Векторный оператор ∇. Так же как оператор дивергенции является аналогом скалярного произведения векторов, оператор ротора является аналогом векторного произведения. Чтобы сделать эту аналогию более совершенной, мы можем определить *векторный оператор* ∇, называемый *наблой*, с составляющими, заданными формулой

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.4.12}$$

В терминах этого оператора три дифференциальных оператора, рассмотренные в настоящем параграфе, могут быть символически записаны в виде

$$\operatorname{grad}\psi = \nabla\psi, \quad \operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F}.$$

Некоторые формулы, содержащие векторный оператор ∇, действующий на произведение двух величин, могут быть упрощены. Формулы

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\psi\Phi) &= \psi\operatorname{grad}\Phi + \Phi\operatorname{grad}\psi,\\
\operatorname{div}(a\mathbf{F}) &= a\operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\operatorname{grad}a,\\
\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B},\\
\operatorname{rot}(a\mathbf{B}) &= a\operatorname{rot}\mathbf{B} + (\operatorname{grad}a)\times\mathbf{B},\\
\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} + (\mathbf{B}\cdot\operatorname{grad})\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad})\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

легко выводятся непосредственно из определений градиента, дивергенции и ротора.

1.5. Аппарат векторного и тензорного исчисления

Аналогия между ∇ и вектором имеет, однако, лишь символический характер, так как мы не можем указать направление и длину оператора ∇ и сказать, что ∇ перпендикулярен $\mathbf{F}$, если $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, или что $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ перпендикулярен ∇, как мы могли бы, если бы ∇ был настоящим вектором; даже перпендикулярность $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}$ не обязана иметь место. Эта аналогия становится еще более слабой, если сделать попытку выразить ∇ в обобщенных координатах, так как оказывается, что для разных его применений ∇ должен иметь разные представления:

$\nabla = \mathbf{a}_1 h_1^{-1}\partial/\partial\xi_1 + \mathbf{a}_2 h_2^{-1}\partial/\partial\xi_2 + \mathbf{a}_3 h_3^{-1}\partial/\partial\xi_3$ для градиента,

$\nabla = (h_1h_2h_3)^{-1}[\mathbf{a}_1\partial(h_2h_3)/\partial\xi_1 + \mathbf{a}_2\partial(h_1h_3)/\partial\xi_2 + \mathbf{a}_3\partial(h_1h_2)/\partial\xi_3]$ для дивергенции,

а для ротора вообще нельзя указать никакого представления. Для того чтобы понять, как преобразуются эти операторы, и уметь легко составлять более сложные выражения, мы должны углубиться в аппарат тензорного исчисления.

Ковариантные и контравариантные векторы. Тензорное исчисление было создано как аппарат для эффективного решения задач дифференциальной геометрии, но этот аппарат оказался существенно полезным и при изучении общей теории относительности. Мы коснемся тензорного исчисления кратко, лишь в той мере, какая необходима для уяснения методов вычисления дифференциальных векторных операторов в криволинейных координатах. Мы будем по-прежнему рассматривать только ортогональные координаты в трехмерном пространстве, хотя тензорное исчисление достаточно мощно и для рассмотрения неортогональных координат в пространстве любого числа измерений.

В связи с соотношениями (1.3.12) и (1.3.13) мы определили составляющие контравариантных и ковариантных векторов и их законы преобразования. Если F_n — составляющие обыкновенного вектора в трехмерной ортогональной системе координат с коэффициентами Ламе h_n, то величины $f_n = h_n F_n$ называются *ковариантными* составляющими вектора в той же системе координат, а величины $f^n = F_n/h_n$ — *контравариантными* составляющими. Таким образом, если f_n — составляющие ковариантного вектора, то $f^n = f_n/h_n^2$ — соответствующие составляющие контравариантного вектора в той же системе координат.

Как мы показали [формулы (1.3.12) и (1.3.13)], правила преобразования этих векторов при переходе от системы координат ξ_n к системе ξ_n' состоят в следующем:

$$(f_m)' = \sum_n f_n \frac{\partial \xi_n}{\partial \xi_m'}, \quad (f^m)' = \sum_n f^n \frac{\partial \xi_m'}{\partial \xi_n}. \tag{1.5.1}$$

Мы уже указывали на то, что эти формулы обладают математическим преимуществом формальной симметрии, но новые «векторы» имеют ряд недостатков с точки зрения физика. Один из них состоит в разной размерности составляющих этих векторов; если обычный вектор имеет размерность длины, то составляющие соответствующего контравариантного вектора имеют размерность своей координаты, а размерность ковариантных составляющих, вообще говоря, также отлична от обеих этих размерностей.

