psi\,(x,\,y,\,z)-(\mathbf{r}\times\nabla\psi)\cdot\mathbf{d\omega}, \qquad (1.4.4)$$

так как $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = -(\mathbf{A}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{B}$ для любой тройки векторов. Поэтому вектор $\mathbf{r}\times\nabla\psi$ является мерой воздействия на поле ψ всякого рода элементарных поворотов (инфинитезимальных вращений); чтобы получить изменение поля при элементарном повороте $d\boldsymbol{\omega}$, нужно только образовать скалярное произведение этого вектора на $d\boldsymbol{\omega}$. Если ось вращения перпендикулярна к вектору $\mathbf{r}\times\nabla\psi$, то малое вращение не отражается на ψ; если ось вращения параллельна $\mathbf{r}\times\nabla\psi$, то эффект вращения будет максимальным. Так как любое поле вида $f(r)$ инвариантно относительно вращений, то

$$\mathbf{r}\times\nabla\,[f(r)\,g(\vartheta,\varphi)] = f(r)\,[\mathbf{r}\times\nabla g(\vartheta,\varphi)].$$

Дивергенция. Существуют две дифференциальные операции, приложения которых к векторному полю играют важную роль. Одна приводит к скаляру, который указывает скорость изменения числа линий тока, другая — к вектору, характеризующему степень закрученности линий тока.

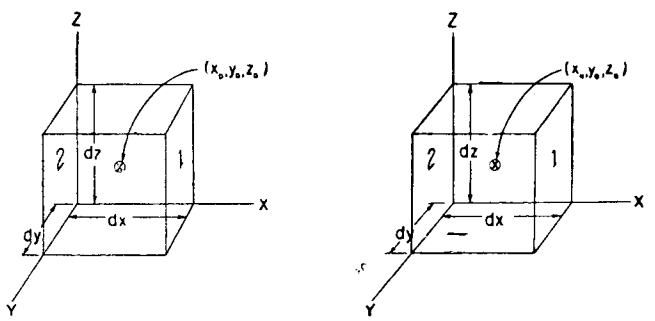

Рис. 1.13. Поток вектора и дивергенция векторного поля.

Первая операция может быть получена предельным переходом из потока вектора при стягивании замкнутой поверхности в точку, а вторая — аналогичным процессом, примененным к циркуляции.

Чтобы получить указанный скаляр, мы сначала вычислим поток вектора $\mathbf{F}$ изнутри элемента объема $dx\,dy\,dz$ с центром в точке (x_0, y_0, z_0). Разлагая в ряд Тейлора x-составляющую $\mathbf{F}$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), найдем

$$F_x = F_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F_x}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F_x}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F_x}{\partial z}(z - z_0) + \ldots .$$

[Здесь $\partial F_x/\partial x$ и т. д. обозначают значения производных в точке $(x_0, y_0\, z_0)$.] Поверхностный интеграл нормальной составляющей $\mathbf{F}$ по грани 1 (см. рис. 1.13) равен

$$\iint\limits_1 F_x dA = dy\,dz\left[F_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}dx\right] +$$

$$+ \text{высшие степени дифференциалов.}$$

Поверхностный интеграл по грани 2 равен

$$-\iint\limits_2 F_x dA = -dy\,dz\left[F_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}dx\right] +$$

$$+ \text{высшие степени дифференциалов,}$$

причем знак минус перед интегралом и перед скобками объясняется тем, что интегрируется составляющая $\mathbf{F}$ по направлению внешней нормали,

которая на грани 2 равна $-F_x$. Сумма поверхностных интегралов по этим двум граням поэтому просто равна $(\partial F_x/\partial x)\,dx\,dy\,dz$, если не считать величин высших порядков малости. Аналогичные выражения получатся для двух других пар противоположных граней, так что с точностью до величин высших порядков малости

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Это выражение является векторным аналогом дифференциала du скалярной функции $u(x)$ одной переменной x. Аналогом производной является поток, отнесенный к единице объема в точке (x, y, z). Эта скалярная величина называется *дивергенцией* вектора $\mathbf{F}$ в точке (x, y, z) и обозначается через

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \lim_{\text{объем}\to 0} \frac{\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}}{\text{объем}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla\cdot\mathbf{F}. \qquad (1.4.5)$$

Дивергенция равна скорости возрастания числа линий тока, отнесенной к единице объема.

