Так как **W** однозначно определено интегралом (1.5.16), то и φ и **A** определены однозначно, если только интеграл от **F** конечен (что может быть всегда достигнуто указанным выше приемом, если только **F** не обращается в бесконечность где-либо на конечном расстоянии от начала).

Мы можем выразить φ и **A** в несколько более простом виде, если мы воспользуемся симметрией функции $1/R$ относительно (x, y, z) и (x', y', z') и заметим, что градиент $1/R$ по (x, y, z) ($\operatorname{grad} 1/R$) равен $-\operatorname{grad}' 1/R$, где $\operatorname{grad}' 1/R$ означает градиент $1/R$ по (x', y', z'). По теореме Гаусса (1.4.7) мы имеем

$$-\operatorname{div} \mathbf{W} = \int \mathbf{F}\cdot\operatorname{grad}'\left(\frac{1}{4\pi R}\right) dv' = \oint \frac{\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}'}{4\pi R} - \int \frac{\operatorname{div}'\mathbf{F}}{4\pi R}\, dv',$$

или

$$\varphi = -\iiint [\operatorname{div}'\mathbf{F}(x', y', z')/4\pi R]\, dx'\, dy'\, dz',$$

где $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}'/4\pi R$ распространяется по достаточно удаленной замкнутой поверхности, на которой **F** всюду равно (или может быть сделано равным) нулю.

Аналогично, используя соотношение, родственное теореме Гаусса, именно

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{B}\, dv = -\oint \mathbf{B}\times d\mathbf{A}, \tag{1.5.17}$$

мы можем преобразовать выражение для **A** к более простому виду

$$\operatorname{rot} \mathbf{W} = \int \mathbf{F}\times\operatorname{grad}'\left(\frac{1}{4\pi R}\right) dv' = \oint \frac{\mathbf{F}\times d\mathbf{A}}{4\pi R} + \int \frac{\operatorname{rot}'\mathbf{F}}{4\pi R}\, dv',$$

или

$$\mathbf{A} = \iiint [\operatorname{rot}'\mathbf{F}(x', y', z')/4\pi R]\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Следовательно, φ и **A** могут быть получены непосредственно из дивергенции и ротора **F**, если **F** удовлетворяет указанным выше условиям.

Это свойство любого векторного поля быть единственным образом представимым в виде суммы двух полей: одного $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, без дивергенции, и другого $\operatorname{grad} \varphi$, безвихревого, — составляет утверждение *теоремы Гельмгольца*. Оно будет очень полезно нам в настоящей книге, особенно в гл. 13, и будет еще рассмотрено с другой точки зрения в п. 2.3[1]).

1.6. Аффиноры и другие векторные операторы

Мы уже рассматривали свойства векторных полей и их соответствие различным физическим явлениям с целью приобрести «физическое чутье» применительно к понятию векторного поля. Теперь мы должны ознакомиться с физическими эквивалентами тензорных форм, определенных соотношениями (1.5.2). Эти формы имеют в трех измерениях девять составляющих, тогда как вектор имеет только три. В тензорном поле эти девять составляющих могут изменяться от точки к точке; они преобразуются при замене системы координат по формулам (1.5.2).

Аффиноры. Так же как мы определяли «настоящие» векторы в отличие от их контравариантных и ковариантных видов, мы должны здесь

[1]) Следует отметить, что указанная единственность представления имеет место для всего пространства или при наличии необходимых краевых условий. Вообще же говоря, каждое из полей-слагаемых определено с точностью до градиента гармонической функции. — *Прим. ред.*

определить *аффинор* (dyadic) как совокупность девяти составляющих A_{ij} (функций трех координат), преобразующихся при переходе от одной системы координат к другой по правилу

$$(A_{ij})' = \sum_{m,n} \frac{h_m h_n}{h_i' h_j'} \frac{\partial \xi_m}{\partial \xi_i'} \frac{\partial \xi_n}{\partial \xi_j'} A_{mn} = \sum_{m,n} \frac{h_i' h_j'}{h_m h_n} \frac{\partial \xi_i'}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_j'}{\partial \xi_n} A_{mn} =$$

$$= \sum_{m,n} \frac{h_i'}{h_m} \frac{h_n}{h_j'} \frac{\partial \xi_i'}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_n}{\partial \xi_j'} A_{mn} = \sum_{m,n} \gamma_{im} \gamma_{jn} A_{mn}. \quad (1.6.1)$$

Аффинор как целое с составляющими, подчиненными соотношениям (1.6.1), будет обозначаться готической заглавной буквой $\mathfrak{A}$. Соотношение между составляющими аффинора и составляющими соответствующих контравариантного, ковариантного и смешанного тензоров могут быть выведены из соотношений (1.5.2)

$$a^{mn} = A_{mn}/h_m h_n, \quad a_{mn} = h_m h_n A_{mn}, \quad a_n^m = h_n A_{mn}/h_m. \quad (1.6.2)$$

Можно сразу записать два общих свойства аффинора $\mathfrak{A}$: его свертка

$$|\mathfrak{A}| = \sum_m A_{mm} = \sum_m a_m^m \quad (1.6.3)$$

является скалярным инвариантом, значение которого в любой точке не зависит от выбора системы координат; и в соответствии с формулами (1.5.3) величина

$$\langle \mathfrak{A} \rangle = \mathbf{a}_1 [A_{23} - A_{32}] + \mathbf{a}_2 [A_{31} - A_{13}] + \mathbf{a}_3 [A_{12} - A_{21}] \quad (1.6.4)$$

является аксиальным вектором, так как она преобразуется как вектор ($\mathbf{a}_m$ по-прежнему обозначают единичные векторы в трех направлениях правой системы координат). Инвариант $|\mathfrak{A}|$ может быть назван *следом* или *коэффициентом расширения* аффинора, а вектор $\langle \mathfrak{A} \rangle$ называется *вектором вращения* аффинора; вскоре обнаружатся основания для введения этих терминов.

Аффинор может сочетаться с вектором, образуя вектор

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{mn} \mathbf{a}_m A_{mn} B_n, \quad \mathbf{B} \cdot \mathfrak{A} = \sum_{mn} B_m A_{mn} \mathbf{a}_n. \quad (1.6.5)$$

Применяя правила преобразования векторов и аффиноров, можно показать, что эти величины преобразуются как векторы («настоящие» векторы). Этот результат наводит на мысль о следующей формальной записи аффинора через его девять составляющих по осям

$$\mathfrak{A} = \mathbf{a}_1 A_{11} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 A_{12} \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 A_{13} \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_2 A_{21} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 A_{22} \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 A_{23} \mathbf{a}_3 +$$
$$+ \mathbf{a}_3 A_{31} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 A_{32} \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 A_{33} \mathbf{a}_3. \quad (1.6.6)$$

Выражения $\mathbf{a}_m \mathbf{a}_n$ не являются ни скалярными, ни векторными произведениями единичных векторов, а должны рассматриваться как такие операторы, что скалярное произведение $(\mathbf{a}_m \mathbf{a}_n) \cdot \mathbf{B} = B_n \mathbf{a}_m$ является вектором вдоль оси ξ_m, длины, равной составляющей $\mathbf{B}$ в направлении ξ_n и т. д.

Отметим, что, вообще говоря, вектор $\mathbf{B} \cdot \mathfrak{A}$ не совпадает с вектором $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{B}$. Аффинор $\mathfrak{A}^*$, образованный из $\mathfrak{A}$ перестановкой индексов в каждой составляющей ($A_{mn}^* = A_{nm}$), называется *сопряженным* с $\mathfrak{A}$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathfrak{A}^*$ и $\mathbf{B} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^* \cdot \mathbf{B}$.

Аффиноры как векторные операторы. Рассмотрения последнего пункта подсказывают одно из самых полезных свойств аффиноров: *они*

являются операторами, переводящими один вектор в другой вектор. Новый вектор получается из старого по определенной системе правил, представленной девятью составляющими A_{ij}. Значения этих составляющих определяют, как новый вектор отличается от старого по длине и направлению. Это различие в длине и направлении зависит, конечно, и от направления исходного вектора. Векторный оператор, представленный аффинором, не является наиболее общим видом векторного оператора (другие виды мы рассмотрим ниже), но он отвечает столь многим физическим явлениям, что заслуживает подробного изучения.

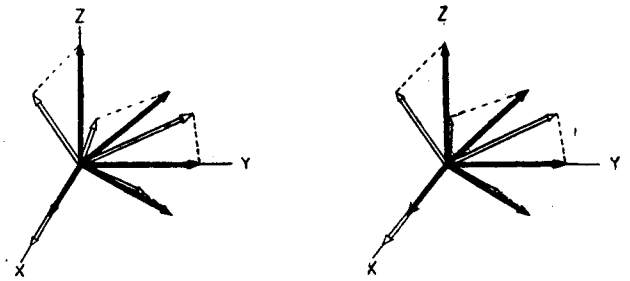

Рис. 1.18. Преобразование векторного поля аффинором $\mathbf{i}(1{,}5\mathbf{i}+0{,}2\mathbf{j})+\mathbf{j}(\mathbf{j}-0{,}4\mathbf{k})+\mathbf{k}(0{,}5\mathbf{j}+0{,}6\mathbf{k})$.

Черные векторы представляют исходное поле; светлые векторы — преобразованное поле.

Примеры явлений, которые могут быть представлены при помощи векторных операторов, встречаются во многих разделах физики. Например, зависимость между угловым моментом $\mathbf{M}$ твердого тела и его угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ имеет вид $\mathbf{M}=\mathfrak{J}\cdot\boldsymbol{\omega}$, где $\mathfrak{J}$ — аффинор моментов инерции. Далее вектор скорости $\mathbf{v}$ жидкости, которая под давлением просачивается через анизотропную пористую среду, вообще говоря, не совпадает по направлению с градиентом давления, а связан с ним аффинорным соотношением $\operatorname{grad} p=\mathfrak{R}\cdot\mathbf{v}$, где $\mathfrak{R}$ — аффинор сопротивления. Аналогично зависимость между электрической напряженностью и электрической поляризацией в неизотропном диэлектрике также имеет аффинорный характер. Наиболее известный пример аффиноров получается при деформации упругого тела, которая будет вскоре рассмотрена.

Понятие аффинора как векторного оператора, а также указанные выше соотношения приводят нас к следующим правилам алгебры аффиноров:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}+\mathfrak{B}&=\sum_{m,n}\mathbf{a}_m\,[A_{mn}+B_{mn}]\,\mathbf{a}_n=\mathfrak{B}+\mathfrak{A},\\
\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}&=\sum_{m,n}\mathbf{a}_m\Big[\sum_i A_{mi}B_{in}\Big]\,\mathbf{a}_n\neq\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A},\\
c\mathfrak{A}&=\sum_{m,n}\mathbf{a}_m\,(cA_{mn})\,\mathbf{a}_n=\mathfrak{A}c.
\end{aligned}\tag{1.6.6'}$$

Первое соотношение показывает, что сложение аффиноров коммутативно и что аффинор общего вида может быть построен как сумма аффиноров более простых видов. Второе соотношение показывает, что аффинор, умноженный на аффинор, есть вновь аффинор и что умножение аффиноров *некоммутативно*. Третье соотношение определяет умножение на скаляр. Умножение на вектор было уже определено. Скалярное «двуточечное» произведение $\mathfrak{A}:\mathfrak{B}=\sum_{m,n}A_{mn}B_{nm}=|\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}|$ является, конечно, полностью свернутой формой.

Существуют, конечно, нулевой аффинор $\mathfrak{O}$ и единичный аффинор $\mathfrak{J}$, называемый также *идемфактором*

$$\mathfrak{O}\cdot\mathbf{F}=0,\quad \mathfrak{J}\cdot\mathbf{F}=\mathbf{F},\quad \mathfrak{J}=\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3,$$

где $\mathbf{F}$ — любой вектор.

Можно также определить $\mathfrak{A}^{-1}$, аффинор, *обратный* к $\mathfrak{A}$, как аффинор, который, будучи умножен на $\mathfrak{A}$, дает идемфактор

$$(\mathfrak{A}^{-1})\cdot\mathfrak{A}=\mathfrak{A}\cdot(\mathfrak{A}^{-1})=\mathfrak{J}.$$

Аффинор, обратный к нулевому аффинору, естественно, не определен. Через девять составляющих аффинора $\mathfrak{A}$ составляющие обратного аффинора выражаются следующим образом:

$$(\mathfrak{A}^{-1})_{mn}=\frac{A'_{nm}}{\Delta_A},$$

где A'_{mn} — алгебраическое дополнение элемента A_{mn} в определителе

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{vmatrix}.$$

Определение умножения аффиноров влечет за собой то, что аффинор, сопряженный к произведению $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$, выражается через сопряженные к $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ формулой

$$(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B})^*=(\mathfrak{B}^*\cdot\mathfrak{A}^*),$$

так что переход в произведении к сопряженному аффинору связан с перестановкой сомножителей. Аналогично выражается аффинор, обратный произведению $(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B})^{-1}=\mathfrak{B}^{-1}\cdot\mathfrak{A}^{-1}$.

Так как аффинор определен в каждой точке пространства его девятью составляющими по ортогональным осям [причем эти составляющие изменяются при вращении координат по формулам (1.6.1)], то он может быть построен в виде комбинации векторов, содержащих девять независимых параметров. Так как вектор определяется в каждой точке тремя величинами, то аффинор может быть, например, образован при помощи трех произвольно выбранных векторов $\mathbf{A}_m$

$$\mathfrak{A}=\mathbf{a}_1\mathbf{A}_1+\mathbf{a}_2\mathbf{A}_2+\mathbf{a}_3\mathbf{A}_3=\mathbf{A}_1^*\mathbf{a}_1+\mathbf{A}_2^*\mathbf{a}_2+\mathbf{A}_3^*\mathbf{a}_3, \tag{1.6.7}$$

где $\mathbf{a}$ — единичные векторы ортогональной правой системы координат. Сопряженным аффинором будет

$$\mathfrak{A}^*=\mathbf{A}_1\mathbf{a}_1+\mathbf{A}_2\mathbf{a}_2+\mathbf{A}_3\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_1\mathbf{A}_1^*+\mathbf{a}_2\mathbf{A}_2^*+\mathbf{a}_3\mathbf{A}_3^*.$$

Эти равенства определяют векторы $\mathbf{A}_n$ и $\mathbf{A}_n^*$. Их взаимосвязь дана ниже. Вектор $\mathbf{A}_m$ может быть назван *составляющим* вектором по оси ξ_m. Для произвольного аффинора он может иметь любое направление и любую длину. Вектор $\mathbf{B}$, направленный вдоль ξ_m-линии, преобразуется операцией $\mathbf{B}\cdot\mathfrak{A}$ в вектор, имеющий направление $\mathbf{A}_m$, а операцией $\mathfrak{A}\cdot\mathbf{B}$ — в вектор, имеющий направление $\mathbf{A}_m^*$.

Нетрудно видеть, что составляющие векторы связаны с девятью составляющими A_{mn} аффинора $\mathfrak{A}$ по осям ξ_1, ξ_2, ξ_3 [см. формулы (1.6.6)] формулами

$$\mathbf{A}_m=\sum_n A_{mn}\mathbf{a}_n,\quad \mathbf{A}_m^*=\sum_n \mathbf{a}_n A_{nm}.$$

В декартовых координатах x, y, z аффинор может быть представлен в виде

$$\mathfrak{A} = \mathbf{i}\mathbf{A}_x + \mathbf{j}\mathbf{A}_y + \mathbf{k}\mathbf{A}_z = \mathbf{A}_x^*\mathbf{i} + \mathbf{A}_y^*\mathbf{j} + \mathbf{A}_z^*\mathbf{k},$$
$$\mathbf{A}_x = \alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \alpha_3\mathbf{A}_3, \quad \alpha_m = \mathbf{i}\cdot\mathbf{a}_m,$$
$$\mathbf{A}_y = \beta_1\mathbf{A}_1 + \beta_2\mathbf{A}_2 + \beta_3\mathbf{A}_3, \quad \beta_m = \mathbf{j}\cdot\mathbf{a}_m,$$
$$\mathbf{A}_z = \gamma_1\mathbf{A}_1 + \gamma_2\mathbf{A}_2 + \gamma_3\mathbf{A}_3, \quad \gamma_m = \mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_m.$$

В более общем виде аффинор может быть представлен как сумма комбинаций векторов[1])

$$\mathfrak{A} = \sum_m \mathbf{A}_m\mathbf{B}_m,$$

причем для такого представления произвольного аффинора в этой сумме должно быть не менее трех членов.

Симметрические и кососимметрические аффиноры. Аффинор $A\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1$ является особенно простым векторным оператором; он переводит любой вектор $\mathbf{F}$ в вектор длины $A(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{F})$, имеющий направление $\mathbf{a}_1$. Он является симметрическим аффинором, так как его составляющие в любой декартовой системе координат симметричны относительно индексов. Например, в системе координат x, y, z его составляющие равны

$$A_{xx} = A\alpha_1^2, \quad A_{yy} = A\beta_1^2, \quad A_{zz} = A\gamma_1^2,$$
$$A_{xy} = A_{yx} = A\alpha_1\beta_1, \quad A_{xz} = A_{zx} = A\alpha_1\gamma_1, \quad A_{yz} = A_{zy} = A\beta_1\gamma_1,$$

где α_1, β_1, γ_1 — направляющие косинусы $\mathbf{a}_1$ в системе x, y, z.