Для контравариантных векторов индексы, обозначающие различные составляющие, ставятся наверху для того, чтобы отличить их от ковариантных составляющих. Существует, конечно, возможность смешения составляющих настоящих векторов и ковариантных векторов, так как и те и другие пишутся с нижними индексами. В нашей книге это не окажется существенным затруднением, ввиду того что мы редко рассматриваем ковариантные векторы, а там, где они встречаются, их характер специально оговаривается. Составляющая F_n без такой особой оговорки будет всегда относиться к настоящему вектору.

Величины $\partial\psi/\partial\xi_1$, $\partial\psi/\partial\xi_2$, $\partial\psi/\partial\xi_3$ являются составляющими ковариантного вектора; они должны быть разделены соответственно на h_1, h_2, h_3 для того, чтобы стать составляющими настоящего вектора, именно $\operatorname{grad}\psi$.

Величины b_{ij}, b^{ij}, b_j^i называются составляющими соответственно *ковариантного*, *контравариантного и смешанного тензора* второго порядка системе координат ξ, если они преобразуются по формулам

$$b_{ij}' = \sum_{m,\,n} b_{mn} \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi_i'} \frac{\partial \xi_n}{\partial \xi_j'}, \quad b'^{ij} = \sum_{m,\,n} b^{mn} \frac{\partial \xi_i'}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_j'}{\partial \xi_n}, \quad b_j'^i = \sum_{m,\,n} b_n^m \frac{\partial \xi_i'}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_n}{\partial \xi_j'}. \tag{1.5.2}$$

Попарные произведения составляющих двух ковариантных векторов являются составляющими ковариантного тензора. Если векторы контравариантны, то тензор также будет контравариантным. Если A_i и B_j — составляющие двух обыкновенных векторов, то $(h_i/h_j)\, A_i B_j = c_i^j$ являются составляющими смешанного тензора.

Для смешанного тензора величина $\sum_m b_m^m$, называемая *свернутым* тензором, не меняется при преобразовании координат, так как

$$\sum_n b_n'^n = \sum_{m,\,k,\,n} b_k^m \frac{\partial \xi_n'}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_n'} = \sum_{k,\,m} b_k^m \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_m} = \sum_m b_m^m.$$

Такую величину мы называли *скаляром*; она также часто называется

инвариантом. Скалярное произведение двух векторов является свернутым тензором $\sum_n A_n B_n = \sum_n \frac{h_n}{h_n} A_n B_n$ и поэтому является инвариантом.

Аксиальные векторы. При рассмотрении свойств векторного произведения мы должны учитывать ортогональность и ориентацию наших обобщенных координат. Дальнейшая разработка полученных на стр. 33 формул, выведенных из соотношений $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3$ и т. д. подобно тому, как выводятся соотношения (1.2.5), показывает, что при переходе от одной ортогональной системы к другой

$$\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial \xi'_\mu}\frac{\partial \xi_k}{\partial \xi'_\nu} - \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi'_\mu}\frac{\partial \xi_j}{\partial \xi'_\nu}\right) = \frac{h'_1 h'_2 h'_3}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial \xi'_\lambda}{\partial \xi_i},$$

причем, если обе системы — правые, тройки (i, j, k) и (λ, μ, ν) должны быть циклическими перестановками тройки (1, 2, 3). При помощи этой формулы мы находим, что для любого тензора f_{ij} величины

$$c^i = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}(f_{jk} - f_{kj}), \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ или } 2, 3, 1 \text{ или } 3, 1, 2,$$

являются составляющими контравариантного вектора, так как по формулам преобразования тензоров

$$\frac{f'_{12} - f'_{21}}{h'_1 h'_2 h'_3} = \sum_{m,n} \frac{f_{mn}}{h'_1 h'_2 h'_3}\left[\frac{\partial \xi_m}{\partial \xi'_1}\frac{\partial \xi_n}{\partial \xi'_2} - \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi'_2}\frac{\partial \xi_n}{\partial \xi'_1}\right] = \sum_n c^n \left(\frac{\partial \xi'_3}{\partial \xi_n}\right) = (c^3)' \text{ и т. д.}$$

Точно так же $h_1 h_2 h_3 (f^{jk} - f^{kj}) = c_i$ являются составляющими ковариантного вектора. Отметим, что эти векторы — аксиальные, как это следует из произвольности правила выбора последовательности индексов (1, 2, 3) и т. д. Отметим также, что эти определения имеют место только для трех измерений.