В соответствии с приведенным основным определением, дивергенция поля $\mathbf{F}$ в точке P является свойством поля $\mathbf{F}$, характеризующим его

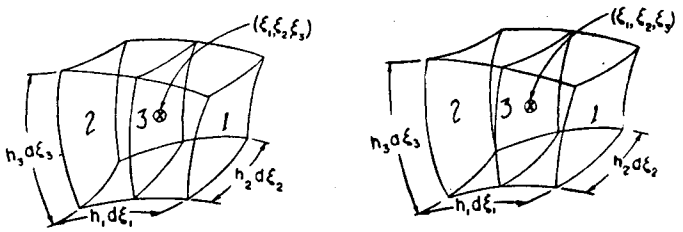

Рис. 1.14. Поток и дивергенция в криволинейных координатах.

поведение в окрестности P; значение дивергенции не должно зависеть от выбора системы координат. Можно, конечно, предполагать, что выражение оператора дивергенции в обобщенных криволинейных координатах будет иметь математическую *форму*, отличную от его выражения в декартовых координатах; тем не менее численное значение $\operatorname{div}\mathbf{F}$ в точке P должно быть одним и тем же в любых системах координат. Если преобразование координат состоит только в повороте и не связано с растяжением или сжатием (т. е. если все h равны единице), то не только значение дивергенции, но и форма ее выражения должна оставаться неизменной. В конечном счете это и понимается под скалярным инвариантом.

Для того чтобы найти выражение дивергенции в обобщенных координатах, рассмотренных на стр. 34, мы вернемся к основному определению $\operatorname{div}\mathbf{F}$ и вычислим поток изнутри элемента объема, определенного элементарными смещениями $h_n d\xi_n$ в новой системе. Поток через грань 1 (см. рис. 1.14) равен

$$d\xi_2 d\xi_3 \left\{F_1 h_2 h_3 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}(F_1 h_2 h_3)\right] d\xi_1\right\}.$$

Мы должны были учесть коэффициенты h_2h_3 под знаком производной во втором слагаемом вследствие того, что поток через грань 1 отличается от потока через сечение 3, проходящее через центр (ξ_1, ξ_2, ξ_3) элемента, как благодаря тому, что F_1 изменяется с изменением ξ_1, так и благодаря

тому, что в криволинейных координатах площадь грани 1 отличается от площади грани 3; именно, h_2h_3 также зависит от ξ_1. Поэтому оба коэффициента должны быть включены под знак производной.

Поток через грань 2 равен

$$-d\xi_2 d\xi_3 \left\{ F_1 h_2 h_3 - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}(F_1 h_2 h_3)\right] d\xi_1 \right\},$$

а поток через обе грани, следовательно, равен

$$d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_1}(F_1 h_2 h_3).$$

Таким образом, дивергенция $\mathbf{F}$ в обобщенных координатах равна

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}}{dV} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}(F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}(F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}(F_3 h_1 h_2)\right], \quad (1.4.6)$$

где $dV = h_1 h_2 h_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ — объем элементарного параллелепипеда.

Это выражение, конечно, отлично по форме от выражения (1.4.5) в декартовых координатах. Для того чтобы показать, что оба эти выражения принимают одно и то же значение в данной точке, мы прибегнем к прямому преобразованию первого из них во второе, используя для этого уравнения преобразования, приведенные на стр. 33—35. Выразим F_x, F_y, F_z через F_1, F_2, F_3 по формулам (1.3.3) и (1.3.5). После вычисления некоторых производных и перегруппировки членов, мы найдем, что,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} &= \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi_1}\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi_1}\frac{\partial F_1}{\partial z}\right] + \\
&+ \frac{1}{h_2}\left[\frac{\partial x}{\partial \xi_2}\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi_2}\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi_2}\frac{\partial F_2}{\partial z}\right] + \frac{1}{h_3}[\cdots] + \\
&+ F_1\left[\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\frac{\partial (1/h_1)}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi_1}\frac{\partial (1/h_1)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi_1}\frac{\partial (1/h_1)}{\partial z}\right] + F_2[\cdots] + F_3[\cdots] + \\
&+ \frac{F_1}{h_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi_1}\right] + \frac{F_2}{h_2}[\cdots] + \frac{F_3}{h_3}[\cdots].
\end{aligned}$$