Наиболее общим видом симметрического аффинора является

$$\mathfrak{A}_s = \mathbf{a}_1A_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2A_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3A_3\mathbf{a}_3, \tag{1.6.8}$$

где $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ — любая тройка взаимно-ортогональных единичных векторов. Так как симметрический аффинор содержит только шесть независимых параметров (три пары его составляющих равны), то задание определенного симметрического аффинора однозначно определяет три постоянных A_1, A_2, A_3 и направления в пространстве трех взаимно-ортогональных единичных векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ [которые задаются эйлеровыми углами ψ, Φ, θ, см. формулы (1.3.8)]. Обращаясь к соотношениям (1.6.7), мы видим, что для того, чтобы аффинор был симметрическим, должна существовать такая тройка единичных векторов $\mathbf{a}$, для которой составляющий вектор $\mathbf{A}_1$ параллелен $\mathbf{a}_1$ и т. д.

Обратно, любой симметрический аффинор может быть представлен в виде (1.6.8), и значения A и направления $\mathbf{a}$ могут быть найдены, так как формула (1.6.8) показывает, что симметрический оператор $\mathfrak{A}_s$, воздействуя на вектор в любом из трех взаимно-ортогональных направлений $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ или $\mathbf{a}_3$, меняет только длину этого вектора, но не изменяет его направления, тогда как векторы в направлениях, отличных от $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$, переводятся в векторы с измененными направлениями. Эти специальные направления, в которых оператор не изменяет направления вектора, называются *главными осями* аффинора.

Направляющие косинусы главной оси $\mathbf{a}_1$ аффинора

$$\mathfrak{A}_s = A_x\mathbf{i}\mathbf{i} + B_z\mathbf{i}\mathbf{j} + B_y\mathbf{i}\mathbf{k} + B_z\mathbf{j}\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}\mathbf{j} + B_x\mathbf{j}\mathbf{k} + B_y\mathbf{k}\mathbf{i} + B_x\mathbf{k}\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}\mathbf{k}$$

---

[1]) В нашей литературе вместо «комбинация векторов» говорят *неопределенное* или *диадное* произведение векторов (или просто «диада»). — *Прим. перев.*

могут быть найдены посредством решения уравнения

$$\mathfrak{A}_s \cdot \mathbf{a}_1 = A_1 \mathbf{a}_1, \tag{1.6.9}$$

которое является математическим выражением данного выше определения главной оси. Уравнение (1.6.9) является первым встретившимся нам примером *задачи на собственные значения*, но скоро мы познакомимся и с другими такими задачами, например при рассмотрении «векторных пространств» в квантовой механике, в теории волнового движения и во многих других вопросах теории поля. Единичные векторы $\mathbf{a}_i$, дающие направления главных осей, называются *собственными векторами*, а постоянные A_1, A_2, A_3 — *собственными значениями*.

Для решения уравнения (1.6.9) положим $\mathbf{a}_1 = \alpha_1 \mathbf{i} + \beta_1 \mathbf{j} + \gamma_1 \mathbf{k}$. Подставляя это выражение в обе части уравнения, мы найдем три линейных однородных уравнения

$$\begin{aligned} (A_x - A_1)\alpha_1 + B_z\beta_1 + B_y\gamma_1 &= 0, \\ B_z\alpha_1 + (A_y - A_1)\beta_1 + B_x\gamma_1 &= 0, \\ B_y\alpha_1 + B_x\beta_1 + (A_z - A_1)\gamma_1 &= 0. \end{aligned}$$

Эта система уравнений имеет нетривиальное решение только в том случае, если определитель, составленный из коэффициентов при α_1, β_1, γ_1, равен нулю

$$\begin{vmatrix} A_x - A_1 & B_z & B_y \\ B_z & A_y - A_1 & B_x \\ B_y & B_x & A_z - A_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Решая это уравнение третьей степени относительно A_1, мы найдем три корня, соответствующие трем числам A_1, A_2, A_3. Этот определитель известен под названием *векового определителя*. Он всегда возникает при решении задач на собственные значения при помощи линейной комбинации векторов вида, принятого нами для $\mathbf{a}_1$.

Каждому из трех чисел A_i будет соответствовать система значений α_i, β_i, γ_i, которая дает направляющие косинусы i-й главной оси. Эти оси взаимно перпендикулярны, что может быть показано следующим образом. Так как $\mathfrak{A}_s \cdot \mathbf{a}_1 = A_1 \mathbf{a}_1$ и $\mathfrak{A}_s \cdot \mathbf{a}_2 = A_2 \mathbf{a}_2$, то, в силу симметрии $\mathfrak{A}_s$,

$$0 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathfrak{A}_s \cdot \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \cdot \mathfrak{A}_s \cdot \mathbf{a}_2 = (A_1 - A_2)\, \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2.$$

Но A_1 и A_2, как правило, не равны, так что последнее равенство может иметь место только в случае $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$.

Можно показать, что след или коэффициент расширения является инвариантом

$$A_x + A_y + A_z = A_1 + A_2 + A_3,$$

как это, конечно, и должно быть, так как это выражение является скалярным инвариантом $|\mathfrak{A}_s|$ аффинора. Мы теперь видим, почему этот скаляр называется коэффициентом расширения: он равен утроенному производимому аффинором $\mathfrak{A}_s$ среднему относительному удлинению векторов, направленных вдоль трех главных осей. Другой термин, «след» (по аналогии со следом крупной дичи), является картинным, но удобопонятным описанием этой величины.

Отметим, что вектор $\langle \mathfrak{A}_s \rangle$, образованный для симметрического аффинора, равен нулю и что для симметрического аффинора $\mathfrak{A}_s \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathfrak{A}_s$, где $\mathbf{F}$ — произвольный вектор. Другими словами, всякий симметрический аффинор совпадает с сопряженным себе.

В кососимметрическом аффиноре диагональные составляющие A_{nn} равны нулю, а внедиагональные составляющие меняют знак при перестановке индексов: $A_{mn} = -A_{nm}$. Наиболее общий кососимметрический аффинор содержит только три независимых параметра. Он всегда может быть представлен в виде

$$\mathfrak{A}_a = \mathbf{R} \times \mathfrak{J} = -\mathbf{ij}R_z + \mathbf{ik}R_y + \mathbf{ji}R_z - \mathbf{jk}R_x - \mathbf{ki}R_y + \mathbf{kj}R_x, \qquad (1.6.10)$$

где $\mathfrak{J} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$ — идемфактор. Выбор кососимметрического аффинора однозначно определяет вектор $\mathbf{R}$, который равен минус половине вектора вращения $\langle \mathfrak{A}_a \rangle$ этого аффинора. Отметим, что коэффициент расширения кососимметрического аффинора равен нулю. Отметим также, что для любого вектора $\mathbf{F}$ операция $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} = \frac{1}{2} \langle \mathfrak{A}_a \rangle \times \mathbf{F}$ дает вектор, перпендикулярный к $\mathbf{F}$, а также перпендикулярный к вектору вращения $\langle \mathfrak{A}_a \rangle$.

Задача на собственные значения может быть также поставлена и для кососимметрического аффинора

$$\mathfrak{A}_a \cdot \mathbf{a} = \mathbf{R} \times \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a};$$

формально решая это уравнение, мы получим «главные оси» $\mathfrak{A}_a$. Составление векового определителя показывает, что три значения λ суть $A_1 = 0$, $A_2 = iR$ и $A_3 = -iR$, так что два корня чисто мнимы. Единичным вектором вдоль главной оси, соответствующей $\lambda = A_1 = 0$, является $\mathbf{a}_R$, параллельный $\mathbf{R}$; два других единичных вектора невещественны. Сумма $A_1 + A_2 + A_3 = 0$, как это и должно быть, так как коэффициент расширения кососимметрического аффинора равен нулю.

Легко видеть, что *любой* аффинор может быть представлен в виде суммы симметрического и кососимметрического аффиноров

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_s + \mathfrak{A}_a,$$

$$(\mathfrak{A}_s)_{mn} = \frac{1}{2}(A_{mn} + A_{nm}), \quad (\mathfrak{A}_a)_{mn} = \frac{1}{2}(A_{mn} - A_{nm}).$$

Преобразованием к главным осям (которые всегда вещественны) мы можем представить симметрическую часть $\mathfrak{A}_s$ в форме (1.6.8), а надлежащим выбором вектора $\mathbf{R}$ — кососимметрическую часть $\mathfrak{A}_a$ в форме (1.6.10).

Мы можем, конечно, искать главные оси самого аффинора $\mathfrak{A}$, решая уравнение

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}$$

непосредственно (до разделения аффинора на симметрическую и кососимметрическую части). Это приводит к вековому уравнению

$$\begin{vmatrix} A_{xx} - \lambda & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} - \lambda & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого кубического уравнения можно обозначить через $\lambda = A_1, A_2, A_3$, а соответствующие собственные векторы вдоль главных осей — через

$$\mathbf{e}_1 = \alpha_1 \mathbf{i} + \beta_1 \mathbf{j} + \gamma_1 \mathbf{k},$$
$$\mathbf{e}_2 = \alpha_2 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \gamma_2 \mathbf{k},$$
$$\mathbf{e}_3 = \alpha_3 \mathbf{i} + \beta_3 \mathbf{j} + \gamma_3 \mathbf{k}.$$

Из алгебры известно, что взятый с обратным знаком коэффициент при λ^2, $A_{xx} + A_{yy} + A_{zz}$, равен сумме корней $A_1 + A_2 + A_3$. Известно также, что либо все три корня вещественны, либо один из них вещественен, а два

других мнимы и комплексно сопряжены (при условии, что все девять составляющих A_{mn} аффинора $\mathfrak{A}$ вещественны). Когда все три корня вещественны, то и все три собственных вектора $\mathbf{e}_m$ вещественны, но когда два из корней мнимы, то соответствующие два собственных вектора тоже мнимы. Чтобы избежать этого осложнения, обычно сначала отделяют кососимметрическую часть $\mathfrak{A}_a$ и находят главные оси симметрической части $\mathfrak{A}_s$, так как ее собственные значения и собственные векторы обязательно вещественны (если составляющие самого аффинора $\mathfrak{A}$ вещественны).

Вращение осей и унитарные аффиноры. Специальный тип векторного оператора соответствует такому преобразованию, которое можно назвать *жестким вращением*. Рассматривая несколько векторов $\mathbf{F}$ как своего рода координатный репер (каркас), мы будем под операцией жесткого вращения понимать такое вращение всех векторов $\mathbf{F}$, при котором этот репер вращается как *твердое* тело, т. е. с сохранением длин всех $\mathbf{F}$ и углов между ними. Если эти векторы $\mathbf{F}$ являются, например, радиус-векторами точек некоторого твердого тела, то рассматриваемой операции соответствует вращение этого твердого тела вокруг начала координат.

Допустим, что мы представим такую векторную операцию специальным аффинором $\mathfrak{G}$ с составляющими γ_{mn} и т. д. Для того чтобы преобразованный вектор $\mathfrak{G}\cdot\mathbf{F}$ имел ту же длину, что и $\mathbf{F}$, для любого $\mathbf{F}$ должно выполняться следующее условие:

$$(\mathfrak{G}\cdot\mathbf{F})\cdot(\mathfrak{G}\cdot\mathbf{F}) = \sum_{l,n}\left[\sum_m \gamma_{mn}\gamma_{ml}\right]F_nF_l = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F} = \sum_n F_n^2, \quad l,\ m,n = x,y,z,$$

или, другими словами,

$$\sum_m \gamma_{mn}\gamma_{ml} = \delta_{nl} = \begin{cases} 1, & l = n, \\ 0, & l \neq n. \end{cases} \tag{1.6.11}$$

Аффиноры, составляющие которых удовлетворяют этому условию, называются (по причине, которая вскоре будет ясной) унитарными аффинорами[1]). Между прочим, если γ удовлетворяют этому условию, то, как легко показывается, для любой пары векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ их скалярное произведение $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ остается неизменным при преобразовании, осуществляемом $\mathfrak{G}$:

$$(\mathfrak{G}\cdot\mathbf{A})\cdot(\mathfrak{G}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B},$$

а следовательно (так как длины векторов остаются неизменными), оператор $\mathfrak{G}$ сохраняет неизменными и углы между векторами. Легко показать также, что если аффиноры $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ представляют жесткое вращение, то и аффинор $\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{H}$ имеет составляющие, удовлетворяющие соотношениям (1.6.11), т. е. также представляет жесткое вращение. Таким образом, произведение унитарных аффиноров есть также унитарный аффинор.

Оказывается, что всевозможные вещественные значения составляющих γ, соответствующие всем вещественным вращениям вокруг центра, могут быть выражены через эйлеровы углы вращения, фигурирующие

[1]) Действительные матрицы, элементы которых удовлетворяют условиям (1.6.11), принято называть ортогональными. Унитарными матрицами называются матрицы с комплексными элементами, удовлетворяющими условиям, которые, в случае если все элементы действительны, превращаются в условия (1.6.11). — *Прим. ред.*

в формулах (1.3.8). Если составляющие аффинора $\mathfrak{G}$ имеют вид

$$\gamma_{xx} = \sin\psi \sin\Phi + \cos\psi \cos\Phi \cos\theta,$$
$$\gamma_{xy} = \cos\psi \sin\Phi - \sin\psi \cos\Phi \cos\theta, \quad \gamma_{xz} = \sin\theta \cos\Phi,$$
$$\gamma_{yx} = \sin\psi \cos\Phi - \cos\psi \sin\Phi \cos\theta,$$
$$\gamma_{yy} = \cos\psi \cos\Phi + \sin\psi \sin\Phi \cos\theta, \quad \gamma_{yz} = -\sin\theta \sin\Phi,$$
$$\gamma_{zx} = -\cos\psi \sin\theta, \quad \gamma_{zy} = \sin\psi \sin\theta, \quad \gamma_{zz} = \cos\theta,$$

то, как видно на рис. 1.12, это преобразование соответствует повороту жесткого векторного репера на угол ψ вокруг оси z с последующим поворотом на угол θ вокруг оси y и заключительным поворотом (уже повернутого репера) еще раз вокруг оси z на угол $-\Phi$.

Несложные выкладки показывают, что оператор $\mathfrak{G}$, составляющие которого имеют указанный выше вид, удовлетворяет условиям (1.6.11) и тем самым обладает всеми свойствами поворота осей. Действительно, прежде всего аффинор, соответствующий произведению $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — унитарны, также унитарен и представляет вращение, получающееся в результате поворота осей на углы, определяемые аффинором $\mathfrak{B}$ с последующим поворотом на углы, определяемые аффинором $\mathfrak{A}$. Поэтому утверждение, сделанное в предыдущем абзаце, означает, что $\mathfrak{G}$ с указанными составляющими равно произведению $\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}$, где три унитарных множителя имеют вид

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и представляют соответственно элементарные повороты на три эйлеровых угла. Составляющие этого произведения вычисляются по формулам (1.6.6′).

Причина, по которой эти вращающие аффиноры называются унитарными, состоит в том, что определитель, составленный из их элементов, равен 1 [как легко усматривается с помощью соотношений (1.6.11)]. Но еще более полезное свойство может быть обнаружено сопоставлением определений обратного и сопряженного аффинора с соотношениями (1.6.11). Оказывается, что если $\mathfrak{G}$ — унитарный аффинор [удовлетворяющий условиям (1.6.11)], то

$$\mathfrak{G}^{-1} = \mathfrak{G}^*, \text{ или } \mathfrak{G}^*\cdot\mathfrak{G} = \mathfrak{J}. \tag{1.6.12}$$

Обратно, если для некоторого аффинора $\mathfrak{G}$ выполняются соотношения (1.6.12), то его составляющие удовлетворяют условиям (1.6.11). Так как $\mathfrak{G}^*\cdot\mathfrak{G}$ отдаленно напоминает квадрат длины вектора, то можно сказать, что «величина» унитарного аффинора равна «единице».

Возвращаясь к формулам (1.3.8) поворота системы координат, мы видим, что если вектор $\mathbf{F}$ разложен на составляющие по осям x, y, z, то составляющие $\mathfrak{G}\cdot\mathbf{F}$ являются составляющими $\mathbf{F}$ по осям ξ_1, ξ_2, ξ_3. Таким образом, унитарный аффинор $\mathfrak{G}$ представляет изменение составляющих вектора, происходящее вследствие поворота системы координат. Поэтому вместо того, чтобы рассматривать систему координат как фиксированную, а вектор как изменяющийся, мы можем в данном случае рассматривать вектор как неизменный по длине и направлению, а сис-

тему координат — как вращающуюся, причем новые составляющие вектора $\mathbf{F}$ определяются из $\mathfrak{G}\cdot\mathbf{F}$[1]).

