осуществляет необходимое изменение ориентации векторов состояния, соответствующее повороту обычного пространства на угол θ_z вокруг оси z. Так как в силу уравнений (1.6.43) собственными значениями оператора $\mathfrak{M}_z$ являются $m_z\hbar$, где m_z — либо целое число, либо полуцелое [в зависимости от того, что подлежит изучению — обычный (орбитальный) момент количества движения или спин], то, действуя на собственный вектор оператора $\mathfrak{M}_z$, оператор $\mathfrak{g}$ не меняет ни величины, ни направления этого вектора

$$e^{i(\mathfrak{M}_z/\hbar)\theta_z}\mathbf{e}(m_z) = e^{im_z\theta_z}\mathbf{e}(m_z).$$

Все эти вопросы квантовой механики и исчисления операторов будут изучены более подробно в следующей главе.

1.7. Преобразование Лоренца, 4-векторы, спиноры

Вплоть до настоящего момента мы изучали векторы и другие величины в трехмерном пространстве, и некоторые из формул и утверждений, полученных нами при рассмотрении аксиальных векторов, ротора вектора и векторного умножения, остаются корректными только для трех измерений. Поскольку в этой книге в большинстве случаев речь идет только о трех пространственных измерениях, такое ограничение допустимо и эти результаты имеют значительную ценность. Однако во многих случаях возникает необходимость в четвертом измерении — времени. В классической механике оно не вносит дополнительных осложнений, так как предполагается, что ни одна из физически возможных операций не может так повернуть ось времени, чтобы совместить ее с одной из пространственных осей или наоборот, и, следовательно, направление времени считается одним и тем же для всех наблюдений. Если бы это предположение оказалось правильным, то единственными реализуемыми преобразованиями были бы преобразования трехмерного пространства, а время являлось бы неким дополнительным понятием и в физике находил бы применение только изучавшийся до сих пор трехмерный анализ.

Собственное время. Однако, как показывается в современной электродинамике и обосновывается в теории относительности, существуют такие физически возможные преобразования, в которых участвует время как измерение; и если относительная скорость двух наблюдателей сравнима со скоростью света, то направления времени для них существенно не параллельны. Это не означает, что время просто является еще одним пространственным измерением, так как в формулах оно отличается от трех пространственных измерений мнимым множителем $i = \sqrt{-1}$. Оказывается, что если некоторый объект в пространстве передвигается на величины dx, dy, dz за время dt относительно наблюдателя A, то время, измеряемое наблюдателем B, движущимся вместе с объектом, будет равно $d\tau_B$, где

$$(d\tau_B)^2 = dt^2 - \left(\frac{1}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2); \qquad (1.7.1)$$

здесь c — скорость света, а $d\tau_B$ называется *собственным временем* наблюдателя B ($dt = d\tau_A$ есть, очевидно, собственное время наблюдателя A). До тех пор, пока скорости dx/dt и прочие малы по сравнению со скоростью c, значения собственных времен $d\tau_A$ и $d\tau_B$ мало отличаются

друг от друга, но если относительная скорость приблизительно равна c, различие этих промежутков времени может оказаться значительным.

Уравнение (1.7.1) аналогично трехмерному уравнению для полного дифференциала расстояния вдоль линии $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, и аналогия делается более наглядной, если записать уравнение (1.7.1) в виде

$$(icd\tau_B)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + (icdt)^2.$$

Траектория, по которой движется объект в пространстве-времени, называется его *мировой линией*, а расстояние вдоль нее измеряет собственное время объекта. Это уравнение показывает, что собственные времена двух наблюдателей, движущихся один относительно другого, связаны *мнимым поворотом*, а величина поворота зависит от относительной скорости этих наблюдателей.

Преобразование Лоренца. Сначала, чтобы сделать изложение возможно более простым, предположим, что относительная скорость двух наблюдателей параллельна оси x, в силу чего связанные с ними оси y и z остаются параллельными. Мы предположим также, что их относительная скорость u постоянна, так что угол между их мировыми линиями все время постоянен и преобразование от одной пространственно-временной системы к другой является простым (мнимым) поворотом. Рассмотрение относительных ускорений наблюдателей привело бы нас к сложным вопросам общей теории относительности, включение которых в данную книгу не является необходимым.