Выражения, заключенные в первые и четвертые скобки, могут быть приведены к более простому виду, если учесть, что

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi_1}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi_1}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi_1},$$

так что соответствующие слагаемые в сумме равны

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} + F_1\frac{\partial (1/h_1)}{\partial \xi_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{F_1}{h_1}\right).$$

Выражение, заключенное в седьмые скобки, может быть развернуто с учетом того, что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi_3} \quad \text{и т. д.}$$

Используя соотношения

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \quad \text{и т. д.},$$

следующие из формул (1.3.5), и группируя слагаемые, мы найдем, что соответствующее слагаемое равно

$$\frac{F_1}{h_1}\left[\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial y}{\partial \xi_1}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial z}{\partial \xi_1}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\right) + \frac{1}{h_2^2}(\cdots) + \frac{1}{h_3^2}(\cdots)\right].$$

Но из соотношений (1.3.4), определяющих коэффициенты h, мы видим, что выражение, заключенное в первые круглые скобки, равно $\frac{1}{2}\frac{\partial h_1^2}{\partial \xi_1}$, так что все приведенное выше выражение равно

$$\frac{F_1}{2h_1}\left[\frac{1}{h_1^2}\frac{\partial h_1^2}{\partial \xi_1}+\frac{1}{h_2^2}\frac{\partial h_2^2}{\partial \xi_1}+\frac{1}{h_3^2}\frac{\partial h_3^2}{\partial \xi_1}\right]=\frac{F_1}{h_1^2h_2h_3}\frac{\partial(h_1h_2h_3)}{\partial \xi_1}.$$

Таким образом, первое, четвертое и седьмое слагаемые в исходном выражении для $\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$ в сумме дают

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{F_1}{h_1}\right)+\frac{F_1}{h_1^2h_2h_3}\frac{\partial(h_1h_2h_3)}{\partial \xi_1}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial \xi_1}(F_1h_2h_3),$$

т. е. первое слагаемое в выражении (1.4.6). Аналогично получаются и два других слагаемых в этом выражении. Тем самым преобразование закончено, и мы действительно убеждаемся в том, что div **F** в декартовых координатах имеет в любой данной точке то же значение, что и div **F**, выраженная в какой-либо другой ортогональной системе координат. Поэтому мы можем назвать div **F** *инвариантом* относительно преобразований координат.

Между прочим, этими несколько громоздкими выкладками мы показали, что поток изнутри инфинитезимальной поверхности зависит только от объема, заключенного в этой поверхности, и не зависит от ее формы, т. е. не зависит от того, имеем ли мы дело с элементом объема в декартовых или криволинейных координатах. Мы могли бы также доказать инвариантность div **F**, проверив это последнее утверждение непосредственно, не прибегая к проведенным утомительным вычислениям.

Теорема Гаусса. Свойство аддитивности потока и определение div **F** позволяют получить очень важный и полезный метод вычисления потока изнутри любой области пространства. В силу свойства аддитивности поток изнутри всей области должен быть равен сумме потоков изнутри всех элементарных областей, заключенных внутри данной области. В силу равенства (1.4.5) интегралы по элементам объема dv могут быть записаны в виде div **F** dv, так что должна иметь место важная теорема дивергенции

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}=\iiint \operatorname{div}\mathbf{F}\,dv, \tag{1.4.7}$$

где объемный интеграл распространяется на всю область, ограниченную поверхностью, по которой распространяется интегрирование в поверхностном интеграле в левой части. Равенство (1.4.7) называется *теоремой Гаусса*[1]).

Эта теорема подчеркивает тесную связь, которая должна существовать между поведением векторного поля на замкнутой поверхности и его поведением всюду внутри этой поверхности. Она соответствует довольно очевидному свойству линий тока: алгебраическое число линий тока, выходящих из замкнутой поверхности, должно быть равно числу таких линий, «начинающихся» внутри поверхности.