Если унитарный аффинор может представлять изменение составляющих вектора в результате поворота осей координат, то возникает вопрос, нельзя ли изменения составляющих общего аффинора $\mathfrak{A}$ в результате того же поворота осей также выразить через тот же унитарный аффинор. Ответ должен быть положительным, как это можно усмотреть из последнего равенства (1.6.1) или из следующих рассуждений: если $\mathfrak{G}$ — унитарный аффинор, представляющий поворот осей, и если $\mathfrak{A}$ — любой аффинор, преобразующий вектор $\mathbf{A}$ в вектор $\mathbf{B}$, $\mathfrak{A}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{B}$, то $\mathfrak{G}\cdot\mathbf{A}$ и $\mathfrak{G}\cdot\mathbf{B}$ дают соответственно новые составляющие $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$; из соотношения же между $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ мы находим, что

$$\mathfrak{G}\cdot\mathbf{B}=\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathbf{A}=(\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{G}^{-1})\cdot(\mathfrak{G}\cdot\mathbf{A})=(\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{G}^{*})\cdot(\mathfrak{G}\cdot\mathbf{A}),$$

т. е. что аффинор $\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{G}^{*}$ переводит преобразованный вектор $\mathbf{A}$ в преобразованный вектор $\mathbf{B}$, а это, очевидно, и является *определением преобразованного аффинора* $\mathfrak{A}$. Другими словами, составляющие аффинора $\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{G}^{*}$ являются составляющими $\mathfrak{A}$ в новой системе координат, полученной поворотом, производимым унитарным аффинором $\mathfrak{G}$.

В частности, если $\mathfrak{G}_A$ представляет поворот осей x, y, z, переводящий их в главные оси симметричного аффинора $\mathfrak{A}_s$, то преобразованный аффинор $\mathfrak{G}_A\cdot\mathfrak{A}_s\cdot\mathfrak{G}_A^{*}$ имеет простую диагональную форму

$$\mathfrak{G}_A\cdot\mathfrak{A}_s\cdot\mathfrak{G}_A^{*}=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0\\ 0 & 0 & A_3\end{pmatrix}.$$

Независимо от того, какой поворот представляется унитарным аффинором $\mathfrak{G}$ с вещественными составляющими, преобразованный аффинор $\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{G}^{-1}=\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{G}^{*}$ симметрический, если $\mathfrak{A}$ симметрический, и кососимметрический, если $\mathfrak{A}$ кососимметрический.

Аффинорные поля. До сих пор мы рассматривали свойства аффинора в отдельной точке пространства. Аффинорное поле есть совокупность девяти величин, преобразующихся по формулам (1.6.1) и являющихся функциями x, y, z или ξ_1, ξ_2, ξ_3. В каждой точке пространства аффинор представляет собой оператор, переводящий вектор в данной точке в другой вектор, причем само преобразование вектора в вектор меняется от точки к точке. С другой точки зрения можно сказать, что коэффициент расширения, главные оси и вектор вращения аффинора — все являются функциями точки.

Аффинорное поле $\mathfrak{A}$ с составляющими A_{mn} может быть получено ковариантным дифференцированием векторного поля $\mathbf{F}$ [см. формулу (1.5.8)]

$$\begin{aligned}
A_{mn}&=\left(\frac{1}{h_m h_n}\right)f_{m,n}=\left(\frac{1}{h_m h_n}\right)(h_m F_m)_{,n},\\
A_{mm}&=\frac{\partial}{\partial\xi_m}\left(\frac{F_m}{h_m}\right)+\frac{1}{h_m}\sum_n\frac{F_n}{h_n}\frac{\partial h_m}{\partial\xi_n},\\
A_{mn}&=\frac{1}{h_n}\frac{\partial F_m}{\partial\xi_n}-\frac{F_n}{h_m h_n}\frac{\partial h_n}{\partial\xi_m},\quad m\neq n.
\end{aligned}\tag{1.6.13}$$

[1]) Более точно: старые компоненты вектора $\mathbf{F}$ выражаются через новые, полученные после преобразования осей аффинором $\mathfrak{G}$, по тем же формулам, по которым (старые) компоненты $\mathfrak{G}\cdot\mathbf{F}$ выражаются через (старые же) компоненты $\mathbf{F}$. Чтобы выражать по тем же формулам новые компоненты через старые, надо оси координат преобразовать аффинором $\mathfrak{G}^{*}$. — *Прим. ред.*

Как уже было показано [формула (1.5.10) и далее], коэффициент расширения $|\mathfrak{A}|$ этого аффинора равен $\operatorname{div}\mathbf{F}$, а вектор вращения $\langle\mathfrak{A}\rangle = \operatorname{rot}\mathbf{F}$. Этот аффинор, следовательно, симметрический только тогда, когда $\mathbf{F}$ — безвихревой вектор.

Аффинор, определенный формулами (1.6.13), может быть символически записан в виде $\mathbf{F}\nabla$ [1]) с составляющими по осям x, y, z, задаваемыми формулой

$$\begin{gathered}\mathfrak{A} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{i}\mathbf{A}_x^* + \mathbf{j}\mathbf{A}_y^* + \mathbf{k}\mathbf{A}_z^*,\\ \mathbf{A}_x^* = \operatorname{grad}F_x,\quad \mathbf{A}_y^* = \operatorname{grad}F_y,\quad \mathbf{A}_z^* = \operatorname{grad}F_z.\end{gathered} \tag{1.6.14}$$

Сопряженным аффинором, очевидно, является

$$\mathfrak{A}^* = \nabla\mathbf{F} = \mathbf{i}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z} = \mathbf{A}_x^*\mathbf{i} + \mathbf{A}_y^*\mathbf{j} + \mathbf{A}_z^*\mathbf{k}.$$

Приращение вектора $\mathbf{F}$, соответствующее вектору $d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz$, получается воздействием оператора $\nabla\mathbf{F}$ на $d\mathbf{r}$

$$d\mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{F}) = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y}dy + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z}dz = d\mathbf{F}. \tag{1.6.15}$$

Симметрический аффинор, соответствующий $\nabla\mathbf{F}$, равен, конечно, $\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{F} + \mathbf{F}\nabla)$; он имеет равный нулю вектор вращения.

Изменение аффинорного поля от точки к точке может быть вычислено при помощи дифференциального оператора ∇. Например,

$$\nabla\cdot\mathfrak{A} = \mathbf{i}\cdot(\partial\mathfrak{A}/dx) + \mathbf{j}\cdot(\partial\mathfrak{A}/\partial y) + \mathbf{k}\cdot(\partial\mathfrak{A}/\partial z)$$

есть вектор, который получается в результате ковариантного дифференцирования соответствующего смешанного тензора с последующим свертыванием возникающего тензора третьего порядка

$$\left(\frac{1}{h_n}\right)\sum_m a_{n,\,m}^m = \left(\frac{1}{h_n}\right)\sum_m\left(\frac{h_n A_{mn}}{h_m}\right)_{,\,m} = (\nabla\cdot\mathfrak{A})_n.$$

С помощью разложения на *составляющие векторы*, приведенного в формуле (1.6.7), для этого вектора получаем выражение $(\partial\mathbf{A}_x/\partial x) + (\partial\mathbf{A}_y/\partial y) + (\partial\mathbf{A}_z/\partial z)$, тогда как сопряженный вектор

$$\mathfrak{A}\cdot\nabla = \nabla\cdot\mathfrak{A}^* = \mathbf{i}\,(\operatorname{div}\mathbf{A}_x) + \mathbf{j}\,(\operatorname{div}\mathbf{A}_y) + \mathbf{k}\,(\operatorname{div}\mathbf{A}_z). \tag{1.6.16}$$

Физический смысл этого вектора будет рассмотрен ниже.

Существует также аффинор, образованный при помощи оператора ротора

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathfrak{A} &= \mathbf{i}\times\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x} + \mathbf{j}\times\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial y} + \mathbf{k}\times\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial z} =\\ &= \mathbf{i}\left(\frac{\partial\mathbf{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathbf{A}_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial\mathbf{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathbf{A}_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial\mathbf{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathbf{A}_x}{\partial y}\right) =\\ &= (\operatorname{rot}\mathbf{A}_x^*)\,\mathbf{i} + (\operatorname{rot}\mathbf{A}_y^*)\,\mathbf{j} + (\operatorname{rot}\mathbf{A}_z^*)\,\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{1.6.17}$$

Наряду с этими дифференциальными свойствами аффиноров имеют место также интегральные свойства, аналогичные теоремам Гаусса и Стокса [формулы (1.4.7) и (1.4.11)]. Для интеграла, распространенного

[1]) При этом надо иметь в виду, что здесь, вопреки обычным правилам, дифференцирование в ∇ действует на $\mathbf{F}$, хотя ∇ и стоит позади $\mathbf{F}$. — *Прим. ред.*

по замкнутой поверхности, имеем

$$\oint d\mathbf{A}\cdot\mathfrak{B} = \int \nabla\cdot\mathfrak{B}\,dv, \tag{1.6.18}$$

где интеграл в правой части распространяется по объему «внутри» поверхности и элемент поверхности $d\mathbf{A}$ направлен «изнутри» во внешнее пространство, а $\mathfrak{B}$ — произвольный аффинор. Каждый из интегралов является, конечно, вектором. Для криволинейного интеграла по замкнутому контуру имеем

$$\oint d\mathbf{s}\cdot\mathfrak{B} = \int d\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathfrak{B}), \tag{1.6.19}$$

где интеграл в правой части распространяется по поверхности, опирающейся на этот контур, а $\mathfrak{B}$ — произвольный аффинор.

Деформация упругих тел. Важным приложением аффинорной алгебры является представление деформации упругих тел. Твердое тело движется и вращается как целое, но упругое тело способно еще, кроме того, изменять взаимное расположение своих внутренних частей. Для такого тела смещение части, находившейся в исходном положении в точке (x, y, z), выражается суммой трех векторов

$$\mathbf{D}(x, y, z) = \mathbf{T} + \mathbf{P}(x, y, z) + \mathbf{s}(x, y, z),$$

где $\mathbf{T}$ — постоянный вектор, представляющий средний перенос тела, $\mathbf{P}$ — часть смещения, учитывающая среднее вращение вокруг центра тяжести, и $\mathbf{s}$ — дополнительное смещение, возникающее благодаря деформации тела. По определению, $\mathbf{s}$ равен нулю в центре тяжести тела и равен нулю всюду, если тело абсолютно твердое.

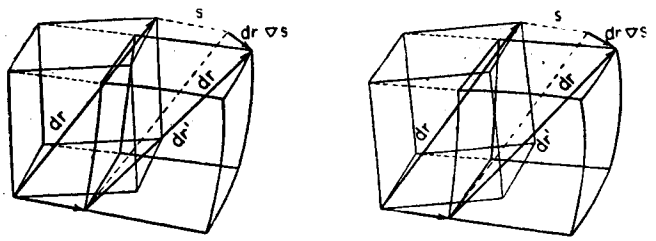

Рис. 1.19. Смещения в упругой среде, вызывающие смещение $\mathbf{s}$ относительно центра массы и деформацию, представляемую аффинором $\mathfrak{D} = \nabla\mathbf{s}$.

Вообще говоря, $\mathbf{s}$ гораздо меньше, чем могут быть $\mathbf{T}$ и $\mathbf{P}$. Сейчас мы забудем про $\mathbf{T}$ и $\mathbf{P}$ и сосредоточим наше внимание исключительно на $\mathbf{s}$, так как мы не интересуемся движением тела в целом, а только его внутренними смещениями и деформациями.

Относительное смещение $\mathbf{s}$ не является, однако, хорошей мерой локальной деформации упругой среды, так как $\mathbf{s}$ является полным относительным смещением точки (x, y, z), которое даже при сравнительно равномерном распределении напряжений в среде может быть тем больше, чем дальше точка (x, y, z) отстоит от центра тяжести. Нам нужна дифференциальная величина, измеряющая деформацию *в точке* (x, y, z). Она получается вычислением изменения вектора $d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz$, соединяющего точки (x, y, z) и $(x+dx, y+dy, z+dz)$ деформированного тела. Точка (x, y, z) смещается на вектор $\mathbf{s}(x, y, z)$, а точка $(x+dx, y+dy, z+dz)$ — на вектор $\mathbf{s}(x+dx, y+dy, z+dz)$. Изменение $d\mathbf{r}$ вследствие

деформации с точностью до величин второго порядка малости равно

$$dx\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x}+dy\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y}+dz\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z}=\mathbf{dr}\cdot\nabla\mathbf{s}$$

[в силу формулы (1.6.15)]. Поэтому вектор $\mathbf{dr}$ переходит при деформации в вектор $\mathbf{dr}'$, характеризующий новое относительное положение точек, где

$$\mathbf{dr}'=\mathbf{dr}\cdot(\mathfrak{J}+\mathfrak{D});\qquad \mathfrak{D}=\nabla\mathbf{s}. \tag{1.6.20}$$

Аффинор $\mathfrak{D}$ является дифференциальным оператором, характеризующим деформацию в точке (x, y, z). Как было разъяснено на стр. 64, он может быть разбит на симметрическую и кососимметрическую части:

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{R}+\mathfrak{S},\quad \mathfrak{R}=-\frac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathbf{s})\times\mathfrak{J},$$

$$\mathfrak{S}=\mathbf{i}e_{11}\mathbf{i}+\mathbf{j}e_{22}\mathbf{j}+\mathbf{k}e_{33}\mathbf{k}+e_{12}(\mathbf{ij}+\mathbf{ji})+e_{13}(\mathbf{ik}+\mathbf{ki})+e_{23}(\mathbf{jk}+\mathbf{kj})=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{s}+\mathbf{s}\nabla),$$

$$e_{11}=\frac{\partial s_x}{\partial x}\ \text{и т. д.},\qquad e_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_x}{\partial y}+\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)\ \text{и т. д.} \tag{1.6.21}$$

Аффинор $\mathfrak{R}$ соответствует вращению элемента объема вокруг (x, y, z), производимому деформацией среды. Ось вращения лежит в направлении $\operatorname{rot}\mathbf{s}$, а угол вращения, измеренный в радианах, равен длине $\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{s}$. Отметим, что этот член *не* происходит от вращения тела как целого (так как эта часть движения была нами специально исключена из рассмотрений); он фигурирует вследствие закручивания материала при деформации. Этот тип вращения отсутствует, если $\operatorname{rot}\mathbf{s}=0$.

Симметрический аффинор $\mathfrak{S}$ называется *аффинором чистой деформации* в точке (x, y, z). Если он равен нулю, то в рассматриваемой точке напряженное состояние отсутствует.

Как уже указывалось, всегда можно найти три взаимно-ортогональных направления — главные оси с единичными векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, с помощью которых симметрический аффинор $\mathfrak{S}$ представляется в виде

$$\mathfrak{S}=\mathbf{a}_1e_1\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2e_2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3e_3\mathbf{a}_3. \tag{1.6.22}$$

Три величины e_1, e_2, e_3 называются *главными удлинениями* в точке (x, y, z). Прямоугольный параллелепипед со сторонами $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$, ребра которого направлены вдоль главных осей, после деформации остается

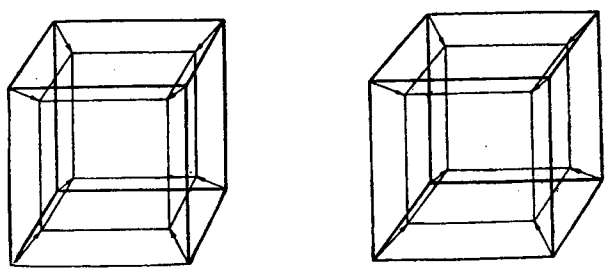

Рис. 1.20. Изменение элемента упругой среды при простом сжатии.

прямоугольным параллелепипедом (что уже не будет иметь места, если его ребра наклонены к главным осям), но длины его сторон станут равными $(1+e_1)\,d\xi_1$, $(1+e_2)\,d\xi_2$, $(1+e_3)\,d\xi_3$. Поэтому относительное *увеличение объема* параллелепипеда равно

$$\theta=e_1+e_2+e_3=e_{11}+e_{22}+e_{33}=\operatorname{div}\mathbf{s}=|\mathfrak{D}|. \tag{1.6.23}$$

Величина θ, коэффициент расширения аффинора $\mathfrak{D}$ (в любой системе координат), называется *коэффициентом объемного расширения* среды

в точке (x, y, z). Этот коэффициент θ также равен относительному *уменьшению плотности* среды в точке (x, y, z) (с точностью до малых второго порядка относительно величин e).

Типы деформаций. Простейшим типом напряженного состояния является тот, которому соответствует постоянный аффинор, не зависящий от положения точки; такая деформация называется *однородной*. Простейшим типом однородной деформации является *простое растяжение*, соответствующее смещению $\mathbf{s}$ и аффинору чистой деформации $\mathfrak{S}$, заданным формулами

$$\mathbf{s} = e(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}), \qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{S} = e\mathfrak{J}. \tag{1.6.24}$$

Этот тип деформации изотропен; любые оси являются главными осями; отсутствует вращение вследствие деформации. Коэффициент объемного расширения $\theta = 3e$.