Таким образом, если A_m, B_n, C_k — составляющие обыкновенных векторов и a_m, b_n, c_k — составляющие соответствующих ковариантных векторов, то i-я составляющая векторного произведения **A** и **B**

$$C_i = A_j B_k - A_k B_j = \frac{1}{h_k h_j}(a_j b_k - a_k b_j) = h_i c^i, \tag{1.5.3}$$

$$i, j, k = 1, 2, 3 \text{ или } 2, 3, 1 \text{ или } 3, 1, 2.$$

Заметим опять, что это имеет место только для трех измерений.

Символы Кристоффеля. Для рассмотрения свойств дивергенции и ротора мы должны ввести некоторые полезные обозначения, называемые *символами Кристоффеля*, и изучить их свойства. Эти символы определяются для ортогональных координат следующим образом:

$$\left\{ {i \atop i\ i} \right\} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial \xi_i}, \quad \left\{ {i \atop i\ j} \right\} = \left\{ {i \atop j\ i} \right\} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial \xi_j}, \quad \left\{ {j \atop i\ i} \right\} = -\frac{h_i}{(h_j)^2}\frac{\partial h_i}{\partial \xi_j}, \tag{1.5.4}$$

$$\left\{ {i \atop j\ k} \right\} = 0, \quad \text{если } i, j, k \text{ все отличны друг от друга.}$$

Эти символы являются мерами кривизны координатных осей. По формулам (1.3.6) изменения направлений единичных векторов $\mathbf{a}_i$ могут быть выражены через символы Кристоффеля следующим простым образом:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}(h_i \mathbf{a}_i) = \sum_n h_n \mathbf{a}_n \left\{ {n \atop i\ j} \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{\mathbf{a}_i}{h_i}\right) = -\sum_n \left(\frac{\mathbf{a}_n}{h_n}\right) \left\{ {i \atop n\ j} \right\}. \tag{1.5.5}$$

Но единичный вектор $\mathbf{a}_i$ дает направление оси ξ_i в точке $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, а h_i является масштабом этой координаты, т. е. h_1 равно фактическому расстоянию между точками (ξ_1, ξ_2, ξ_3) и $(\xi_1+d\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, разделенному на приращение координаты $d\xi_1$. Поэтому вектор $h_i\mathbf{a}_i$ дает и направление и масштаб координаты ξ_i в точке P. Скорость изменения этого вектора относительно изменения координаты ξ_j является также вектором, i-я составляющая которого дает изменение масштаба, а две остальные составляющие, перпендикулярные к $\mathbf{a}_i$, определяют изменение направления; n-я составляющая этой скорости равна $h_n \left\{ {n \atop i\ j} \right\}$.

Мы замечаем, что символы Кристоффеля симметричны относительно двух нижних индексов. Это означает, что вектор, представляющий скорость изменения $h_i\mathbf{a}_i$ относительно ξ_j, равен по величине и направлению вектору, представляющему скорость изменения $h_j\mathbf{a}_j$ относительно ξ_i. Это соответствует тому факту, что если масштаб координаты ξ_i меняется при изменении ξ_j, то направление ξ_j-линии меняется при изменении ξ_i, и наоборот. В этом легко убедиться на рис. 1.11.