Решение уравнения Пуассона. Более того, сопоставление теоремы Гаусса с упоминавшимися ранее фактами относительно векторных полей

[1]) В отечественной литературе обычно применяется более правильное название «теорема Остроградского». —*Прим. ред.*

и источников [см. равенства (1.2.9)] позволяет получить полезное решение уравнения Пуассона $\nabla^2\varphi = -q(x, y, z)$ [уравнение (1.1.5)], где q — ограниченная функция x, y, z, исчезающая на бесконечности, а решение φ подчинено единственному требованию, что оно также равно нулю на бесконечности. Наводящим соображением здесь является образование векторного поля $\mathbf{F} = \operatorname{grad}\varphi$ и применение к этому полю теоремы Гаусса

$$\oint (\operatorname{grad}\varphi)\cdot d\mathbf{A} = \iiint (\nabla^2\varphi)\, dv$$

для любой области c, ограниченной замкнутой поверхностью S.

Другое наводящее соображение состоит в том, что векторное поле $(Q/r^2)\,\mathbf{a}_r$ простого источника оказывается градиентом скалярного потенциала $\varphi = -Q/r$.

Объединяя эти факты, мы можем высказать предположение, что решением уравнения Пуассона $\nabla^2\varphi = -q(x, y, z)$ является интеграл

$$\varphi(x, y, z) = \iiint \frac{q(x', y', z')}{4\pi R}\, dx'\, dy'\, dz', \tag{1.4.8}$$

где $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ есть расстояние от точки x, y, z до точки x', y', z'. Величина φ будет стремиться к нулю на бесконечности, если потребовать еще, например, чтобы $\iiint |q|\, dx\, dy\, dz < \infty$.

Чтобы доказать, что φ является решением, образуем векторное поле

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{grad}\varphi = -\iiint \frac{q(x', y', z')}{4\pi R^2}\, \mathbf{a}_R dx'\, dy'\, dz',$$

где $\mathbf{a}_R$ — единичный вектор направления от точки x', y', z' к точке x, y, z. Далее образуем поток вектора $\mathbf{F}$ изнутри замкнутой поверхности S, ограничивающей некоторую область c пространства. Используя соотношение (1.4.7), найдем, что

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \iiint_c (\nabla^2\varphi)\, dx\, dy\, dz = -\oint_S d\mathbf{A} \iiint \frac{q(x', y', z')}{4\pi R^2}\, \mathbf{a}_R\, dx'\, dy'\, dz',$$

где, конечно, $\nabla^2\varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)$. Последний интеграл распространяется на все значения x', y', z' и на все значения x, y, z на поверхности S. Порядок интегрирования может быть обращен, и мы рассмотрим сначала интегрирование по S, в котором подинтегральной функцией является

$$\frac{q(x', y', z')}{4\pi R^2}\, \mathbf{a}_R\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Применяя к интегралу потока для этой подинтегральной функции равенства (1.2.9), мы видим, что он равен $q(x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz'$, если точка x', y', z' лежит внутри S, и равен нулю, если эта точка лежит вне S. Поэтому интеграл по $dx'\, dy'\, dz'$ равен интегралу от функции q по области c, и окончательный результат представится в виде

$$\iiint_c (\nabla^2\varphi)\, dx\, dy\, dz = -\iiint_c q(x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Таким образом, мы показали, что интеграл от $\nabla^2\varphi$ по любой области c равен интегралу от $-q$ по той же области, *какой бы формы и каких бы размеров эта область ни была.*

Отсюда нетрудно заключить, что интеграл (1.4.8) является решением уравнения Пуассона $\nabla^2\varphi = -q$, где q — разумно ведущая себя функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. Это решение — не единственное, так как мы можем добавить к φ любое решение уравнения Лапласа

$\nabla^2\psi = 0$ и все равно получим решение уравнения $\nabla^2\varphi = -q$ с тем же самым q.

Характер решения ψ, которое мы добавляем, зависит от краевого условия конкретной задачи. Если φ должно стремиться к нулю на бесконечности, то ψ вообще не надо добавлять, так как φ, заданное интегралом (1.4.8), само уже стремится к нулю на бесконечности (при условии, что q ведет себя так же). Мы могли бы, конечно, попытаться найти решение уравнения Лапласа, равное нулю на бесконечности и отличное от нуля в некоторой области, но такая попытка не увенчалась бы успехом потому, что ни одно решение уравнения Лапласа не может иметь ни максимума, ни минимума (см. стр. 18), а функция, равная нулю на бесконечности и не имеющая ни максимума, ни минимума, должна быть всюду равна нулю. Следовательно, функция φ, заданная интегралом (1.4.8), является единственным решением, если краевое условие требует исчезновения на бесконечности.