Другой тип однородной деформации, называемый *чистым сдвигом*, получается при $e_1 = -e_2 = \frac{1}{2}e$, $e_3 = 0$, так что

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}e(x\mathbf{i} - y\mathbf{j}), \qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{S} = \frac{1}{2}e(\mathbf{ii} - \mathbf{jj}).$$

Коэффициент объемного расширения равен нулю, так как растяжение вдоль оси x компенсируется сжатием вдоль оси y. Если повернуть систему

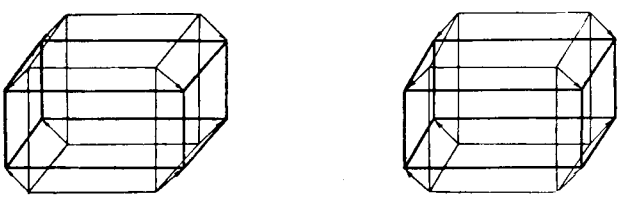

Рис. 1.21. Изменение элемента упругой среды при чистом сдвиге, задаваемом аффинором $e(\mathbf{ii} - \mathbf{jj})$.

координат на 45° вокруг оси z ($\sqrt{2}x = x' + y'$, $\sqrt{2}y = x' - y'$), то смещение и аффинор чистой деформации примут вид

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}e(x'\mathbf{j}' + y'\mathbf{i}'), \qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{S} = \frac{1}{2}e(\mathbf{i}'\mathbf{j}' + \mathbf{j}'\mathbf{i}').$$

Этот тип деформации называется *чистым сдвигом*. Если его сочетать с жестким вращением среды на угол, равный $\frac{1}{2}e$ радиан, соответствующим аффинору $\mathfrak{R} = -\frac{1}{2}e(\mathbf{i}'\mathbf{j}' - \mathbf{j}'\mathbf{i}')$, то результирующее смещение и сдвиг

$$\mathbf{s} = ey'\mathbf{i}', \qquad \mathfrak{D} = e\mathbf{j}'\mathbf{i}' \tag{1.6.25}$$

соответствуют так называемому *простому сдвигу в направлении* y'. Все смещение происходит в направлении оси x', слои среды скользят друг над другом, как это можно проделать с колодой игральных карт.

Другой тип однородной деформации с коэффициентом объемного расширения, равным нулю, соответствует растяжению в направлении оси x и соответствующему сжатию в направлениях осей y и z

$$\mathbf{s} = e\left(x\mathbf{i} - \frac{1}{2}y\mathbf{j} - \frac{1}{2}z\mathbf{k}\right), \qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{S} = e\left(\mathbf{ii} - \frac{1}{2}\mathbf{jj} - \frac{1}{2}\mathbf{kk}\right). \tag{1.6.26}$$

Такого рода деформация возникает в материале типа резины, который растягивается в направлении оси x. Эту деформацию можно назвать *растяжением с сохранением объема*.

Самая общая однородная деформация, отнесенная к ее главным осям, может быть получена наложением простого растяжения, сдвига и растяжения с сохранением объема по всем трем направлениям. Последующий поворот осей дает наиболее общий вид для $\mathbf{s}$ и $\mathfrak{S}$.

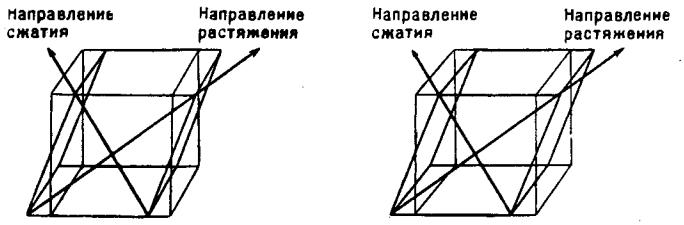

Рис. 1.22. Изменение элемента упругой среды при простом сдвиге, задаваемом аффинором $e\mathbf{ji}$.

Простым типом неоднородной деформации является винтовое закручивание в направлении оси x:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{s} = ex\,(y\mathbf{k} - z\mathbf{j}),\\
&\mathfrak{D} = \mathfrak{R} + \mathfrak{S} = e\,[\mathbf{i}y\mathbf{k} - \mathbf{i}z\mathbf{j} + \mathbf{j}x\mathbf{k} - \mathbf{k}x\mathbf{j}], \qquad (1.6.27)\\
&\mathfrak{R} = \frac{1}{2}\,e\,[2x\,(\mathbf{jk} - \mathbf{kj}) + y\,(\mathbf{ik} - \mathbf{ki}) + z\,(\mathbf{ji} - \mathbf{ij})] = -e\left[x\mathbf{i} - \frac{1}{2}y\mathbf{j} - \frac{1}{2}z\mathbf{k}\right]\times\mathfrak{J},\\
&\mathfrak{S} = e\,[y\,(\mathbf{ki} + \mathbf{ik}) - z\,(\mathbf{ij} + \mathbf{ji})].
\end{aligned}$$

Это соответствует повороту элемента в точке (x, y, z) вокруг оси x на угол в ex радиан [член $ex\mathbf{jk} - ex\mathbf{kj}$ в $\mathfrak{D}$, см. формулу (1.6.10)] и сдвигу в направлении оси x, пропорциональному длине вектора $\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, соединяющему точку (x, y, z) с осью x [член $ey\mathbf{ik} - ez\mathbf{ij}$ в $\mathfrak{D}$, см. формулы (1.6.25)].

Напряжения в упругой среде. Силы, действующие внутри упругой среды, которые вызывают деформации, называются *напряжениями*. Они

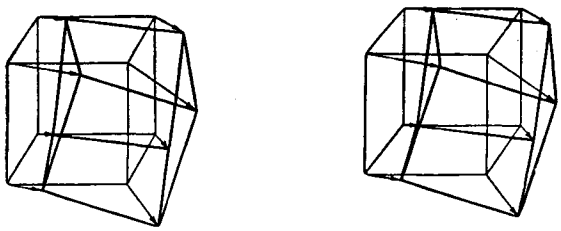

Рис. 1.23. Изменение элемента упругой среды при кручении, задаваемом формулами (1.6.27).

также лучше всего представляются аффинорами. Сила, действующая на элемент $dy\,dz$, перпендикулярный оси x, равна $\mathbf{F}_x\,dy\,dz$, где $\mathbf{F}_x$ не обязан быть параллелен оси x. Аналогично обозначим через $\mathbf{F}_y$ и $\mathbf{F}_z$ силы, действующие на элементы, перпендикулярные к осям y и z, и отнесенные к единице площади. Легко может быть показано, что сила, действующая на элемент площади, представленный аксиальным вектором $\mathbf{dA}$, равна $\mathfrak{T}\cdot\mathbf{dA}$, где

$$\mathfrak{T} = \mathbf{F}_x\mathbf{i} + \mathbf{F}_y\mathbf{j} + \mathbf{F}_z\mathbf{k}.$$

Более подробное рассмотрение соотношения между силами $\mathbf{F}$ и площадями $d\mathbf{A}$ подтверждает, что $\mathfrak{T}$ является аффинором и преобразуется как всякий аффинор.

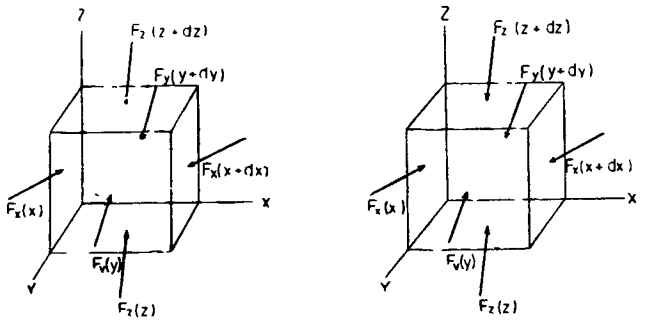

Рис. 1.24. Силы, действующие на грани элемента упругой среды, соответствующие аффинору напряжений $\mathbf{F}_x\mathbf{i}+\mathbf{F}_y\mathbf{j}+\mathbf{F}_z\mathbf{k}$.

При статическом равновесии эти силы не должны приводить во вращение ни одну часть среды. Рассмотрение моментов, действующих на элемент объема среды, показывает, что

$$(\mathbf{F}_x)_y=(\mathbf{F}_y)_x \quad \text{и т. д.}$$

Следовательно, аффинор $\mathfrak{T}$ — симметрический и равен своему сопряженному $\mathfrak{T}^*=\mathbf{i}\mathbf{F}_x+\mathbf{j}\mathbf{F}_y+\mathbf{k}\mathbf{F}_z$. При помощи главных осей и соответствующих ортогональных единичных векторов $\mathbf{a}_n$ мы можем записать $\mathfrak{T}$ в виде

$$\mathfrak{T}=T_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1+T_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2+T_3\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3,$$

где постоянные T_n называются *главными напряжениями* по главным осям. Существуют различные простые типы напряжений, аналогичные рассмотренным типам деформаций. Если, например, $T_2=T_3=0$, то мы имеем *растягивающее напряжение* вдоль направления $\mathbf{a}_1$; если $T_2=-T_1$ и $T_3=0$, то мы имеем *срезывающее напряжение*, и т. д. Скаляр $|\mathfrak{T}|$ равен утроенному давлению в точке, взятому с обратным знаком.

Статическая взаимосвязь между напряжением и деформацией в изотропном упругом теле. Если некоторая среда может находиться в равновесии при наличии срезывающих напряжений, то говорят, что она упругая. Если упругие свойства среды не зависят от направления, то она называется *изотропной*. Когда оба эти требования выполняются, то оказывается, что главные оси деформации всюду совпадают с главными осями напряжений и что деформации, порождаемые тремя главными напряжениями, независимы друг от друга и аддитивны. Например, эффект главного напряжения T_1 состоит в простом объемном расширении и удлинении в направлении $\mathbf{a}_1$. Другими словами, уравнениями, связывающими главные напряжения и главные удлинения, будут

$$T_n=\lambda(e_1+e_2+e_3)+2\mu e_n, \qquad n=1,\ 2,\ 3,$$

где постоянные λ и μ определены упругими свойствами среды.

В декартовой системе координат x, y, z аффиноры напряжений и деформаций принимают более общий симметрический вид

$$\mathfrak{T}=T_{xx}\mathbf{i}\mathbf{i}+\ \ldots\ +T_{xy}(\mathbf{i}\mathbf{j}+\mathbf{j}\mathbf{i})+\ \ldots\ ,$$
$$\mathfrak{S}=e_{xx}\mathbf{i}\mathbf{i}+\ \ldots\ +e_{xy}(\mathbf{i}\mathbf{j}+\mathbf{j}\mathbf{i})+\ \ldots\ .$$

Уравнения, связывающие $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{S}$ и их составляющие, могут быть получены преобразованием главных осей

$$\begin{aligned} &\mathfrak{T} = \lambda\,|\,\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{J} + 2\mu\mathfrak{S}, \\ &T_{xx} = \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2\mu e_{xx} \quad \text{и т. д.}, \\ &T_{xy} = 2\mu e_{xy} \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{1.6.28}$$

Когда напряжения представляют собой изотропное давление, $\mathfrak{T} = -P\mathfrak{J}$, деформация является всесторонним сжатием и

$$\mathfrak{S} = -\frac{P}{3\lambda + 2\mu}\mathfrak{J}.$$

Константа $\frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu) = P/\theta$ является поэтому *модулем всестороннего сжатия* изотропной упругой среды. Если напряжение срезывающее $\mathfrak{T} = S(\mathbf{ii} - \mathbf{jj})$, то деформация является чистым сдвигом $\mathfrak{S} = \frac{1}{2}(S/\mu)(\mathbf{ii} - \mathbf{jj})$, так что μ есть *модуль сдвига* среды. Когда напряжение описывается аффинором $\mathfrak{T} = T\mathbf{ii}$, т. е. является простым растяжением в направлении оси x, аффинор деформации имеет вид

$$\mathfrak{S} = \frac{T}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}[2(\lambda + \mu)\mathbf{ii} - \lambda(\mathbf{jj} + \mathbf{kk})];$$

он представляет растяжение в направлении оси x и сжатие в направлениях осей y и z. Величина $\mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ называется *модулем Юнга* материала. Отношение поперечного сжатия к продольному растяжению $\lambda/2(\lambda + \mu)$ называется *коэффициентом Пуассона*.

Аффинорные операторы. Для того чтобы иметь возможность рассмотреть связь между аффинором напряжений и аффинором деформаций для неизотропных сред, мы должны ввести операторы, которые преобразуют аффиноры подобно тому, как аффиноры преобразуют векторы. Составляющие должны иметь четыре индекса и должны преобразовываться по формулам, аналогичным формулам (1.6.1),

$$(G_{ijkl})' = \sum_{mnrs} \gamma_{im}\gamma_{jn}\gamma_{kr}\gamma_{ls}G_{mnrs}.$$

Эти операторы могут быть названы *тетрадиками* (tetradic) и обозначены древнееврейскими буквами (чтобы отличить их от других операторов). Например, символ, представляющий 81 составляющую G_{ijkl}, пусть будет $\mathfrak{J}$ (гимель), а соотношение, определяющее характер преобразования аффинора, имеет вид

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{J} : \mathfrak{A}, \quad \text{или} \quad B_{mn} = \sum_{rs} G_{mnrs}A_{rs}. \tag{1.6.29}$$

Тетрадик может быть представлен через неопределенное произведение двух аффиноров аналогично тому, как аффинор может быть представлен через неопределенное произведение двух векторов. Особенно простым тетрадиком, например, является $\mathfrak{Y}$ (аин) $= \mathfrak{J}\mathfrak{J}$, который преобразует всякий аффинор в постоянную, умноженную на идемфактор:

$$\mathfrak{Y} : \mathfrak{B} = |\,\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{J}, \quad Y_{mnrs} = \delta_{mn}\delta_{rs}.$$

Существует, конечно, единичный тетрадик $\mathfrak{I}$ (иод), который воспроизводит любой аффинор, и сопряженный к нему $\mathfrak{I}^*$:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{I} : \mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \quad (\mathfrak{I}^*) : \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*, \\ &I_{mnrs} = \delta_{mr}\delta_{ns}, \quad I^*_{mnrs} = \delta_{ms}\delta_{nr}. \end{aligned}$$

В этих обозначениях аффинор напряжений выражается для изотропных тел через аффинор чистой деформации следующим образом:

$$\mathfrak{T} = [\lambda \mathfrak{Y} + \mu \mathfrak{Y} + \mu \mathfrak{Y}^*] : \mathfrak{S},$$

где тетрадик в квадратных скобках имеет столь простой вид благодаря изотропности среды. Для неизотропных сред это соотношение более сложно, и составляющие тетрадика $\mathfrak{T}$ (далет)

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T} : \mathfrak{S}, \quad T_{mn} = \sum_{rs} D_{mnrs} S_{rs},$$

в основном, не равны нулю. Так как и $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{S}$—симметрические аффиноры, то должны иметь место равенства $D_{mnrs} = D_{nmrs}$ и $D_{mnrs} = D_{mnsr}$, а также $D_{mnrs} = D_{rsmn}$. Благодаря этим симметриям число независимых составляющих $\mathfrak{T}$ сводится к 21. Эти составляющие называются *упругими константами* неизотропного тела.

Можно было бы развить анализ тетрадиков, определить их «главные оси» и остальные свойства вполне аналогично тому, как мы это делали для аффиноров. Однако недостаток места и меньшая значимость этого вопроса для наших целей не позволяют нам этого.

Комплексные числа и кватернионы как операторы. Прежде чем мы перейдем к менее известным полям, полезно сделать обзор одного типа векторных операторов, который настолько известен, что часто упускается из виду. Использование комплексных чисел для представления векторов в двух измерениях тривиально, но не всегда достаточно ясно понимают, что комплексное число может также представлять линейный векторный оператор в двух измерениях.

Комплексные числа и функции комплексного переменного будут подробно рассмотрены в гл. 4, так как мы во всей книге будем пользоваться комплексными числами при решении наших задач. Все, что нам нужно здесь, состоит в следующем: вещественная единица 1 может рассматриваться как единичный вектор вдоль оси x, а мнимая единица $i = \sqrt{-1}$ — как единичный вектор вдоль оси y; тогда двумерный вектор с составляющими x и y может быть представлен комплексным числом $z = x + iy$. Такая величина удовлетворяет обычным правилам сложения векторов (т. е. для этого нужно сложить составляющие) и умножения на скаляр (т. е. $az = ax + iay$).

Вектор, являющийся зеркальным отображением z в оси x, называется *комплексно-сопряженным* к z, $\bar{z} = x - iy$. Угол между z и осью x равен $\operatorname{arctg}(y/x)$, а квадрат длины z равен $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2 = \bar{z}z$. Заметим, что умножение комплексных чисел не соответствует правилам умножения трехмерных векторов. Если $z = x + iy$ и $w = u + iv$, то $wz = zw = (ux - vy) + i(uy + vx)$ вновь является *вектором* в плоскости x, y. Произведение wz не является ни скалярным произведением этих векторов (скалярное произведение $ux + vy$ является вещественной частью $w\bar{z}$), ни их векторным произведением (векторное произведение по величине равнялось бы мнимой части $w\bar{z}$, но его направление должно было бы быть перпендикулярно к w и к z, что требует третьего измерения). Фактически произведение wz двух комплексных чисел в большей степени соответствует воздействию аффинора w особого рода на вектор z.