Символы Кристоффеля *не* являются тензорами. Можно показать, что правило их преобразования задается формулой

$$\sum_{m,n} \left\{ {i \atop m\ n} \right\}' \frac{\partial \xi'_m}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi'_n}{\partial \xi_s} = -\frac{\partial^2 \xi'_i}{\partial \xi_k\, \partial \xi_s} + \sum_n \left\{ {n \atop k\ s} \right\} \frac{\partial \xi'_i}{\partial \xi_n}, \tag{1.5.6}$$

где штрих обозначает величины, выраженные в новых координатах ξ'_i. Хотя символы Кристоффеля и не являются тензорами, они могут быть очень полезными при образовании производных, имеющих уже тензорный характер, от векторов. Обычная производная $\partial f_i/\partial \xi_j$ не является тензором, в первую очередь потому, что координаты криволинейные, и изменение направления координатных линий влияет на составляющие вектора, вследствие чего производная учитывает не только изменения самого вектора, но и привходящие изменения составляющих. Другими словами, в криволинейных координатах составляющие производной вектора не являются производными его составляющих. Чтобы найти правильные выражения для составляющих производной, мы должны сначала продифференцировать сам вектор, а затем уже образовать составляющие производного вектора.

Ковариантная производная. Например, если f^i — составляющие контравариантного вектора, то настоящий вектор $\mathbf{F} = \sum_n \mathbf{a}_n h_n f^n$. Производная этого вектора по ξ_j может быть приведена к виду

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi_j} = \sum_n \mathbf{a}_n h_n \frac{\partial f^n}{\partial \xi_j} + \sum_m f^m \frac{\partial}{\partial \xi_j}(\mathbf{a}_m h_m) = \sum_n \mathbf{a}_n h_n \left[\frac{\partial f^n}{\partial \xi_j} + \sum_m f^m \left\{ {n \atop m\ j} \right\} \right].$$

Поэтому составляющими контравариантного вектора, соответствующего скорости изменения обыкновенного вектора $\mathbf{F}$ относительно ξ_j, являются величины

$$f^i_{,j} = \frac{\partial f^i}{\partial \xi_j} + \sum_m f^m \left\{ {i \atop m\ j} \right\}, \tag{1.5.7}$$

где f^i — составляющие контравариантного вектора, соответствующего $\mathbf{F}$. Эти составляющие производной уже содержат поправку на кривизну координатных линий, и составляющие вектора $h_n f^n{}_{,j}$ соответствуют фактическому изменению исходного вектора в зависимости от ξ_j. Запятая перед нижним индексом обозначает производную.

Величины $f^i{}_{,j}$ являются составляющими тензора, поскольку они ковариантны по индексу i и контравариантны по индексу j. Это можно показать, используя формулы (1.5.1) и (1.5.6):

$$(f^i{}_{,j})' = \frac{\partial}{\partial \xi'_j} \sum_k f^k \left(\frac{\partial \xi'_i}{\partial \xi_k} \right) + \sum_{m,k} f^k \frac{\partial \xi'_m}{\partial \xi_k} \left\{ {i \atop m\ j} \right\}' =$$

$$= \sum_{k,s} \frac{\partial \xi_s}{\partial \xi'_j} \frac{\partial}{\partial \xi_s} \left(f^k \frac{\partial \xi'_i}{\partial \xi_k} \right) + \sum_{k,n,m,s} f^k \frac{\partial \xi_s}{\partial \xi'_j} \frac{\partial \xi'_n}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi'_m}{\partial \xi_k} \left\{ {i \atop m\ n} \right\}' =$$

$$= \sum_{n,s} \frac{\partial f^n}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi'_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_s}{\partial \xi'_j} + \sum_{k,s} f^k \frac{\partial \xi_s}{\partial \xi'_j} \left[\frac{\partial^2 \xi'_i}{\partial \xi_s \partial \xi_k} + \sum_{m,n} \frac{\partial \xi'_n}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi'_m}{\partial \xi_k} \left\{ {i \atop m\ n} \right\}' \right] =$$

$$= \sum_{n,s} \left[\frac{\partial f^n}{\partial \xi_s} + \sum_k f^k \left\{ {n \atop k\ s} \right\} \right] \left(\frac{\partial \xi'_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_s}{\partial \xi'_j} \right) = \sum_{n,s} f^n{}_{,s} \frac{\partial \xi_s}{\partial \xi'_i} \frac{\partial \xi'_s}{\partial \xi'_j}.$$

Следовательно, $f^i{}_{,j}$ являются составляющими смешанного тензора второго порядка. Этот тензор называется *ковариантной производной* контравариантного вектора с составляющими f^i.