При других краевых условиях решением будет сумма φ и такого решения ψ уравнения $\nabla^2\psi = 0$, что $\varphi + \psi$ удовлетворяет соответствующему краевому условию. Весь этот вопрос будет гораздо подробнее рассмотрен в гл. 7.

Ротор (вихрь). Остается рассмотреть дифференциальный оператор, который преобразует вектор в другой вектор. Этот оператор, являющийся мерой «завихренности» векторного поля, так же связан с интегралом циркуляции, рассмотренным на стр. 29, как оператор дивергенции связан с интегралом потока. Чтобы найти завихренность векторного поля в точке P, мы вычислим циркуляцию вокруг элемента площади, содержащего P, и разделим ее на площадь элемента. Нетрудно сразу же обнаружить, что в этом случае предельный переход более сложен, чем при определении дивергенции, так как результат зависит от ориентации элемента площади.

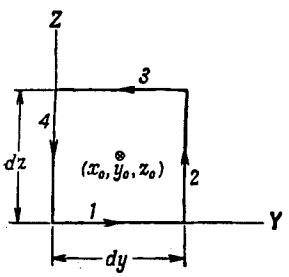

Рис. 1.15. Интеграл циркуляции и ротор векторного поля.

Например, если элемент площади перпендикулярен оси x, то интеграл циркуляции вдоль пути на рис. 1.15 равен

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \oint_1 F_y\,dy + \int_2 F_z\,dz - \int_3 F_y\,dy - \int_4 F_z\,dz =$$
$$= F_y(x_0, y_0, z_0)\,dy - \frac{\partial F_y}{\partial z}\frac{dz}{2}\,dy + F_z(x_0, y_0, z_0)\,dz + \frac{\partial F_z}{\partial y}\frac{dy}{2}\,dz -$$
$$- F_y(x_0, y_0, z_0)\,dy - \frac{\partial F_y}{\partial z}\frac{dz}{2}\,dy - F_z(x_0, y_0, z_0)\,dz + \frac{\partial F_z}{\partial y}\frac{dy}{2}\,dz =$$
$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) dy\,dz,$$

где мы использовали первые члены ряда Тейлора для F_y и F_z. С другой стороны, циркуляция вокруг элемента, перпендикулярного оси y, равна $\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) dx\,dz$ и т. д. Если элемент параллелен оси z, но образует угол θ с осью x (как показано на рис. 1.16), то вычисление циркуляции несколько сложнее. Например, смещение ds вдоль пути 1 соответствует изменению $-ds\cos\theta$ абсциссы x и изменению $ds\sin\theta$ ординаты y. Аналогично в средней точке пути $2F_z$ имеет значение

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = \frac{ds}{2}\cos\theta\cdot\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{ds}{2}\sin\theta\cdot\frac{\partial F_z}{\partial y}.$$

Принимая все это во внимание, найдем в данном случае для циркуляции выражение

$$(F_y\,ds\sin\theta - F_x\,ds\cos\theta) - \frac{dz}{2}\left(ds\sin\theta\frac{\partial F_y}{\partial z} - ds\cos\theta\frac{\partial F_x}{\partial z}\right) +$$
$$+ F_z\,dz + dz\left(\frac{ds}{2}\sin\theta\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{ds}{2}\cos\theta\frac{\partial F_z}{\partial x}\right) -$$
$$-(F_y\,ds\sin\theta - F_x\,ds\cos\theta) - \frac{dz}{2}\left(ds\sin\theta\frac{\partial F_y}{\partial z} - ds\cos\theta\frac{\partial F_x}{\partial z}\right) -$$
$$- F_z\,dz + dz\left(\frac{ds}{2}\sin\theta\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{ds}{2}\cos\theta\frac{\partial F_z}{\partial x}\right) =$$
$$= \left[\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\sin\theta + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\cos\theta\right] dz\,ds.$$

Циркуляция вокруг элемента произвольной ориентации в пространстве представляется еще более сложной формулой.