Операция умножения на w изменяет и направление и длину z. Чтобы записать это в обычной векторной и аффинорной форме, надо было бы вектор z записать в виде $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, а аффинор w — в виде $u\mathbf{ii} - v\mathbf{ij} + v\mathbf{ji} + u\mathbf{jj}$, т. е. в виде комбинации кососимметрического аффинора $v(\mathbf{ji} - \mathbf{ij})$ и сим-

метрического аффинора $u(\mathbf{ii}+\mathbf{jj})$ с главными осями по осям x и y Этот аффинор, очевидно, не является самым общим двумерным линейным оператором (так как он содержит только два независимых параметра); это — оператор особенно простого типа, который, как мы сейчас увидим, изменяет направление любого вектора на постоянный угол, а его длину в постоянном отношении.

Комплексное число, символически представляемое в показательной форме $e^{i\theta}$ (где θ — вещественное число), по формуле Эйлера равно

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Рассматривая его как оператор, мы заключаемое, что оно *поворачивает любой вектор* z на угол θ радиан (против часовой стрелки) и *не изменяет длины* z. Следовательно, оператор $w = Ce^{i\theta}\,[C^2 = u^2 + v^2,\ \ \theta = \operatorname{arctg}(v/u)]$, будучи умножен на любой вектор $z = x + iy$, поворачивает z на угол θ и увеличивает его длину в C раз. Многие наши решения будут иметь вид произведения некоторой комплексной величины ψ на временной множитель $e^{-i\omega t}$. Этот множитель вращает вектор ψ с постоянной угловой скоростью ω, и если (как это часто бывает) физическое решение является вещественной частью указанного произведения, то решение будет синусоидально колебаться во времени с циклической частотой $\nu = \omega/2\pi$.

Распространение этого типа представления величин на трехмерное пространство невозможно, вследствие чего мы и должны применять более сложный аппарат векторов и аффиноров. Гамильтон показал, однако, что векторы и операторы в *четырехмерном* пространстве могут быть представлены при помощи довольно очевидного обобщения комплексных чисел, так называемых *кватернионов*.

Пусть число 1 представляет единичный вектор в четвертом измерении, и обозначим единичные векторы в трехмерном пространстве через i, j, k, правила перемножения которых аналогичны правилам для $\sqrt{-1}$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Тогда трехмерный вектор можно представить величиной $ix + jy + kz$, а общий кватернион $q = a + ib + jc + kd$ представляет четырехмерный вектор. Сопряженный четырехмерный вектор имеет вид $q^* = a - ib - jc - kd$, так что квадрат длины q равен $|q|^2 = q^*q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, что является простым распространением правила для обычных комплексных чисел на кватернионы.

Как и для комплексных чисел, произведение кватернионов pq может рассматриваться как результат операции, переводящей четырехмерный вектор q в четырехмерный вектор pq. Если $q = a + ib + jc + kd$ и $p = \alpha + i\beta + j\gamma + k\delta$, то

$$pq = (\alpha a - \beta b - \gamma c - \delta d) + i(\alpha b + \beta a + \gamma d - \delta c) + \\ + j(\alpha c - \beta d + \gamma a + \delta b) + k(\alpha d + \beta c - \gamma b + \delta a) \qquad (1.6.30)$$

является новым кватернионом, представляющим новый четырехмерный вектор. Отметим, что умножение кватернионов некоммутативно, т. е. что $pq \neq qp$. Мы не можем продолжать это рассмотрение дальше, хотя связь между кватернионами и пространственно-временными векторами в теории относительности будет еще упомянута ниже (заметим лишь, что p не может представлять самый общий четырехмерный аффинор).

Полезно, однако, рассмотреть один специальный кватернион, который является интересным обобщением комплексного числа $e^{i\theta}$. Применяя правила умножения для i, j, k и разлагая показательную функцию в ряд,

можно показать, что если $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, то

$$e^{\theta(i\alpha+j\beta+k\gamma)}=\cos\theta+\sin\theta\,(i\alpha+j\beta+k\gamma),$$

что является аналогом формулы Эйлера для $e^{i\theta}$. Показатель представляет собой трехмерный вектор длины θ и направления, определяемого направляющими косинусами α, β, γ, тогда как все выражение является кватернионом единичной длины. Отметим, что *любой* кватернион может быть представлен в виде

$$Qe^{\theta(i\alpha+j\beta+k\gamma)},$$

где Q — длина четырехмерного вектора, а угол θ и направляющие косинусы определяют направление вектора в четырехмерном пространстве. Можно ожидать, что, по аналогии с комплексным числом $e^{i\theta}$, этот оператор (при $Q=1$) каким-то образом связан с оператором вращения, хотя ясно, что эта связь не может быть столь простой, как в комплексной плоскости.

Правильный путь здесь может подсказать следующее интересное соотношение: если f — вектор в кватернионном обозначении $f=ix+jy+kz$, то кватернион

$$f'=x'i+y'j+z'k=e^{(\theta/2)(i\alpha+j\beta+k\gamma)}fe^{-(\theta/2)(i\alpha+j\beta+k\gamma)},$$

где $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ представляет вектор, получающийся из вектора f *поворотом на угол* θ *вокруг оси* с направляющими косинусами α, β, γ. Заметим, что угол поворота вокруг этой оси равен θ, а не $\theta/2$. Это можно показать в общем случае, однако выкладка становится проще, если мы возьмем частный случай вращения вокруг оси x. Тогда мы имеем

$$f'=e^{\theta i/2}\,(ix+jy+kz)\,e^{-\theta i/2}=$$
$$=ix+j\,(y\cos\theta-z\sin\theta)+k\,(y\sin\theta+z\cos\theta),$$

что соответствует повороту y- и z-составляющих f на угол θ в плоскости yz, т. е. повороту всего вектора f на угол θ вокруг оси x. Доказательство в общем случае требует более громоздких выкладок.

Мы можем следующим образом обобщить этот результат: пусть дан кватернион q, выраженный через его длину Q и «оператор направления» $e^{\theta(i\alpha+j\beta+k\gamma)}$; мы можем формально образовать «квадратные корни» из него

$$\zeta=\sqrt{Q}\,e^{(\theta/2)(i\alpha+j\beta+k\gamma)}\quad\text{и}\quad\zeta^*=\sqrt{Q}\,e^{-(\theta/2)(i\alpha+j\beta+k\gamma)}.$$

Тогда вектор $f=ix+jy+kz$ преобразуется в вектор f', направление которого получается из направления вектора f поворотом на угол θ вокруг оси с направляющими косинусами α, β, γ и длина которого равна длине вектора f, т. е. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, умноженной на Q; это преобразование осуществляется при помощи операции

$$f'=\zeta f\zeta^*.$$

Последующая такая же операция еще одного вращения и изменения длины, представляемая кватернионами η и η^*, дает

$$f''=\eta f'\eta^*=\eta\zeta f\zeta^*\eta^*.$$

Геометрический факт, что два последовательных вращения дают различные результаты в зависимости от порядка, в котором они выполняются, находит свое выражение в том, что произведение кватернионов η и ζ (так же, конечно, как и η^* и ζ^*) некоммутативно. Число Q называется *тензором* (tensor на латинском языке — «растягивающий»), а показательный множитель — *верзором* (versor — «поворачивающий») оператора ζ.

Самый общий поворот четырехмерного вектора, представляемого кватернионом $q = w + ix + jy + kz$, дается формулой

$$q' = e^{\theta(i\alpha + j\beta + k\gamma)} q e^{-\varphi(i\lambda + j\mu + k\nu)},$$

где $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ и $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$. Когда и θ и φ — мнимые углы, то это преобразование соответствует преобразованию Лоренца, рассмотренному в следующем параграфе.

В дальнейших частях этой главы и в § 2.6 нам придется рассматривать обобщения верзора $\mathfrak{Q} = e^{i\mathfrak{A}}$, где $\mathfrak{A}$ — общий аффинорный оператор. Эта функция всегда связана с вращением вектора $\mathbf{F}$, на который действует оператор $\mathfrak{A}$, и во многих случаях преобразование вращения представляется формулой

$$\mathbf{F}' = \mathfrak{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathfrak{Q}^*,$$

как и в случае кватернионов.

Абстрактные векторные пространства. Трехмерные понятия векторов и аффинорных операторов, рассмотренные нами выше, могут быть обобщены на абстрактные пространства с любым числом измерений, часто даже со счетным множеством измерений. Это обобщение стало одним из наиболее мощных математических орудий, в особенности потому, что оно позволяет синтезировать и яснее понимать очень многие результаты из самых различных областей. Мы кратко рассмотрим здесь это обобщение, иллюстрируя его физическими примерами.

Один из простейших примеров использования абстрактного векторного пространства встречается при применении нормальных координат для описания движения связанных осцилляторов. Число нормальных координат, т. е. число измерений соответствующего пространства, равно числу степеней свободы осциллятора. Конфигурация, или *состояние*, системы описывается вектором в этом пространстве. Главные оси пространства соответствуют особым «элементарным» состояниям движения, причем самое общее движение оказывается линейной суперпозицией этих «элементарных» состояний.

Эти движения можно уяснить себе рассмотрением системы на рис. 1.25. «Элементарных» движений — два: (1) массы колеблются в одном и том же направлении, т. е. двигаются вместе; (2) массы колеблются в противоположных направлениях, т. е. сначала движутся друг к другу, затем друг от друга и т. д. Эти движения называются элементарными, так как существует определенная простая частота для каждого из типов движений. Самое общее движение системы является линейной суперпозицией этих «элементарных» движений и в результате не имеет определенной частоты.

Построим теперь двумерное пространство, нужное нам для описания этой системы. Мы можем, например, откладывать смещение x_1 одной из масс по какой-либо оси, а смещение x_2 другой массы по перпендикулярной оси. Пусть $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — единичные векторы в направлении этих осей; тогда общий вектор в этом пространстве $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$.

Уравнения движения имеют вид

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)\, x_1 + k_2 x_2, \quad m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -(k_1 + k_2)\, x_2 + k_2 x_1$$

или в векторной форме

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\mathfrak{A} \cdot \mathbf{r},$$

где $\mathfrak{A}$ — аффинор $\mathbf{e}_1A_{11}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1A_{12}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2A_{21}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2A_{22}\mathbf{e}_2$, и

$$A_{11} = k_1 + k_2, \quad A_{12} = -k_2 = A_{21}, \quad A_{22} = k_1 + k_2.$$

«Элементарные» движения $\mathbf{R}$ имеют определенную угловую частоту ω, и поэтому они должны удовлетворять уравнению $\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -\omega^2\mathbf{R}$;

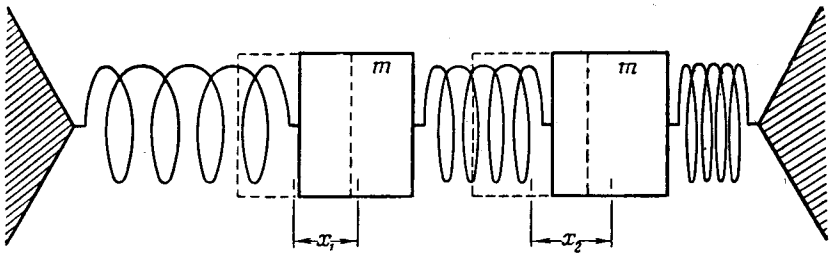

Рис. 1.25. Связанные осцилляторы.

следовательно, уравнение движения для $\mathbf{R}$ примет вид

$$\begin{vmatrix} A_{11} - m\omega^2 & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Используя полученные выше результаты, мы найдем, что существуют два элементарных решения $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, ортогональных друг к другу. Их направления можно, очевидно, использовать для новых осей координат, так что любой вектор в этом двумерном пространстве (т. е. любое движение) может быть представлен в виде линейной суперпозиции двух элементарных движений. Квадрат косинуса угла между вектором $\mathbf{F}$ и осью $\mathbf{R}_1$ дает долю элементарного движения $\mathbf{R}_1$ в движении, представляемом вектором $\mathbf{F}$, и аналогичное значение имеет квадрат косинуса угла между $\mathbf{F}$ и $\mathbf{R}_2$; сумма этих долей равна, как и должно быть, единице (как сумма квадратов направляющих косинусов). Другими словами, квадрат косинуса дает долю общей энергии системы, приходящуюся на движение типа $\mathbf{R}_1$.

Возвращаясь к уравнениям движения, мы теперь видим, что движение системы можно рассматривать как серию последовательных инфинитезимальных поворотов, производимых оператором $\mathfrak{A}$, причем масштаб времени определяется уравнением. Элементарные решения $\mathbf{R}_i$ обладают тем важным свойством, что они не поворачиваются со временем, так как оператор $\mathfrak{A}$, действуя на $\mathbf{R}_i$, восстанавливает его направление без изменений. Таким образом, $\mathbf{R}_i$ являются *стационарными* состояниями движения.

Эти рассуждения можно, конечно, распространить на случай N масс, последовательно соединенных пружинами. Такая система может служить одномерной моделью кристалла. Для этой системы потребуется пространство N измерений. Мы будем иметь N элементарных состояний движения, которые определяют систему фиксированных взаимно-ортогональных направлений в абстрактном векторном пространстве.

Собственные векторы и собственные значения. Геометрический характер этих абстрактных пространств полностью определяется оператором $\mathfrak{A}$. Главные оси оператора идут по направлениям векторов $\mathbf{e}_n$ (мы будем через $\mathbf{e}_n$ обозначать единичные векторы в абстрактном пространстве в отличие от обозначения $\mathbf{a}_n$ единичного вектора в обычном

трехмерном пространстве), которые определяются уравнением

$$\mathfrak{A}\cdot\mathbf{e}_n = A_n\mathbf{e}_n, \tag{1.6.31}$$

где A_n — числа, называемые *собственными значениями* $\mathfrak{A}$. Векторы $\mathbf{e}_n$, называемые *собственными векторами* $\mathfrak{A}$, взаимно-ортогональны и служат для определения осей координат в пространстве. Любой вектор в этом пространстве является тогда линейной комбинацией собственных векторов. Это наводит на естественную мысль о целесообразности классификации различных типов операторов, встречающихся в физике, и рассмотрения соответствующих абстрактных векторных пространств. Мы более или менее полно охватим все случаи, если ограничимся операторами, встречающимися в квантовой механике.

Операторы в квантовой механике. Абстрактная формулировка квантовой механики, данная Дираком и фон Нейманом, опирается в значительной степени на понятия, возникающие при рассмотрении связанных осцилляторов, проведенном выше. Состояние системы описывается вектором абстрактного пространства, обычно бесконечномерного. Определение термина «состояние», употребляемого здесь, несколько затруднительно; он указывает на некоторую связь между типом системы, которую мы рассматриваем (числом частиц, видами сил и т. п.), начальными условиями для положения или скорости и т. д. и методами, применяемыми для наблюдения системы; все это станет в дальнейшем ясным. Один из основных постулатов квантовой теории состоит в том, что наблюдение системы нарушает, т. е. изменяет, ее состояние. В абстрактном векторном пространстве это означает, что вектор, представляющий состояние системы, испытывает в результате наблюдения, например положения частицы или ее энергии, некоторый поворот. Так как поворот может быть совершен при помощи аффинорного оператора в абстрактном пространстве, мы приходим к заключению, что *наблюдение должно быть представлено оператором*. Таким образом, механические величины, как, например, энергия, положение, импульс и др., должны быть представлены операторами. (Следовало бы говорить, что *наблюдение* этих величин должно быть представлено операторами, но удобнее говорить более кратко, как мы это сделали в предыдущей фразе.)

Как можно точно определить эти механические величины, имея в виду, что измерение энергии и т. п. изменяет состояние системы?

Наши предыдущие рассуждения приводят к мысли, что это окажется возможным только для некоторых специальных состояний, именно для состояний, описываемых собственными векторами (главными осями в случае обычного пространства) соответствующих операторов. Например, собственные векторы оператора энергии $\mathfrak{E}$ удовлетворяют уравнению

$$\mathfrak{E}\cdot\mathbf{e}_n = E_n\mathbf{e}_n.$$

Это уравнение утверждает, что для собственных векторов $\mathbf{e}_n$ (т. е. для некоторых особых состояний, представляемых направлениями $\mathbf{e}_n$ в векторном пространстве) измерение энергии *не* изменяет состояния системы. Только в этом случае можно быть уверенным в том, что наблюдение дает точное значение энергии.

Каков же смысл постоянной E_n в этом уравнении? Обычно принимается, что можно нормировать оператор $\mathfrak{E}$ так, чтобы E_n были в точности равны энергиям состояний, представляемых векторами $\mathbf{e}_n$. Это, конечно, автоматически имеет место в обычных трехмерных случаях, рассмотренных выше. Например, собственные значения аффинора момента

инерции как раз равны трем главным моментам инерции, а собственные значения аффинора напряжений суть главные напряжения.

Непосредственно очевидно, что такие две величины, как энергия и импульс, будут одновременно измеримы (или *наблюдаемы*, как говорит Дирак), если собственные векторы оператора энергии совпадают с собственными векторами оператора импульса. *Необходимое и достаточное условие для одновременной измеримости двух величин состоит в том, чтобы соответствующие им операторы коммутировали.* Необходимость следует из того факта, что если вектор $\mathbf{e}_n$ является собственным вектором и для $\mathfrak{E}$ и для $\mathfrak{p}$, то $\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{p}\cdot\mathbf{e}_n = \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{E}\cdot\mathbf{e}_n$. Так как по предположению любой вектор является линейной комбинацией (суперпозицией) векторов $\mathbf{e}_n$, то мы найдем, что $\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{p}\cdot\mathbf{e} = \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{E}\cdot\mathbf{e}$ для любого вектора состояния $\mathbf{e}$.