Аналогично если f_i — составляющие ковариантного вектора, то $\mathbf{F} = \sum (\mathbf{a}_n/h_n) f_n$ является обыкновенным вектором и

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi_j} = \sum_n \left(\frac{\mathbf{a}_n}{h_n} \right) \left[\frac{\partial f_n}{\partial \xi_j} - \sum_m f_m \left\{ {m \atop n\ j} \right\} \right]$$

также является обыкновенным вектором. Поэтому величины

$$f_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} - \sum_m f_m \left\{ {m \atop i\ j} \right\} \tag{1.5.8}$$

являются составляющими ковариантного вектора, соответствующего скорости изменения $\mathbf{F}$ относительно ξ_j. Эти величины образуют ковариантный тензор второго порядка, называющийся ковариантной производной ковариантного вектора с составляющими f_i.

Определение ковариантного дифференцирования может быть распространено и на тензоры

$$\begin{aligned} f_{ij,k} &= \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial \xi_k} \right) - \sum_m f_{im} \left\{ {m \atop j\ k} \right\} - \sum_n f_{nj} \left\{ {n \atop i\ k} \right\}, \\ f^{ij}{}_{,k} &= \left(\frac{\partial f^{ij}}{\partial \xi_k} \right) + \sum_m f^{im} \left\{ {j \atop m\ k} \right\} + \sum_n f^{nj} \left\{ {i \atop n\ k} \right\}, \\ f^i{}_{j,k} &= \left(\frac{\partial f^i{}_j}{\partial \xi_k} \right) - \sum_m f^i{}_m \left\{ {m \atop j\ k} \right\} + \sum_n f^n{}_j \left\{ {i \atop n\ k} \right\} \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

и т. д. Эти величины являются составляющими тензора *третьего порядка*; они преобразуются по формулам, являющимся очевидными обобщениями формул (1.5.2). Из формул (1.5.9) можно усмотреть, что для ковариантного дифференцирования имеют место обычные правила дифференцирования, например правило дифференцирования произведения $(a_i b_j)_{,k} = a_i b_{j,k} + a_{i,k} b_j$ и т. д.

Тензорные обозначения для дивергенции и ротора. С помощью введенных определений мы можем теперь выразить дифференциальные

операции div и rot в симметричной форме. Свернутый тензор

$$\sum_n f^n{}_{,n} = \sum_n \frac{\partial f^n}{\partial \xi_n} + \sum_{n,m} f^n \left\{ {m \atop n\ m} \right\} =$$

$$= \sum_n \frac{\partial f^n}{\partial \xi_n} + \sum_{m,n} f^n \frac{\partial}{\partial \xi_n} \ln h_m = \sum_n \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_n} (f^n h_1 h_2 h_3)$$

в силу сказанного выше о таких тензорах является скалярным инвариантом. Если здесь положить $f^n = F_n/h_n$, где F_n — составляющие обыкновенного вектора, то свернутый тензор оказывается *дивергенцией* **F**

$$\sum_n \left(\frac{F_n}{h_n}\right)_{,n} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_n \frac{\partial}{\partial \xi_n}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_n} F_n\right) = \operatorname{div} \mathbf{F}. \qquad (1.5.10)$$

Инвариантность дивергенции вытекает отсюда непосредственно как следствие общих правил тензорного исчисления.

Выше мы также показали, что для ортогональных координат величины

$$c^i = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}(f_{j,k} - f_{k,j}), \quad ijk = 123,\ 231,\ 312,$$

являются составляющими контравариантного вектора. Если положить $f_n = h_n F_n$, где F_n — составляющие обыкновенного вектора, то величины $h_k c^k$ также являются составляющими обыкновенного вектора. Выбирая определенную составляющую и используя определение символов Кристоффеля, найдем, например,

$$h_1 c^1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_2}(F_3 h_3) - (F_3 h_3)\frac{\partial}{\partial \xi_2}(\ln h_3) - (F_2 h_2)\frac{\partial}{\partial \xi_3}(\ln h_2) - \frac{\partial}{\partial \xi_3}(F_2 h_2) + \right.$$
$$\left. + (F_2 h_2)\frac{\partial}{\partial \xi_3}(\ln h_2) + (F_3 h_3)\frac{\partial}{\partial \xi_2}(\ln h_3)\right\},$$

что, в соответствии с формулой (1.4.10), дает ξ_1-составляющую обыкновенного вектора rot **F**.