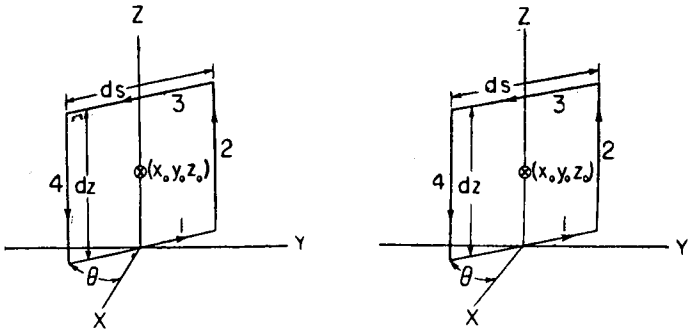

Рис. 1.16. Циркуляция под углом к оси.

Однако все значительно упрощается, если мы будем рассматривать величины

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right),\quad \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right),\quad \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

как, соответственно, x, y, z-компоненты некоторого вектора. В самом деле тогда оказывается, что циркуляция вокруг элемента площади dA равна просто составляющей этого вектора по направлению, перпендикулярному к элементу, умноженной на dA. Так, например, направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к элементу, изображенному на рис. 1.16, равны $(\sin\theta, \cos\theta, 0)$, и составляющая указанного вектора по направлению этой прямой, умноженная на $ds\,dz$, как раз и дает полученный нами выше результат.

Таким образом определенный вектор называется *ротором* (*вихрем*) $\mathbf{F}$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = \nabla\times\mathbf{F}. \qquad (1.4.9)$$

Циркуляция вокруг элемента площади dA равна, следовательно, $\mathbf{dA}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F}$, где $\mathbf{dA}$ — аксиальный вектор, соответствующий элементу площади. Вектор $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ является мерой «завихренности» поля в точке (x, y, z). Если $\mathbf{F}$ является скоростью в потоке жидкости, то направление $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ в точке P совпадает с направлением оси вращения жидкости, находящейся в окрестности P (согласованным по правилу правого винта с направлением самого вращения), а длина $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ равна удвоенной угловой скорости вращения этой части жидкости.

Ротор является оператором, аналогичным векторному произведению, так же как дивергенция аналогична скалярному произведению. Отметим,

что $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ является аксиальным вектором, если $\mathbf{F}$ — истинный вектор, так как интеграл циркуляции является скаляром, а $d\mathbf{A}$ — аксиальный вектор и, следовательно, $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ также должен быть аксиальным вектором.

Чтобы завершить наше рассмотрение, мы должны еще показать, что $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ ведет себя как вектор, т. е. преобразуется как таковой. В обобщенных координатах элемент площади, перпендикулярный к оси ξ_1, показан на рис. 1.17. Рассуждения, аналогичные тем, которые привели нас к выражению для циркуляции по пути, изображенному на рис. 1.15, показывают, что в данном случае

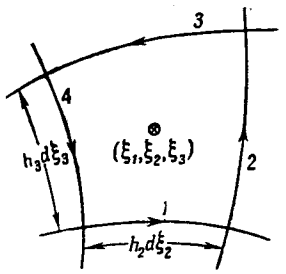

Рис. 1.17. Циркуляция и ротор в криволинейных координатах.

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \left[h_2F_2 - \frac{1}{2}d\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_2F_2)\right]d\xi_2 + \left[h_3F_3 + \frac{1}{2}d\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_3F_3)\right]d\xi_3 - \left[h_2F_2 + \frac{1}{2}d\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_2F_2)\right]d\xi_2 - \left[h_3F_3 - \frac{1}{2}d\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_3F_3)\right]d\xi_3.$$

Это выражение после упрощения и деления на площадь $h_2h_3d\xi_2d\xi_3$ дает ξ_1-составляющую ротора. Дальнейшие вычисления показывают, что выражение для ротора в обобщенных координатах имеет вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \frac{\mathbf{a}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_3F_3)}{\partial\xi_2} - \frac{\partial(h_2F_2)}{\partial\xi_3}\right] + \frac{\mathbf{a}_2}{h_1h_3}\left[\frac{\partial(h_1F_1)}{\partial\xi_3} - \frac{\partial(h_3F_3)}{\partial\xi_1}\right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial(h_2F_2)}{\partial\xi_1} - \frac{\partial(h_1F_1)}{\partial\xi_2}\right]. \qquad (1.4.10)$$