Доказательство достаточности в утверждении, приведенном курсивом, несколько более трудно. Рассмотрим собственный вектор $\mathbf{e}_n$ оператора $\mathfrak{E}$. Предположим коммутативность $\mathfrak{E}\cdot(\mathfrak{p}\cdot\mathbf{e}_n) = E_n(\mathfrak{p}\cdot\mathbf{e}_n)$. Отсюда следует, что $\mathfrak{p}\cdot\mathbf{e}_n$ является собственным вектором оператора $\mathfrak{E}$ с собственным значением E_n. Если существует только один собственный вектор с собственным значением E_n, то мы сразу заключаем, что $\mathfrak{p}\cdot\mathbf{e}_n$ должно быть пропорционально $\mathbf{e}_n$, что и доказывает требуемое утверждение. Если же существуют несколько собственных векторов $\mathbf{e}_{nm}$ с собственным значением E_n (это так называемый случай вырождения), то мы можем только заключить, что $\mathfrak{p}\cdot\mathbf{e}_{ni} = \sum_m p_{mi}\mathbf{e}_{nm}$. В этом подпространстве, в котором все собственные векторы имеют собственное значение E_n, мы можем теперь найти главные оси, т. е. собственные векторы оператора $\mathfrak{p}$ и, таким образом, найти состояния, в которых и $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{E}$ одновременно измеримы.

Очевидным, но важным следствием является то, что если два оператора не коммутируют, то соответствующие величины не могут быть одновременно измеримыми.

Важным примером операторов, не все из которых коммутируют, являются операторы, представляющие положение ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) и соответствующие составляющие импульса ($\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$); для них

$$\begin{aligned} &\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{y}\mathfrak{x} \text{ и т. д.}, && \mathfrak{p}_x\mathfrak{x} - \mathfrak{x}\mathfrak{p}_x = \hbar/i, \\ &\mathfrak{p}_x\mathfrak{p}_y = \mathfrak{p}_y\mathfrak{p}_x \text{ и т. д.}, && \mathfrak{p}_x\mathfrak{y} = \mathfrak{y}\mathfrak{p}_x \text{ и т. д.}^{1)} \end{aligned} \tag{1.6.32}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка h, деленная на 2π. Эти соотношения являются основными уравнениями квантовой теории. (См. далее гл. 2.)

Направляющие косинусы и вероятности. Что можно сказать о состоянии $\mathbf{e}$, если этот вектор является не собственным вектором оператора энергии $\mathfrak{E}$, а линейной комбинацией собственных векторов $\mathbf{e}_n$? Используя аналогию с абстрактным пространством связанных осцилляторов, будем рассматривать квадрат косинуса угла между вектором состояния $\mathbf{e}$ и собственным вектором $\mathbf{e}_n$ как долю $\mathbf{e}$, находящуюся в «состоянии $\mathbf{e}_n$». Чтобы это выразить более физическим языком, можно сказать, что если измеряется энергия ряда идентичных систем, находящихся в состоянии $\mathbf{e}$, то доля числа измерений, дающих энергию E_n, будет равна квадрату косинуса угла между $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}_n$ в абстрактном векторном пространстве системы. Для многих операторов в квантовой механике этот косинус является комплексным числом (что свидетельствует о возможности интерференции между собственными векторами с произвольными фазами). В таком случае употребляется квадрат модуля косинуса. Изменения, кото-

[1]) Здесь и далее при записи произведения операторов, а также оператора и вектора иногда пропускается точка. — *Прим. ред.*

рые надо внести в математический аппарат абстрактного векторного пространства в связи с введением комплексных косинусов, будут рассмотрены ниже.

Вероятности и неопределенности. Применительно к одному измерению мы можем истолковать квадрат модуля косинуса как вероятность того, что состояние $\mathbf{e}$ будет иметь энергию E_n. Среднее значение энергии для состояния $\mathbf{e}$ будет тогда равно $\sum_n E_n (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e})^2$ или $E_{\text{ср}} = (\mathbf{e}\mathfrak{E}\mathbf{e})$. Эта формула правильна только для случая вещественных косинусов; соответствующее обобщение на комплексные косинусы будет дано ниже.

Это позволяет нам рассмотреть результаты измерений двух величин, которые не являются одновременно измеримыми. Допустим, например, что $\mathbf{e}(x)$ — вектор состояния, для которого координата x известна точно. Какова тогда вероятность того, что эта система будет иметь импульс p_x, если собственный вектор этого импульса равен $\mathbf{f}(p_x)$? Наш формализм дает на это следующий ответ: $|\mathbf{e}(x) \cdot \mathbf{f}(p_x)|^2$. Среднее значение импульса равно $\mathbf{e}\mathfrak{p}\mathbf{e}$. Можно также выразить среднеквадратическое уклонение измерения p_x от его среднего

$$(\Delta p_x)^2_{\text{ср}} = \mathbf{e}(\mathfrak{p}_x - p_x)^2 \mathbf{e}.$$

Только когда $\mathbf{e}$ является собственным вектором для $\mathfrak{p}_x$, величина p_x для состояния $\mathbf{e}$ будет точно известна, и тогда мы будем иметь $\Delta p_x = 0$. Величина Δp_x называется *неопределенностью* в измерении p_x.

Комплексное векторное пространство. Мы должны теперь обобщить понятия векторного пространства так, чтобы иметь возможность рассматривать комплексные косинусы. В этом случае длина вектора не может уже определяться суммой квадратов его составляющих по осям координат, так как эти квадраты могут оказаться неположительными, что противоречит нашим обычным представлениям о длине. Ясно, что единственным путем для получения положительных количеств в определении длины является образование суммы квадратов *модулей* составляющих. Простой способ достигнуть этого в рамках нашего формализма состоит в введении второго пространства того же числа измерений, «комплексно-сопряженного» первому. Пусть единичные векторы первого пространства суть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., тогда соответствующие единичные векторы в комплексно-сопряженном пространстве обозначим через $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, ... Каждому вектору $\mathbf{e} = \sum_i A_i \mathbf{e}_i$ с составляющими A_i в первом пространстве сопоставляется в комплексно-сопряженном пространстве вектор $\mathbf{e}^* = \sum_i \mathbf{e}_i^* \bar{A}_i$ с составляющими $\bar{A}_i$ (A_i и $\bar{A}_i$ — комплексно-сопряженные числа). Скалярное произведение (операцию, существенную для определения длины) мы теперь определим следующим образом:

$$\mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Скалярное произведение $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$ не будет определено, да оно и не нужно. Теперь ясно, что длина вектора $\mathbf{e}$ должна быть в данном случае связана с

$$\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} = \sum_i |A_i|^2 \geqslant 0,$$

величиной заведомо неотрицательной. «Длина» $\mathbf{e}$, обозначаемая $|\mathbf{e}|$, определяется как $\sqrt{\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}}$.

Из этих определений вытекает ряд важных следствий. Из них, например, следует, что если $\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{e}=0$, то $|\mathbf{e}|=0$. Легко проверить, что если $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ — два произвольных вектора, то

$$\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{f}=\overline{\mathbf{f}^*\cdot\mathbf{e}}.$$

Векторы в обычном пространстве обладают тем свойством, что их скалярное произведение не больше произведения их длин

$$AB\geqslant\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}.$$

Это так называемое *неравенство Шварца*[1]); в обобщенной форме оно должно также иметь место в абстрактном векторном пространстве, так как оно вытекает из того факта, что квадрат «длины» вектора не может быть меньше нуля, т. е. положителен. Например, если $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ — два вектора а a и b — два комплексных числа, то

$$(\bar{a}\mathbf{e}^*-\bar{b}\mathbf{f}^*)\cdot(a\mathbf{e}-b\mathbf{f})\geqslant 0.$$

Если положить $a=\sqrt{(\mathbf{f}^*\cdot\mathbf{f})(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{f})}$ и $b=\sqrt{(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{e})(\mathbf{f}^*\cdot\mathbf{e})}$, то это неравенство переходит в

$$\sqrt{(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{e})(\mathbf{f}^*\cdot\mathbf{f})}\geqslant\sqrt{(\mathbf{f}^*\cdot\mathbf{e})(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{f})}\ \text{или}\ |\mathbf{e}|\cdot|\mathbf{f}|\geqslant|\mathbf{f}^*\cdot\mathbf{e}|, \tag{1.6.33}$$

что и представляет собой обобщенную форму неравенства Шварца. Это неравенство будет ниже использовано при выводе соотношения неопределенности Гейзенберга.

Другим неравенством, также имеющим свой аналог в обычном векторном пространстве, является *неравенство Бесселя*, которое по существу утверждает, что сумма длин двух сторон треугольника никогда не меньше длины третьей стороны

$$|\mathbf{e}|+|\mathbf{f}|\geqslant|(\mathbf{e}+\mathbf{f})|. \tag{1.6.34}$$

Обобщенные аффиноры. Перейдем теперь к рассмотрению операторов в комплексных векторных пространствах. Рассмотрим сначала линейное преобразование, поворачивающее оси пространства в другую систему ортогональных осей

$$\mathbf{e}_i'=\sum_n\mathbf{e}_n\gamma_{ni},$$

где $\mathbf{e}_i'$ — единичный вектор в направлении i-й оси новой системы координат, а $\mathbf{e}_n$ — единичные векторы в исходной системе. Соотношение между $\mathbf{e}_i'$ и $(\mathbf{e}_i')^*$ должно быть таким же, как и между любыми двумя сопряженными векторами, так что

$$(\mathbf{e}_i')^*=\sum_n\bar{\gamma}_{ni}\mathbf{e}_n^*.$$

Мы можем теперь составить аффинорный оператор, который, действуя на вектор $\mathbf{e}_i$, переводит его в новый вектор $\mathbf{e}_i'$. Этот аффинор имеет вид

$$\mathfrak{G}=\sum_{n,i}\mathbf{e}_n\gamma_{ni}\mathbf{e}_i^*, \tag{1.6.35}$$

так что

$$\mathfrak{G}\mathbf{e}_i=\sum_n\mathbf{e}_n\gamma_{ni}=\mathbf{e}_i'.$$

[1]) В нашей литературе оно обычно более правильно называется неравенством Коши—Буняковского. —*Прим. ред.*

Структура аффинора показывает, что мы должны векторы без звездочки помещать всегда при умножении *справа* от оператора, а векторы с звездочкой — *слева*. Полезное свойство аффинорного оператора выражается формулой

$$(\mathbf{e}^*\mathfrak{G})\,\mathbf{f} = \mathbf{e}^*\,(\mathfrak{G}\mathbf{f}),$$

так что скобки вообще не нужны, и мы будем, как правило, писать просто $\mathbf{e}^*\cdot\mathfrak{G}\cdot\mathbf{f}$.

Наше обобщение таково, что произведение операторов, как и произведение обычных аффиноров, есть вновь оператор

$$\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{L} = \Big(\sum_{n,i}\mathbf{e}_n\gamma_{ni}\mathbf{e}_i^*\Big)\cdot\Big(\sum_{j,k}\mathbf{e}_j\lambda_{jk}\mathbf{e}_k^*\Big) = \sum_{n,k}\mathbf{e}_n\Big(\sum_j\gamma_{ni}\lambda_{jk}\Big)\mathbf{e}_k^*,$$

так что $(n,\ k)$-я составляющая оператора $\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{L}$ равна

$$(\mathfrak{G}\mathfrak{L})_{nk} = \sum_j\gamma_{nj}\lambda_{jk}.$$

Возвращаясь теперь к оператору вращения $\mathfrak{G}$, определенному формулой (1.6.35), мы замечаем, что $\mathbf{e}_j^*\cdot\mathfrak{G}$ не дает $(\mathbf{e}_j')^*$. Оператор, вращающий $\mathbf{e}_i^*$, обозначим через $\mathfrak{G}^*$ и определим его так, чтобы

$$\mathbf{e}_i^*\mathfrak{G}^* = (\mathbf{e}_i')^*.$$

Таким образом, оператор $\mathfrak{G}^*$ связан с оператором $\mathfrak{G}$ соотношением

$$(\mathfrak{G}\cdot\mathbf{e}_i)^* = \mathbf{e}_i^*\cdot\mathfrak{G}^*.$$

Оператор $\mathfrak{G}^*$, связанный с оператором $\mathfrak{G}$ таким соотношением, называется *эрмитово-сопряженным* к $\mathfrak{G}$. Записывая это соотношение при помощи составляющих, мы находим

$$\sum_n\mathbf{e}_n^*\bar{\gamma}_{ni} = \sum_n(\gamma^*)_{in}\mathbf{e}_n^*,$$

так что

$$\gamma_{ni} = (\gamma^*)_{in}. \tag{1.6.36}$$

Это равенство означает, что $(i,\ n)$-я составляющая эрмитово-сопряженного аффинора $\mathfrak{G}^*$ получается образованием комплексно-сопряженного числа к $(n,\ i)$-составляющей $\mathfrak{G}$. Понятие эрмитовой сопряженности есть обобщение понятия сопряженного аффинора, данного на стр. 61. Эрмитово-сопряженный оператор к произведению двух операторов $\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{L}$ есть $(\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{L})^* = \mathfrak{L}^*\cdot\mathfrak{G}^*$. Эрмитово-сопряженный оператор к произведению комплексного числа на оператор есть произведение комплексно-сопряженного числа на эрмитово-сопряженный оператор.

Эрмитовы операторы. Самосопряженный оператор (совпадающий со своим эрмитово-сопряженным), т. е. такой, что

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^*, \quad \text{или} \quad \gamma_{nm} = \bar{\gamma}_{mn},$$

называется *эрмитовым оператором*. Все классические симметрические аффинорные операторы являются эрмитовыми, так как их составляющие вещественны. Операторы в квантовой механике, соответствующие измеримым величинам, также должны быть эрмитовы, так как их собственные значения должны быть вещественны (ведь в конечном счете результаты фактических измерений суть вещественные числа). Чтобы это доказать, заметим, что если собственные значения a_n оператора $\mathfrak{A}$ вещественны, то $\mathbf{e}^*\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathbf{e}$ вещественно для любого $\mathbf{e}$, так как $\mathbf{e}$ можно разложить по собственным векторам $\mathbf{e}_n$, что даст для $\mathbf{e}^*\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathbf{e}$ ряд с вещественными

членами. Пусть $\mathbf{e}=\mathbf{f}+b\mathbf{g}$; тогда $\bar{b}(\mathbf{g}^*\cdot\mathfrak{K}\cdot\mathbf{f})+b(\mathbf{f}^*\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathbf{g})$ вещественно. Но это возможно только в том случае, когда $\mathbf{g}^*\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathbf{f}$ комплексно сопряжено с $\mathbf{f}^*\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathbf{g}$, т. е. равно $\mathbf{g}^*\cdot\mathfrak{A}^*\cdot\mathbf{f}$. Следовательно, $\mathbf{g}^*\cdot(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}^*)\cdot\mathbf{f}=0$ для любых $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$, а поэтому $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^*$.

Оператор поворота $\mathfrak{G}$, определенный формулой (1.6.35), принадлежит к еще более узкому классу. Составляющие γ_{mn} являются направляющими косинусами, так что следует ожидать, что оператор имеет в каком-то смысле «единичную длину». Так как поворот осей координат в векторном пространстве не изменяет величины скалярного произведения, то для произвольных векторов состояния $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ должно быть

$$(\mathbf{e}^*\cdot\mathfrak{G}^*)\cdot(\mathfrak{G}\cdot\mathbf{f})=\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{f}.$$

Поэтому $\mathfrak{G}^*\cdot\mathfrak{G}=\mathfrak{J}$, где $\mathfrak{J}$ — идемфактор $\sum\limits_n \mathbf{e}_n\mathbf{e}_n^*$. Это показывает, что эрмитово-сопряженный оператор к $\mathfrak{G}$ совпадает с его обратным оператором:

$$\mathfrak{G}^*=\mathfrak{G}^{-1}.$$

Такой оператор с «единичной длиной» называется *унитарным оператором*. Оператор поворота, определенный формулой (1.6.35), является унитарным оператором [см. также формулы (1.6.12)].

Большинство операторов в квантовой механике эрмитовы; их собственные значения вещественны, но эффект их приложения к векторам состояний состоит и в повороте и в изменении длины. Кроме того, встречаются и несколько полезных унитарных операторов; их собственные значения не все вещественны, но эффект их приложения к векторам состояний состоит только во вращении без изменения длины.

Примеры унитарных операторов. Важные примеры унитарных операторов встречаются в теории распространения волн, квантовой механике и кинетической теории газов. Например, описание того, как в месте сопряжения двух волноводов (скажем, разного поперечного сечения) отражаются волны, распространяющиеся вдоль них, может быть дано с помощью *аффинора отражения*. Этот оператор переводит в соответствующем абстрактном пространстве собственный вектор падающей волны в собственный вектор отраженной волны. Условие унитарности является по существу требованием консервативности процесса. Равенство $\mathfrak{G}^*=\mathfrak{G}^{-1}$ сводится к теореме взаимности, т. е. взаимозаменяемости источника и приемника. Мы подробнее остановимся на этом в дальнейших главах.