Другие дифференциальные операторы. Ознакомившись с техникой тензорного исчисления и с определениями ковариантного дифференцирования, мы можем теперь без тех утомительных осложнений, с которыми мы встречались раньше, составлять правильные выражения для векторных и скалярных комбинаций векторов, скаляров и операторов. Аппарат тензорного исчисления сам заботится об устранении всех этих осложнений.

Мы можем, например, быть уверены в том, что комбинация $\sum_n b^n a_{i,n}$ является i-й составляющей некоторого ковариантного вектора, h_i-кратной соответствующей компоненте некоторого обыкновенного вектора. Полагая $b^n = B_n/h_n$ и $a_i = h_i A_i$, где **A** и **B** — обыкновенные векторы, мы получаем, по делении на h_i составляющие обыкновенного вектора, ξ_1-составляющая которого равна

$$F_1 = \frac{1}{h_1}\sum_n \frac{B_n}{h_n}(h_1 A_1)_{,n} = \frac{1}{h_n}\sum_n \frac{B_n}{h_n}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_n}(h_1 A_1) - \sum_m h_m A_m \left\{ {m \atop 1\ n} \right\}\right] =$$

$$= \left[\sum_n \frac{B_n}{h_n}\frac{\partial}{\partial \xi_n}(A_1) + \frac{A_2}{h_1 h_2}\left(B_1 \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} - B_2 \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}\right) + \frac{A_3}{h_1 h_3}\left(B_1 \frac{\partial h_1}{\partial \xi_3} - B_3 \frac{\partial h_3}{\partial \xi_1}\right)\right].$$

Сопоставление с формулой (1.4.3) показывает, что этот вектор есть (**B**·grad) **A**. Так аппарат тензорного исчисления опять позволяет находить составляющие векторного оператора в любой ортогональной системе координат.

Стенографический метод записи в тензорном исчислении позволяет записывать формулы в виде, пригодном для любой системы координат. Как только записано тензорное равенство, в котором нижние и верхние индексы в каждой части соответствуют друг другу, то можно быть уверенным в том, что это равенство будет иметь место в любой системе координат. Это отвечает общей цели теоретической физики, которая стремится выразить законы в форме, не зависящей от системы координат.

Лапласиан, определенный равенством (1.1.4), также может быть получен в общей форме при помощи тензорного исчисления

$$\nabla^2\psi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\psi) = \sum_n \left(\frac{1}{h_n^2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_n}\right)_{,n} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_n \frac{\partial}{\partial\xi_n}\left[\frac{h_1h_2h_3}{h_n^2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_n}\right]. \quad (1.5.11)$$

Как мы уже отмечали на стр. 19, лапласиан ψ является мерой «сгущенности» ψ.

Лапласиан может быть приложен и к векторному полю $\mathbf{F}$, что дает также вектор, который может рассматриваться как мера сгущенности направления или длины вектора $\mathbf{F}$. Составляющие по осям x, y, z этого вектора получаются приложением лапласиана к x-, y-, z-составляющим вектора $\mathbf{F}$. Чтобы получить его составляющие в произвольной системе координат, используем соотношения

$$\nabla^2\mathbf{F} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{F}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F}),$$

$$(\nabla^2\mathbf{F})_i = h_i\sum_n \frac{1}{h_n^2}\left[\left(\frac{F_i}{h_i}\right)_{,n}\right]_{,n} = \frac{1}{h_i}\sum_n \frac{1}{h_n^2}[(h_iF_i)_{,n}]_{,n}. \quad (1.5.12)$$

Первое из этих соотношений легко проверяется в декартовых координатах; оно справедливо, конечно, и в любой системе координат. Второе соотношение показывает, что вектор $\nabla^2\mathbf{F}$ выражается через контра- и ковариантные векторы, образованные двойным ковариантным дифференцированием F_i/h_i или h_iF_i с последующим свертыванием получающегося тензора третьего порядка. Запись окончательной формулы для $\nabla^2\mathbf{F}$ сложна, но для конкретных систем координат, которыми мы в основном пользуемся, эта формула значительно упрощается.