Чтобы показать, что этот вектор и вектор (1.4.9) тождественны, рассмотрим ξ_1-составляющую вектора (1.4.9) $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{C}$. По формулам (1.3.3) она равна

$$C_1 = \alpha_1C_x + \beta_1C_y + \gamma_1C_z = h_1\left[\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial\xi_1}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial\xi_1}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\right].$$

Но по формуле (1.4.10) при помощи соотношений (1.3.2) и (1.3.5) мы также находим, что

$$C_1 = \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial x}{\partial\xi_3}\frac{\partial F_x}{\partial\xi_2} - \frac{\partial x}{\partial\xi_2}\frac{\partial F_x}{\partial\xi_3} + \frac{\partial y}{\partial\xi_3}\frac{\partial F_y}{\partial\xi_2} - \frac{\partial y}{\partial\xi_2}\frac{\partial F_y}{\partial\xi_3} + \frac{\partial z}{\partial\xi_3}\frac{\partial F_z}{\partial\xi_2} - \frac{\partial z}{\partial\xi_2}\frac{\partial F_z}{\partial\xi_3}\right] =$$
$$= \frac{1}{h_2h_3}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial\xi_3}\frac{\partial z}{\partial\xi_2} - \frac{\partial y}{\partial\xi_2}\frac{\partial z}{\partial\xi_3}\right)\left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial\xi_3}\frac{\partial x}{\partial\xi_2} - \frac{\partial z}{\partial\xi_2}\frac{\partial x}{\partial\xi_3}\right)\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial\xi_3}\frac{\partial y}{\partial\xi_2} - \frac{\partial x}{\partial\xi_2}\frac{\partial y}{\partial\xi_3}\right)\left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\right] =$$
$$= h_1\left[\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial\xi_1}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial\xi_1}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\right],$$

откуда и вытекает, что формулы (1.4.9) и (1.4.10) определяют один и тот же вектор. Чтобы показать, что $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ — аксиальный вектор, когда $\mathbf{F}$ — истинный вектор, заметим, что выбор направления обхода в интеграле циркуляции вокруг элемента площади был произволен. Изменение направления этого обхода на обратное привело бы к изменению знака ротора на противоположный.

Вихревые линии. Вектор $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ определяет новое векторное поле с новыми линиями тока. Эти линии называются *вихревыми линиями*

поля **F**. Например, для поля $F_x = -ay$, $F_y = ax$, $F_z = 0$ rot **F** имеет направление орта **k** и по длине всюду равен $2a$. Линиями тока поля **F** являются окружности в плоскостях, перпендикулярных оси z. Для поля $F_x = -ay$, $F_y = ax$, $F_z = b(x^2+y^2)$, рассмотренного на стр. 23, rot **F** имеет составляющие $2by$, $-2bx$, $2a$. Мы видели, что винтовые линии тока для этого поля определяются семействами поверхностей $\varphi = \sqrt{x^2+y^2}$, $\psi = z - \frac{b}{a}(x^2+y^2)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Методами, которые мы рассматривали на стр. 25, можно установить, что вихревые линии определяются поверхностями $\varphi = \sqrt{x^2+y^2}$, $\psi = z + \frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

В обоих примерах вихревые линии всюду перпендикулярны линиям тока. Это, однако, не всегда так. Например, для поля $F_x = az$, $F_y = ax$, $F_z = ay$ rot $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ не перпендикулярен к **F**.

Вихревые линии любого поля обладают следующим очень интересным свойством: *они нигде не начинаются и нигде не кончаются*. Это соответствует рассмотренному на стр. 29 свойству вихревых трубок и может быть доказано при помощи свойств ротора. Утверждение, что линии тока нигде не начинаются и нигде не кончаются, равносильно тому, что дивергенция соответствующего векторного поля всюду равна нулю, так как тогда по формуле Гаусса (1.4.7) поток изнутри любой замкнутой поверхности равен нулю. Однако дивергенция любого ротора равна нулю, так как по самому определению

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = \frac{\partial^2 F_z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z\,\partial y} = 0.$$

Поэтому простейший способ получения векторного поля с равной нулю дивергенцией состоит в образовании ротора какого-нибудь другого поля; этим приемом часто пользуются в теории электромагнетизма.