Унитарный оператор может быть построен из эрмитова оператора $\mathfrak{L}$ следующим образом:

$$\mathfrak{G}=(1+i\mathfrak{L})/(1-i\mathfrak{L})\ ^{1)}.$$

Оператор, эрмитово-сопряженный к $\mathfrak{G}$, равен $(1-i\mathfrak{L})/(1+i\mathfrak{L})$, так что $\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{G}^*=\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{G}$ унитарно. Если $\mathfrak{G}$ — аффинор отражения, то формула для $\mathfrak{G}$ дает соотношение, существующее между коэффициентами отражения, составляющими $\mathfrak{G}$, и коэффициентами *импеданса*, составляющими аффинор импеданса $\mathfrak{L}$.

Другим способом получения из эрмитова оператора $\mathfrak{K}$ унитарного оператора $\mathfrak{G}$ является следующий:

$$\mathfrak{G}=e^{i\mathfrak{K}}, \tag{1.6.37}$$

---

[1]) десь и в некоторых местах далее 1 означает идемфактор $\mathfrak{J}$. — *Прим. ред.*

где $e^{i\mathfrak{K}}$ определено степенным рядом $1+i\mathfrak{K}+\frac{1}{2}(i\mathfrak{K})^2+\cdots$. Для $\mathfrak{G}=(1+i\mathfrak{L})/(1-i\mathfrak{L})$ мы имеем, например, $\mathfrak{G}=e^{i\mathfrak{K}}$, где $\mathfrak{K}=2\operatorname{arctg}\mathfrak{L}$. В терминах приведенного выше физического примера это последнее преобразование соответствует использованию для описания отраженной волны сдвига фаз при отражении вместо самого коэффициента отражения.

Часто вектор является функцией параметра (в качестве типичного параметра мы возьмем время t), причем вектор вращается при изменении параметра. Унитарный оператор, соответствующий этому вращению, оказывается полезным во многих задачах. Нетрудно вывести его общий вид. Назовем его $\mathfrak{D}(t)$. Тогда по нашему определению

$$\mathfrak{D}(t_1)\,\mathbf{e}(t_0)=\mathbf{e}(t_1+t_0),$$

где t_1 и t_0 — частные значения параметра t. Более того,

$$\mathfrak{D}(t_2)\,\mathfrak{D}(t_1)\,\mathbf{e}(t_0)=\mathbf{e}(t_1+t_0+t_2)=\mathfrak{D}(t_1+t_2)\,\mathbf{e}(t_0),$$

так что

$$\mathfrak{D}(t_2)\,\mathfrak{D}(t_1)=\mathfrak{D}(t_1+t_2).$$

Чтобы это равенство имело место для всех t_2 и t_1, $\mathfrak{D}$ должно быть показательной функцией t. Так как этот оператор должен быть унитарным, то он должен иметь вид

$$\mathfrak{D}=e^{i\mathfrak{H}t},$$

где $\mathfrak{H}$ — некоторый неизвестный эрмитов оператор.

Чтобы найти уравнение вращательного движения вектора $\mathbf{e}$, мы приложим $\mathfrak{D}$ к $\mathbf{e}(t)$, изменяя t на инфинитезимальное dt. Тогда $\mathfrak{D}=1+i\mathfrak{H}\,dt$, так что

$$(1+i\mathfrak{H}\,dt)\,\mathbf{e}(t)=\mathbf{e}(t+dt),\ \text{или}\ \mathfrak{H}\mathbf{e}(t)=\frac{1}{i}\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t}. \tag{1.6.38}$$

Оператор $\mathfrak{H}$ находится, конечно, из физических соображений. В квантовой механике, например, если t — время, то $\mathfrak{H}$ пропорционален функции Гамильтона, в которой классические переменные — импульсы и координаты положения заменены соответствующими операторами.

Преобразование операторов. В предыдущем рассмотрении мы имели дело с вращением вектора при изменении параметра, от которого он зависит. Этот эффект изменения параметра может быть получен также вращением «пространства» при фиксированном векторе, т. е. приданием параметрической зависимости всем встречающимся операторам. Другими словами, мы изменяем значение операторов при изменении параметра, оставляя векторы неподвижными. Посмотрим, как это должно быть сделано, чтобы получить картину, эквивалентную той, которую мы имели при вращающихся векторах и фиксированных операторах. Пусть вращение векторов задается унитарным оператором

$$\mathfrak{G}\mathbf{e}=\mathbf{e}',\ \mathfrak{G}\mathbf{f}=\mathbf{f}'\ \text{и т. д.}$$

Соответствующее эквивалентное изменение $\mathfrak{L}$ на $\mathfrak{L}'$ можно найти, исходя из требования, чтобы соотношение между $\mathfrak{L}\cdot\mathbf{e}'$ и $\mathbf{f}'$ (первая картина: $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ изменяются, $\mathfrak{L}$ не изменяется) было бы такое же, как между $\mathfrak{L}'\cdot\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ (вторая картина: $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ не изменяются, $\mathfrak{L}$ преобразовывается в $\mathfrak{L}'$). В алгебраической записи

$$\mathbf{f}'^*\cdot\mathfrak{L}\cdot\mathbf{e}'=\mathbf{f}^*\cdot\mathfrak{L}'\cdot\mathbf{e}.$$

Подставляя сюда соотношение между $\mathbf{f}'$ и $\mathbf{f}$ и вспоминая, что $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^{-1}$, мы найдем, что

$$\mathbf{f}'^*.\mathfrak{L}\cdot\mathbf{e}' = \mathbf{f}^*\cdot(\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{L}\mathfrak{G})\cdot\mathbf{e}, \text{ или } \mathfrak{L}' = \mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{L}\mathfrak{G}. \tag{1.6.39}$$

Исследуем теперь эффект этого унитарного (или, как его иногда называют, *канонического*) преобразования с точки зрения свойств $\mathfrak{L}$. Сначала покажем, например, что собственные значения $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}'$ совпадают. Пусть

$$\mathfrak{L}'\mathbf{e} = L'\mathbf{e}.$$

Отсюда

$$(\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{L}\mathfrak{G})\cdot\mathbf{e} = L'\mathbf{e}.$$

Умножая обе части на $\mathfrak{G}$, получим

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{G}\mathbf{e}) = L'(\mathfrak{G}\mathbf{e}).$$

Это означает, что если $\mathbf{e}$ — собственный вектор оператора $\mathfrak{L}'$ с собственным значением L', то $\mathfrak{G}\cdot\mathbf{e}$ — собственный вектор оператора $\mathfrak{L}$ с тем же собственным значением. Это сохранение собственного значения оказывается иногда очень полезным свойством, так как если $\mathfrak{L}$ — сложный оператор, то можно попытаться подобрать такое преобразование $\mathfrak{G}$, которое дает более простой оператор $\mathfrak{L}'$ с собственными значениями, совпадающими с собственными значениями оператора $\mathfrak{L}$.

Вследствие соотношения между оператором и его эрмитово-сопряженным оператором мы можем записать

$$(\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{L}\mathfrak{G})^* = \mathfrak{G}^*\mathfrak{L}^*(\mathfrak{G}^{-1})^* = \mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{L}^*\mathfrak{G}.$$

Следовательно, эрмитов оператор остается эрмитовым и после унитарного преобразования.

Унитарное преобразование не изменяет соотношений между операторами. Например, если

$$\mathfrak{L}\mathfrak{M} = \mathfrak{N},$$

то

$$\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{L}\mathfrak{G}\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{M}\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{N}\mathfrak{G}, \text{ или } \mathfrak{L}'\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}'.$$

Два унитарных преобразования, примененные одно за другим, соответствуют преобразованию, которое также является унитарным. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — унитарные операторы, то

$$(\mathfrak{F}\mathfrak{G})^*\mathfrak{F}\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}^*\mathfrak{F}^*)\mathfrak{F}\mathfrak{G} = \mathfrak{J},$$

что и доказывает наше утверждение.

Мы можем, наконец, рассмотреть, что произойдет с оператором $\mathfrak{L}$ после преобразования унитарным оператором $\mathfrak{D}(t) = e^{i\mathfrak{H}t}$. Это позволит нам вычислить изменение оператора, соответствующее изменению параметра t. Преобразованный оператор

$$e^{-i\mathfrak{H}t}\mathfrak{L}e^{i\mathfrak{H}t} = \mathfrak{L}'.$$

Удобно, очевидно, ввести вместо $\mathfrak{L}'$ обозначение $\mathfrak{L}(t)$, полагая $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(0)$, так что

$$\mathfrak{L}(t) = e^{-i\mathfrak{H}t}\cdot\mathfrak{L}(0)\cdot e^{i\mathfrak{H}t}.$$

Скорость изменения $\mathfrak{L}$ относительно t может быть получена из приращения

$$\mathfrak{L}(t+dt) - \mathfrak{L}(t) = e^{-i\mathfrak{H}\,dt}\cdot\mathfrak{L}(t)\cdot e^{i\mathfrak{H}\,dt} - \mathfrak{L}(t),$$

так что

$$\frac{1}{i}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \mathfrak{L}\cdot\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\cdot\mathfrak{L} \quad [\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(t)]. \tag{1.6.40}$$

Оператор $\mathfrak{H}$ зависит, конечно, от конкретной физической задачи. Например, во многих вопросах квантовой механики $\mathfrak{H}$ является оператором Гамильтона, а t — время; получающееся уравнение называется *уравнением движения Гейзенберга*. Уравнение (1.6.40) имеет широкие приложения; для оператора $\mathfrak{H}$, связанного с параметром вращения t векторов состояния соотношением (1.6.38), производная любого другого оператора $\mathfrak{L}$, связанного с той же системой, пропорциональна коммутатору $\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{L} - \mathfrak{L}\cdot\mathfrak{H}$.

Операторы квантовой механики. Применим теперь некоторые из этих результатов к операторам, встречающимся в квантовой механике. Вспомним, что среднее результатов измерений некоторой величины (энергии, импульса и т. д.), представленной оператором $\mathfrak{p}$, в системе, находящейся в состоянии, изображаемом вектором $\mathbf{e}$, равно $p_{\text{ср.}} = (\mathbf{e}^*\cdot\mathfrak{p}\cdot\mathbf{e})$. Отметим также, что система, находящаяся в состоянии, представляемом вектором $\mathbf{e}$ (коротко, *в* состоянии $\mathbf{e}$), с вероятностью, равной квадрату модуля косинуса угла $|(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{e}')|^2$, оказывается также в состоянии $\mathbf{e}'$.

В силу последнего пункта это утверждение можно сформулировать и в терминах унитарных операторов. Допустим, что мы найдем унитарный оператор $\mathfrak{g}$, переводящий собственный вектор $\mathbf{e}(a_n)$ оператора $\mathfrak{A}$ с собственным значением a_n в собственный вектор $\mathbf{e}'(b_m)$ оператора $\mathfrak{B}$ с собственным значением b_m

$$\mathfrak{g}(a, b)\,\mathbf{e}(a_n) = \mathbf{e}'(b_m).$$

Применяя теперь формулу (1.6.35), мы видим, что *вероятность того, что измерение* $\mathfrak{B}$ *даст значение* b_m, *если* $\mathfrak{A}$ *имеет значение* a_n, равна

$$|\mathbf{e}^*(a_n)\cdot\mathbf{e}'(b_m)|^2 = |\mathbf{e}^*(a_n)\,\mathfrak{g}(a, b)\,\mathbf{e}(a_n)|^2 = |\gamma_{nn}(a, b)|^2. \tag{1.6.41}$$

Здесь можно использовать неравенство Шварца (1.6.33) для установления связи между квантовыми уравнениями (1.6.32) и соотношением неопределенности Гейзенберга. Мы уже показали, что если два оператора не перестановочны, то они не могут быть одновременно измеримыми; если один из них измерен точно, то другой не может быть точно известен. С физической точки зрения что-то, присущее измерению одного, уничтожает наше одновременное точное знание другого. С математической точки зрения существует взаимность между их неопределенностями. Как уже указывалось, неопределенность ΔA в измерении оператора $\mathfrak{A}$ определена формулой

$$(\Delta A)^2 = \mathbf{e}^*\cdot(\mathfrak{A} - a)^2\cdot\mathbf{e}, \quad a = \mathbf{e}^*\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathbf{e}$$

(для состояния $\mathbf{e}$).

Чтобы применить эти общие формулы к квантовым соотношениям (1.6.32), определим операторы

$$\Delta\mathfrak{p}_x = \mathfrak{p}_x - p_x, \quad p_x = \mathbf{e}^*\cdot\mathfrak{p}_x\cdot\mathbf{e},$$
$$\Delta\mathfrak{x} = \mathfrak{x} - x, \quad x = \mathbf{e}^*\cdot\mathfrak{x}\cdot\mathbf{e},$$

так что $\sqrt{\mathbf{e}^*\cdot(\Delta\mathfrak{x})^2\cdot\mathbf{e}}$ есть неопределенность в измерении x в состоянии $\mathbf{e}$. По формулам (1.6.32) мы можем теперь показать, что

$$\Delta\mathfrak{p}_x\cdot\Delta\mathfrak{x} - \Delta\mathfrak{x}\cdot\Delta\mathfrak{p}_x = \hbar/i.$$

Взяв среднее значение этого выражения для состояния $\mathbf{e}$, получим

$$(\Delta\mathfrak{p}_x\cdot\mathbf{e})^*\cdot(\Delta\mathfrak{x}\cdot\mathbf{e})-(\Delta\mathfrak{x}\cdot\mathbf{e})^*(\Delta\mathfrak{p}_x\cdot\mathbf{e})=\hbar/i.$$

Левая часть этого равенства равна удвоенной мнимой части $(\Delta\mathfrak{p}_x\cdot\mathbf{e})^*\cdot(\Delta\mathfrak{x}\cdot\mathbf{e})$, так что мы можем заключить, что

$$|(\Delta\mathfrak{p}_x\cdot\mathbf{e})^*\cdot(\Delta\mathfrak{x}\cdot\mathbf{e})|\geqslant\hbar/2.$$

Но по неравенству Шварца (1.6.33) произведение длин векторов никогда не меньше модуля их скалярного произведения. Таким образом, мы окончательно находим, что

$$(\Delta p_x)(\Delta x)\geqslant\hbar/2.$$

Это неравенство и является знаменитым соотношением неопределенности Гейзенберга. Оно показывает, что одновременное точное измерение какой-либо координаты и соответствующей составляющей импульса невозможно и что если предпринимаются одновременные измерения, то произведение соответствующих неопределенностей не может быть меньше $\hbar/2$.

Спиновые операторы. В предыдущем разделе были высказаны утверждения, имеющие весьма общий характер, и теперь для уяснения некоторых понятий необходимо обратиться к примеру. Для последующего изложения полезен пример спина электрона. Эксперимент показывает, что для составляющей магнитного момента электрона по каждому заданному направлению существуют только два допустимых значения. Поэтому следует ожидать, что подобным же образом будет ограничено и число допустимых значений для собственного момента количества движения электрона. Момент количества движения частицы относительно начала координат выражается через ее положение относительно начала координат и ее импульс $\mathfrak{p}$ следующим образом:

$$\mathfrak{M}_x=\mathfrak{y}\mathfrak{p}_z-\mathfrak{z}\mathfrak{p}_y,\quad \mathfrak{M}_y=\mathfrak{z}\mathfrak{p}_x-\mathfrak{x}\mathfrak{p}_z,\quad \mathfrak{M}_z=\mathfrak{x}\mathfrak{p}_y-\mathfrak{y}\mathfrak{p}_x.$$

Прежде всего мы, используя квантовые уравнения (1.6.32), вычислим коммутатор для компонент $\mathfrak{M}$

$$\begin{gathered}\mathfrak{M}_x\mathfrak{M}_y-\mathfrak{M}_y\mathfrak{M}_x=(\mathfrak{p}_z\mathfrak{z}-\mathfrak{z}\mathfrak{p}_z)(\mathfrak{x}\mathfrak{p}_y-\mathfrak{y}\mathfrak{p}_x)=i\hbar\mathfrak{M}_z,\\ \mathfrak{M}_y\mathfrak{M}_z-\mathfrak{M}_z\mathfrak{M}_y=i\hbar\mathfrak{M}_x,\quad \mathfrak{M}_z\mathfrak{M}_x-\mathfrak{M}_x\mathfrak{M}_z=i\hbar\mathfrak{M}_y.\end{gathered}\tag{1.6.42}$$

Эти уравнения показывают, что точно знать все три компоненты спина электрона мы не можем; в самом деле, если мы точно знаем значение $\mathfrak{M}_z$, то мы не можем знать значений $\mathfrak{M}_x$ и $\mathfrak{M}_y$.