Первое соотношение (1.5.12) интересно само по себе, так как оно показывает, что в выражение $\nabla^2\mathbf{F}$ входит $\operatorname{rot}\mathbf{F}$. Если $\mathbf{F}$ — скорость потока несжимаемой жидкости, то $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ и $\nabla^2\mathbf{F} = -\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F})$. Поэтому для того чтобы вектор, дивергенция которого равна нулю, имел лапласиан, отличный от нуля, нужно, чтобы не только он сам был завихрен, но и чтобы его вихревые линии также были завихрены.

Другие операторы второго порядка. Другие комбинации двух операторов ∇ менее важны, чем лапласиан ∇^2; однако и они иногда встретятся в наших уравнениях, так что имеет смысл кратко рассмотреть их здесь.

Некоторые из этих операторов равны нулю. Равенство

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\psi) \equiv \nabla\times(\nabla\psi) = 0 \quad (1.5.13)$$

было уже использовано в § 1.2, где мы показали, что если вектор является градиентом потенциальной функции, то его ротор должен быть равен нулю. Равенство

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) \equiv \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = 0 \quad (1.5.14)$$

уже рассматривалось на стр. 51, где было показано, что вихревые линии не могут ни начинаться, ни обрываться.

Равенство (1.5.13) связано с одним свойством полей, которое рассматривалось на стр. 24—26, а именно, что если ротор поля всюду равен нулю,

то это поле может быть представлено в виде градиента некоторого скаляра, называемого *потенциальной функцией*[1]). Равенство (1.5.14) связано со сходным свойством, которое может быть легко установлено, а именно, что если дивергенция поля равна нулю, то это поле может быть представлено в виде ротора некоторого вектора, называемого *вектор-потенциалом* данного поля с нулевой дивергенцией.

Оператор $\operatorname{grad}(\operatorname{div}) = \nabla(\nabla\cdot)$ прилагается к вектору и дает вектор. Он измеряет изменение дивергенции данного поля и отличается от лапласиана этого поля $\mathbf{F}$ на величину $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F})$, как это видно из формулы (1.5.12). Оператор $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}) = \nabla\times(\nabla\times)$, последний из операторов второго порядка, определен, таким образом, через два предыдущих оператора. Все эти выражения могут быть записаны в тензорной форме.

Вектор как сумма градиента и ротора. Мы теперь достигли такой степени владения векторными формулами, что можем доказать следующее предложение: любое векторное поле $\mathbf{F}$, если оно, конечно, однозначно и непрерывно и обращается в нуль на бесконечности, может быть представлено в виде суммы градиента некоторого скаляра φ и ротора некоторого вектора $\mathbf{A}$, дивергенция которого равна нулю

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{1.5.15}$$

Функция φ называется *скалярным потенциалом* поля[1]) $\mathbf{F}$, а $\mathbf{A}$ — его *векторным потенциалом*; эта теорема называется *теоремой Гельмгольца*.

Для доказательства этого утверждения мы должны показать, как, зная $\mathbf{F}$, можно вычислить φ и $\mathbf{A}$, а для этого мы должны воспользоваться решением уравнения Пуассона $\nabla^2\varphi = -q$, которое было дано формулой (1.4.8):

$$\varphi = \iiint \frac{q(x', y', z')}{4\pi R}\,dx'dy'dz', \quad R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Рассматривая по отдельности составляющие вектора, мы убеждаемся в том, что решение векторного уравнения Пуассона $\nabla^2\mathbf{F} = -\mathbf{q}$ может быть получено в таком же виде с заменой лишь φ на $\mathbf{F}$ и q на $\mathbf{q}$. Кроме того, мы покажем, что решение φ, $\mathbf{A}$ — единственное, если только интеграл от $\mathbf{F}$ по всему пространству конечен. Если же это не так, если, например, одна из составляющих вектора $F = ax$, то мы можем положить $F = ax$ внутри сферы очень большого радиуса и считать $F = 0$ вне этой сферы. После выполнения всех вычислений можно устремить радиус сферы к бесконечности. Если мы имеем дело с полем в ограниченной области, то мы можем за F взять значение поля внутри этой области и положить $F = 0$ вне ее. Во всех случаях, когда F само не обращается в бесконечность, можно сделать $\int F dv$ конечным.