Теорема Стокса. Существует теорема о роторе, аналогичная теореме о дивергенции, выраженной формулой (1.4.7); теорема о роторе может быть выведена из его основного определения и свойства аддитивности интеграла циркуляции, установленного на стр. 31. Рассмотрим любую поверхность S, ограниченную замкнутой линией (или замкнутыми линиями) L, разобьем S на элементы dA и сложим все циркуляции вокруг этих элементов. По нашему определению ротора эта сумма может быть записана в виде $\int \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$, где $d\mathbf{A}$ — вектор, соответствующий dA, и где интегрирование производится по всей поверхности S. В соответствии с рассмотрениями на стр. 27 этот интеграл определяет число вихревых линий, пересекающих поверхность S. В то же время вследствие свойства аддитивности интеграла циркуляции $\int \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$ должен быть равен циркуляции по контуру (или контурам) L,

$$\int \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}. \tag{1.4.11}$$

Это — *теорема Стокса*; она позволяет вычислить циркуляцию по любому контуру. Она является еще одним соотношением, связывающим поведение векторного поля на границе области с его поведением внутри области; в данном случае это соотношение устанавливает, что циркуляция по контуру должна быть равна числу вихревых линий, охватываемых контуром.

Векторный оператор ∇. Так же как оператор дивергенции является аналогом скалярного произведения векторов, оператор ротора является аналогом векторного произведения. Чтобы сделать эту аналогию более совершенной, мы можем определить *векторный оператор* ∇, называемый *наблой*, с составляющими, заданными формулой

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.4.12}$$

В терминах этого оператора три дифференциальных оператора, рассмотренные в настоящем параграфе, могут быть символически записаны в виде

$$\operatorname{grad}\psi = \nabla\psi, \quad \operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F}.$$

Некоторые формулы, содержащие векторный оператор ∇, действующий на произведение двух величин, могут быть упрощены. Формулы

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\psi\Phi) &= \psi\operatorname{grad}\Phi + \Phi\operatorname{grad}\psi,\\
\operatorname{div}(a\mathbf{F}) &= a\operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\operatorname{grad}a,\\
\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B},\\
\operatorname{rot}(a\mathbf{B}) &= a\operatorname{rot}\mathbf{B} + (\operatorname{grad}a)\times\mathbf{B},\\
\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} + (\mathbf{B}\cdot\operatorname{grad})\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad})\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

легко выводятся непосредственно из определений градиента, дивергенции и ротора.

1.5. Аппарат векторного и тензорного исчисления

Аналогия между ∇ и вектором имеет, однако, лишь символический характер, так как мы не можем указать направление и длину оператора ∇ и сказать, что ∇ перпендикулярен $\mathbf{F}$, если $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, или что $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ перпендикулярен ∇, как мы могли бы, если бы ∇ был настоящим вектором; даже перпендикулярность $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}$ не обязана иметь место. Эта аналогия становится еще более слабой, если сделать попытку выразить ∇ в обобщенных координатах, так как оказывается, что для разных его применений ∇ должен иметь разные представления:

$\nabla = \mathbf{a}_1 h_1^{-1}\partial/\partial\xi_1 + \mathbf{a}_2 h_2^{-1}\partial/\partial\xi_2 + \mathbf{a}_3 h_3^{-1}\partial/\partial\xi_3$ для градиента,

$\nabla = (h_1h_2h_3)^{-1}[\mathbf{a}_1\partial(h_2h_3)/\partial\xi_1 + \mathbf{a}_2\partial(h_1h_3)/\partial\xi_2 + \mathbf{a}_3\partial(h_1h_2)/\partial\xi_3]$ для дивергенции,

а для ротора вообще нельзя указать никакого представления. Для того чтобы понять, как преобразуются эти операторы, и уметь легко составлять более сложные выражения, мы должны углубиться в аппарат тензорного исчисления.

Ковариантные и контравариантные векторы. Тензорное исчисление было создано как аппарат для эффективного решения задач дифференциальной геометрии, но этот аппарат оказался существенно полезным и при изучении общей теории относительности. Мы коснемся тензорного исчисления кратко, лишь в той мере, какая необходима для уяснения методов вычисления дифференциальных векторных операторов в криволинейных координатах. Мы будем по-прежнему рассматривать только ортогональные координаты в трехмерном пространстве, хотя тензорное исчисление достаточно мощно и для рассмотрения неортогональных координат в пространстве любого числа измерений.