Используя эти уравнения попарно, мы можем показать, что

$$\mathfrak{M}_z(\mathfrak{M}_x\pm i\mathfrak{M}_y)-(\mathfrak{M}_x\pm i\mathfrak{M}_y)\mathfrak{M}_z=\pm\hbar(\mathfrak{M}_x\pm i\mathfrak{M}_y)$$

или

$$\mathfrak{M}_z(\mathfrak{M}_x+i\mathfrak{M}_y)=(\mathfrak{M}_x+i\mathfrak{M}_y)(\mathfrak{M}_z+\hbar)$$

и (1.6.43

$$\mathfrak{M}_z(\mathfrak{M}_x-i\mathfrak{M}_y)=(\mathfrak{M}_x-i\mathfrak{M}_y)(\mathfrak{M}_z-\hbar).$$

Пусть известно, что значением $\mathfrak{M}_z$ является $m\hbar$; этому соответствует вектор состояния $\mathbf{a}_m$ (т. е. $\mathbf{a}_m$ служит собственным вектором $\mathfrak{M}_z$ соответствующим собственному значению $m\hbar$). Отправляясь от этого вектора состояния $\mathbf{a}_m$, мы видим, что вектор $(\mathfrak{M}_x+i\mathfrak{M}_y)\mathbf{a}_m$ является собственным вектором для $\mathfrak{M}_z$, соответствующим собственному значению $(m+1)\hbar$, если только $(\mathfrak{M}_x+i\mathfrak{M}_y)\mathbf{a}_m$ отличен от нуля, и что $(\mathfrak{M}_x-i\mathfrak{M}_y)\mathbf{a}_m$ является

собственным вектором для $\mathfrak{M}_z$, соответствующим собственному значению $(m-1)\hbar$, если только $(\mathfrak{M}_x - i\mathfrak{M}_y)\mathbf{a}_m$ отличен от нуля, так как из уравнений (1.6.43) имеем

$$\mathfrak{M}_z(\mathfrak{M}_x + i\mathfrak{M}_y)\mathbf{a}_m = (\mathfrak{M}_x + i\mathfrak{M}_y)[(\mathfrak{M}_z + \hbar)\mathbf{a}_m] = \\ = (m+1)\hbar[(\mathfrak{M}_x + i\mathfrak{M}_y)\mathbf{a}_m] \quad \text{и т. д.}$$

В частном случае спина электрона мы для обозначения момента количества движения будем пользоваться буквой $\mathfrak{S}$, вместо буквы $\mathfrak{M}$. Для того чтобы m имело только два допустимых значения, отличающихся друг от друга на единицу (как того требуют записанные выше уравнения), и для того, чтобы эти значения были симметричными относительно направления оси z, допустимыми значениями $\mathfrak{S}_z$ должны служить $+\hbar/2$ (с собственным вектором $\mathbf{a}_+$) и $-\hbar/2$ (с собственным вектором $\mathbf{a}_-$) и должны удовлетворяться соотношения

$$(\mathfrak{S}_x + i\mathfrak{S}_y)\mathbf{a}_+ = 0 \quad \text{и} \quad (\mathfrak{S}_x - i\mathfrak{S}_y)\mathbf{a}_- = 0.$$

Следовательно, спиновые операторы действуют на эти два собственные вектора, а также умножаются друг на друга по следующим правилам:

$$\begin{gathered} \mathfrak{S}_x\mathbf{a}_+ = (\hbar/2)\mathbf{a}_-, \quad \mathfrak{S}_y\mathbf{a}_+ = (i\hbar/2)\mathbf{a}_-, \quad \mathfrak{S}_z\mathbf{a}_+ = (\hbar/2)\mathbf{a}_+, \\ \mathfrak{S}_x\mathbf{a}_- = (\hbar/2)\mathbf{a}_+, \quad \mathfrak{S}_y\mathbf{a}_- = -(i\hbar/2)\mathbf{a}_+, \quad \mathfrak{S}_z\mathbf{a}_- = -(\hbar/2)\mathbf{a}_-, \\ \mathfrak{S}_x\mathfrak{S}_y = (i\hbar/2)\mathfrak{S}_z = -\mathfrak{S}_y\mathfrak{S}_x, \quad \mathfrak{S}_y\mathfrak{S}_z = (i\hbar/2)\mathfrak{S}_x = -\mathfrak{S}_z\mathfrak{S}_y, \\ \mathfrak{S}_z\mathfrak{S}_x = (i\hbar/2)\mathfrak{S}_y = -\mathfrak{S}_x\mathfrak{S}_z, \quad (\mathfrak{S}_x)^2 = (\mathfrak{S}_y)^2 = (\mathfrak{S}_z)^2 = (\hbar/2)^2. \end{gathered} \tag{1.6.44}$$

Здесь мы имеем довольно простое обобщение понятия оператора. «Спиновое пространство» является двумерным пространством, одно из направлений которого соответствует тому состоянию, при котором z-составляющая спина наверняка равна $\hbar/2$, а перпендикулярное направление соответствует тому состоянию, при котором $\mathfrak{S}_z$ наверняка равняется $-\hbar/2$. (Теперь делается очевидным, что это пространство состояний является удобной математической фикцией и не имеет ничего общего с «реальным» пространством.) Единичный вектор состояния, имеющий промежуточное направление, соответствует такому состоянию, при котором $\mathfrak{S}_z$ иногда бывает положительной величиной и иногда отрицательной, а относительная частота двух этих исходов зависит от квадрата косинуса угла между этим единичным вектором и двумя осями координат для $\mathfrak{S}_z$.

Оператор $2\mathfrak{S}_x/\hbar$ отражает каждый вектор состояния относительно прямой, образующей с осями угол в 45°, т. е. меняет ролями положительные и отрицательные составляющие. Поэтому собственными векторами для $\mathfrak{S}_x$ должны быть векторы $(1/\sqrt{2})(\mathbf{a}_+ \pm \mathbf{a}_-)$, соответствующие повороту осей координат в спиновом пространстве на 45° при повороте направления квантования в действительном пространстве на 90° (соответствующие, например, изменению направления магнитного поля, при котором спин электрона, ориентированный по оси z, станет ориентированным по оси x). Поэтому, если мы знаем, что $\mathfrak{S}_z$ равно $\hbar/2$, то значения $\hbar/2$ и $-\hbar/2$ для $\mathfrak{S}_x$ являются равновозможными.

Далее, два собственных вектора для $\mathfrak{S}_y$ суть $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_+ \pm i\mathbf{a}_-)$ и соответствуют мнимому повороту в спиновом пространстве (напомним, что квадрат длины комплексного вектора такого вида равен скалярному произведению комплексно-сопряженного вектора на данный).

Кватернионы. С абстрактной точки зрения операторы

$$\mathfrak{i} = 2\mathfrak{S}_x/i\hbar, \quad \mathfrak{j} = 2\mathfrak{S}_y/i\hbar, \quad \mathfrak{k} = 2\mathfrak{S}_z/i\hbar$$

совместно с единичным оператором $\mathfrak{J}\mathbf{a}=\mathbf{a}$ и нулевым оператором оказываются близкими по формальным свойствам к аффинорным операторам. Они действуют на вектор (в данном случае на вектор в двумерном спиновом пространстве) и в результате получается новый вектор. Эти операторы можно складывать и перемножать, причем получаются операторы того же класса. Таблица умножения для этих новых операторов имеет вид

$$\mathfrak{i}^2=\mathfrak{j}^2=\mathfrak{k}^2=-1;\quad \mathfrak{i}\mathfrak{j}=\mathfrak{k}=-\mathfrak{j}\mathfrak{i};\quad \mathfrak{j}\mathfrak{k}=\mathfrak{i}=-\mathfrak{k}\mathfrak{j};\quad \mathfrak{k}\mathfrak{i}=\mathfrak{j}=-\mathfrak{i}\mathfrak{k}. \tag{1.6.45}$$

Довольно любопытно, что операторы с точно такими же свойствами изучил Гамильтон, пытаясь обобщить понятие комплексного числа, задолго до того, как стала развиваться квантовая механика. Как говорилось на стр. 78, величину $i=\sqrt{-1}$ можно сопоставить операции поворота на 90° в комплексной плоскости. Для этого простого оператора таблица умножения ограничивается равенством $i^2=-1$, где 1 есть единичный оператор. Каждой точке (x, y) на комплексной плоскости соответствует комплексное число $z=x+iy$, причем квадрат расстояния до начала координат равен $|z|^2=z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$. Для того чтобы получить дальнейшее формальное обобщение, следует использовать три величины $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$, определенные в уравнении (1.6.45), для образования кватерниона (см. стр. 78)

$$\mathfrak{p}=a+b\mathfrak{i}+c\mathfrak{j}+d\mathfrak{k}.$$

Квадрат длины здесь получается умножением $\mathfrak{p}$ на его сопряженное

$$\mathfrak{p}^*=a-b\mathfrak{i}-c\mathfrak{j}-d\mathfrak{k};\quad |\mathfrak{p}|^2=\mathfrak{p}\mathfrak{p}^*=a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Поэтому единственным кватернионом с нулевой длиной является тот, у которого a, b, c и d одновременно равны нулю. Добавим, что кватернион, обратный данному, легко находится

$$1/\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^*/|\mathfrak{p}|^2.$$

Кватернион можно соотнести повороту вокруг некоторой оси в трехмерном пространстве; направляющие косинусы этой оси должны быть пропорциональны постоянным b, c и d, а угол поворота определяется при помощи отношения a^2 к $b^2+c^2+d^2$. Поскольку эти величины представляют теперь главным образом исторический интерес, то к сказанному о них на стр. 78 и последующих нужно добавить очень немногое. Однако спиновые операторы тесно связаны с этими величинами.

Операторы вращения. Унитарные операторы того типа, который определяется уравнением (1.6.37), весьма тесно связаны с общими операторами момента количества движения (а именно, пропорциональны им). Изучение этих операторов даст нам возможность найти новые применения методов, развитых в разделе, посвященном абстрактным пространствам, и в тоже время поможет дальнейшему уяснению свойств моментов количества движения в квантовой механике.

Предположим, что вектор $\mathbf{e}$ из абстрактного пространства зависит от ориентации вектора $\mathbf{r}$ в обычном пространстве, как от параметра. Если мы теперь повернем $\mathbf{r}$ вокруг оси x на угол θ_x, то $\mathbf{e}$ должен будет совершить поворот в абстрактном пространстве. Оператор, который нужно применить к $\mathbf{e}$, для того чтобы получить этот новый вектор, задается уравнением (1.6.37). В данном случае мы пишем

$$\mathfrak{D}_x=e^{i(\mathfrak{M}_x/\hbar)\theta_x},$$

причем здесь $\mathfrak{M}_x$ является оператором. Аналогично можно определить операторы $\mathfrak{D}_y$ и $\mathfrak{D}_z$ через величины θ_y и θ_z. В большинстве случаев имеем $\mathfrak{D}_x\mathfrak{D}_y \neq \mathfrak{D}_y\mathfrak{D}_x$, так как вращение вектора $\mathbf{r}$ вокруг оси x не коммутирует с вращением этого вектора вокруг оси y.

Тем не менее легко видеть, что для бесконечно малого вращения на величины $(d\theta)_x$, $(d\theta)_y$, $(d\theta)_z$ эти повороты коммутируют и соответствующий оператор в абстрактном пространстве имеет вид $1+(i/\hbar)\times\times(\mathfrak{M}_x d\theta_x+\mathfrak{M}_y d\theta_y+\mathfrak{M}_z d\theta_z)$. Так как действие этого инфинитезимального оператора на вектор $\mathbf{e}$ не может зависеть от ориентации осей x, y, z, то, следовательно, $\mathfrak{M}_x d\theta_x+\mathfrak{M}_y d\theta_y+\mathfrak{M}_z d\theta_z$ должен быть инвариантным относительно вращения. Так как $(d\theta_x, d\theta_y, d\theta_z)$ являются тремя составляющими пространственного вектора, то, следовательно, $(\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z)$ также должны являться тремя составляющими некоторого вектора $\mathfrak{M}$ и должны преобразовываться, например, так, как преобразуются x, y, z в уравнении (1.3.8), ибо тогда этот оператор будет простым скалярным произведением, которое инвариантно относительно вращения.

Так как $\mathfrak{M}$ есть вектор, он должен преобразовываться как вектор.

В частности, если оси координат повернуты вокруг оси z на угол $d\theta_z$, то соотношения между старыми и новыми составляющими имеют вид

$$\mathfrak{M}'_z=\mathfrak{M}_z, \quad \mathfrak{M}'_y=d\theta_z\mathfrak{M}_x+\mathfrak{M}_y, \quad \mathfrak{M}'_x=\mathfrak{M}_x-d\theta_z\mathfrak{M}_y. \tag{1.6.46}$$

Однако $\mathfrak{M}_z$ есть оператор, связанный с вращением в векторном пространстве, и он зависит от параметра θ_z, аналогично тому, как оператор $\mathfrak{H}$ в уравнении (1.6.38) зависит от t. Более точно: этот оператор связан со скоростью изменения вектора состояния $\mathbf{e}$ уравнением

$$\frac{1}{\hbar}\mathfrak{M}_z\mathbf{e}=\frac{1}{i}\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial\theta_z}.$$

Поэтому для любого другого оператора, связанного с этой системой, скорость изменения по отношению к θ_z должна задаваться уравнением вида (1.6.40).

Например, скорость изменения оператора $\mathfrak{M}_x$ по отношению к параметру θ_z задается уравнением

$$\frac{1}{i}\frac{\partial\mathfrak{M}_x}{\partial\theta_z}=\frac{1}{\hbar}(\mathfrak{M}_z\mathfrak{M}_x-\mathfrak{M}_x\mathfrak{M}_z).$$

Но из уравнения (1.6.46) $\partial\mathfrak{M}_x/\partial\theta_z=-\mathfrak{M}_y$, и мы получаем соотношение

$$i\hbar\mathfrak{M}_y=\mathfrak{M}_z\mathfrak{M}_x-\mathfrak{M}_x\mathfrak{M}_z,$$

идентичное последнему из уравнений (1.6.42) для операторов момента количества движения.

Однако в этом выводе операторный вектор $\mathfrak{M}$ рассматривается в связи с бесконечно малым *поворотом осей* в обычном пространстве. В результате оказалось, что, поскольку речь идет об абстрактном пространстве, этот оператор совпадает с оператором момента количества движения, определенным равенством (1.6.42). Причиной этого совпадения служит, конечно, тот факт, что измерение момента количества движения системы приводит обычно к повороту системы в пространстве (если только состояние не соответствует собственному вектору оператора $\mathfrak{M}$), точно так же, как измерение импульса $\mathfrak{p}$ обычно приводит к изменению положения системы.

В терминах аппарата абстрактного векторного пространства оператор

$$\mathfrak{g}=e^{i(\mathfrak{M}_z/\hbar)\theta_z}$$

осуществляет необходимое изменение ориентации векторов состояния, соответствующее повороту обычного пространства на угол θ_z вокруг оси z. Так как в силу уравнений (1.6.43) собственными значениями оператора $\mathfrak{M}_z$ являются $m_z\hbar$, где m_z — либо целое число, либо полуцелое [в зависимости от того, что подлежит изучению — обычный (орбитальный) момент количества движения или спин], то, действуя на собственный вектор оператора $\mathfrak{M}_z$, оператор $\mathfrak{g}$ не меняет ни величины, ни направления этого вектора

$$e^{i(\mathfrak{M}_z/\hbar)\theta_z}\mathbf{e}(m_z) = e^{im_z\theta_z}\mathbf{e}(m_z).$$

Все эти вопросы квантовой механики и исчисления операторов будут изучены более подробно в следующей главе.

1.7. Преобразование Лоренца, 4-векторы, спиноры

Вплоть до настоящего момента мы изучали векторы и другие величины в трехмерном пространстве, и некоторые из формул и утверждений, полученных нами при рассмотрении аксиальных векторов, ротора вектора и векторного умножения, остаются корректными только для трех измерений. Поскольку в этой книге в большинстве случаев речь идет только о трех пространственных измерениях, такое ограничение допустимо и эти результаты имеют значительную ценность. Однако во многих случаях возникает необходимость в четвертом измерении — времени. В классической механике оно не вносит дополнительных осложнений, так как предполагается, что ни одна из физически возможных операций не может так повернуть ось времени, чтобы совместить ее с одной из пространственных осей или наоборот, и, следовательно, направление времени считается одним и тем же для всех наблюдений. Если бы это предположение оказалось правильным, то единственными реализуемыми преобразованиями были бы преобразования трехмерного пространства, а время являлось бы неким дополнительным понятием и в физике находил бы применение только изучавшийся до сих пор трехмерный анализ.

Собственное время. Однако, как показывается в современной электродинамике и обосновывается в теории относительности, существуют такие физически возможные преобразования, в которых участвует время как измерение; и если относительная скорость двух наблюдателей сравнима со скоростью света, то направления времени для них существенно не параллельны. Это не означает, что время просто является еще одним пространственным измерением, так как в формулах оно отличается от трех пространственных измерений мнимым множителем $i = \sqrt{-1}$. Оказывается, что если некоторый объект в пространстве передвигается на величины dx, dy, dz за время dt относительно наблюдателя A, то время, измеряемое наблюдателем B, движущимся вместе с объектом, будет равно $d\tau_B$, где

$$(d\tau_B)^2 = dt^2 - \left(\frac{1}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2); \qquad (1.7.1)$$

здесь c — скорость света, а $d\tau_B$ называется *собственным временем* наблюдателя B ($dt = d\tau_A$ есть, очевидно, собственное время наблюдателя A). До тех пор, пока скорости dx/dt и прочие малы по сравнению со скоростью c, значения собственных времен $d\tau_A$ и $d\tau_B$ мало отличаются