Чтобы вычислить φ и $\mathbf{A}$, сначала вычислим векторную функцию

$$\mathbf{W} = \iiint \frac{\mathbf{F}(x', y', z')}{4\pi R}\,dx'dy'dz', \tag{1.5.16}$$

которая является решением векторного уравнения Пуассона $\nabla^2\mathbf{W} = -\mathbf{F}$. Отсюда видно, что если мы положим $\operatorname{div}\mathbf{W} = -\varphi$ и $\operatorname{rot}\mathbf{W} = \mathbf{A}$, то [используя векторную формулу (1.5.12)] придем к представлению (1.5.15)

$$\mathbf{F} = -\nabla^2\mathbf{W} = -\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{W}) + \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{W}) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

---

[1]) Потенциальная функция, введенная здесь, отличается знаком от той, которая была введена ранее. — *Прим. ред.*

Так как **W** однозначно определено интегралом (1.5.16), то и φ и **A** определены однозначно, если только интеграл от **F** конечен (что может быть всегда достигнуто указанным выше приемом, если только **F** не обращается в бесконечность где-либо на конечном расстоянии от начала).

Мы можем выразить φ и **A** в несколько более простом виде, если мы воспользуемся симметрией функции $1/R$ относительно (x, y, z) и (x', y', z') и заметим, что градиент $1/R$ по (x, y, z) ($\operatorname{grad} 1/R$) равен $-\operatorname{grad}' 1/R$, где $\operatorname{grad}' 1/R$ означает градиент $1/R$ по (x', y', z'). По теореме Гаусса (1.4.7) мы имеем

$$-\operatorname{div} \mathbf{W} = \int \mathbf{F}\cdot\operatorname{grad}'\left(\frac{1}{4\pi R}\right) dv' = \oint \frac{\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}'}{4\pi R} - \int \frac{\operatorname{div}'\mathbf{F}}{4\pi R}\, dv',$$

или

$$\varphi = -\iiint [\operatorname{div}'\mathbf{F}(x', y', z')/4\pi R]\, dx'\, dy'\, dz',$$

где $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}'/4\pi R$ распространяется по достаточно удаленной замкнутой поверхности, на которой **F** всюду равно (или может быть сделано равным) нулю.

Аналогично, используя соотношение, родственное теореме Гаусса, именно

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{B}\, dv = -\oint \mathbf{B}\times d\mathbf{A}, \tag{1.5.17}$$

мы можем преобразовать выражение для **A** к более простому виду

$$\operatorname{rot} \mathbf{W} = \int \mathbf{F}\times\operatorname{grad}'\left(\frac{1}{4\pi R}\right) dv' = \oint \frac{\mathbf{F}\times d\mathbf{A}}{4\pi R} + \int \frac{\operatorname{rot}'\mathbf{F}}{4\pi R}\, dv',$$

или

$$\mathbf{A} = \iiint [\operatorname{rot}'\mathbf{F}(x', y', z')/4\pi R]\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Следовательно, φ и **A** могут быть получены непосредственно из дивергенции и ротора **F**, если **F** удовлетворяет указанным выше условиям.

Это свойство любого векторного поля быть единственным образом представимым в виде суммы двух полей: одного $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, без дивергенции, и другого $\operatorname{grad} \varphi$, безвихревого, — составляет утверждение *теоремы Гельмгольца*. Оно будет очень полезно нам в настоящей книге, особенно в гл. 13, и будет еще рассмотрено с другой точки зрения в п. 2.3[1]).

1.6. Аффиноры и другие векторные операторы

Мы уже рассматривали свойства векторных полей и их соответствие различным физическим явлениям с целью приобрести «физическое чутье» применительно к понятию векторного поля. Теперь мы должны ознакомиться с физическими эквивалентами тензорных форм, определенных соотношениями (1.5.2). Эти формы имеют в трех измерениях девять составляющих, тогда как вектор имеет только три. В тензорном поле эти девять составляющих могут изменяться от точки к точке; они преобразуются при замене системы координат по формулам (1.5.2).

Аффиноры. Так же как мы определяли «настоящие» векторы в отличие от их контравариантных и ковариантных видов, мы должны здесь

[1]) Следует отметить, что указанная единственность представления имеет место для всего пространства или при наличии необходимых краевых условий. Вообще же говоря, каждое из полей-слагаемых определено с точностью до градиента гармонической функции. — *Прим. ред.*