Преобразование, соответствующее повороту в плоскости (x, ict) на мнимый угол $i\alpha$, имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x' \operatorname{ch}\alpha + ct' \operatorname{sh}\alpha, \\ y &= y', \quad z = z', \\ ct &= x' \operatorname{sh}\alpha + ct' \operatorname{ch}\alpha, \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

где (x, y, z, t) — пространственно-временные координаты, связанные с наблюдателем A, а (x', y', z', t') — соответствующие координаты, связанные с наблюдателем B, движущимся с относительной скоростью u, параллельной оси x. Для того чтобы ось времени для B двигалась относительно A со скоростью u (или наоборот), мы должны иметь

$$u = c \operatorname{th}\alpha, \quad \operatorname{sh}\alpha = \frac{u/c}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, \quad \operatorname{ch}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}.$$

Следовательно, мы можем записать преобразование в более привычной форме

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, \\ y &= y', \quad z = z', \\ t &= \frac{(ux'/c^2) + t'}{\sqrt{1-(u/c)^2}}. \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

Между прочим, это преобразование показывает, что если наблюдатель B движется относительно наблюдателя A со скоростью $u = c \operatorname{th}\alpha$, а наблюдатель C движется относительно B со скоростью $v = c \operatorname{th}\beta$ (имеющей то же направление, что и u), то C имеет относительно A скорость, равную

$$c \operatorname{th}(\alpha + \beta) = (u + v)/[1 + (uv/c^2)].$$

Эта система уравнений, связывающая пространственно-временные координаты двух наблюдателей, движущихся с постоянной относительной скоростью, называется *преобразованием Лоренца*. Оно является симметричным преобразованием, в котором уравнения, выражающие x', t' через x, t, можно получить из уравнений (1.7.3) взаимной заменой штрихованных и нештрихованных величин и изменением знака u. В этом можно убедиться, выражая x', t' через x и t. Преобразование Лоренца является весьма частным случаем замены координат, так как оно представляет собой простой (мнимый) поворот в пространственно-временной плоскости, но его будет достаточно для большинства разбираемых в этой книге вопросов, связанных с пространством-временем.

Уравнения для общего преобразования Лоренца, соответствующего относительной скорости $u = c\,\mathrm{th}\,\alpha$, направление которой задается сферическими углами ϑ и φ относительно оси z, имеют вид

$$\begin{aligned}
x &= [1 + \cos^2\varphi \sin^2\vartheta\,(\mathrm{ch}\,\alpha - 1)]\,x' + \cos\varphi \sin\varphi \sin^2\vartheta\,(\mathrm{ch}\,\alpha - 1)\,y' + \\
&\qquad + \cos\varphi \cos\vartheta \sin\vartheta\,(\mathrm{ch}\,\alpha - 1)\,z' + \cos\varphi \sin\vartheta\,(\mathrm{sh}\,\alpha)\,ct', \\
y &= \cos\varphi \sin\varphi \sin^2\vartheta\,(\mathrm{ch}\,\alpha - 1)\,x' + [1 + \sin^2\varphi \sin^2\vartheta\,(\mathrm{ch}\,\alpha - 1)]\,y' + \\
&\qquad + \sin\varphi \cos\vartheta \sin\vartheta\,(\mathrm{ch}\,\alpha - 1)\,z' + \sin\varphi \sin\vartheta\,(\mathrm{sh}\,\alpha)\,ct', \\
z &= \cos\varphi \cos\vartheta \sin\vartheta\,(\mathrm{ch}\,\alpha - 1)\,x' + \sin\varphi \cos\vartheta \sin\vartheta\,(\mathrm{ch}\,\alpha - 1)\,y' + \\
&\qquad + [1 + \cos^2\vartheta\,(\mathrm{ch}\,\alpha - 1)]\,z' + \cos\vartheta\,(\mathrm{sh}\,\alpha)\,ct', \\
ct' &= \cos\varphi \sin\vartheta\,(\mathrm{sh}\,\alpha)\,x' + \sin\varphi \sin\vartheta\,(\mathrm{sh}\,\alpha)\,y' + \\
&\qquad + \cos\vartheta\,(\mathrm{sh}\,\alpha)\,z' + (\mathrm{ch}\,\alpha)\,ct'.
\end{aligned}$$

Когда $\varphi = 0°$ и $\vartheta = 90°$, эти уравнения сводятся к простому виду, заданному уравнениями (1.7.2).

Для этого преобразования все коэффициенты Ламе h равны единице, так как оно является вращением без растяжения. Очевидно, что здесь коэффициенты Ламе включают четыре измерения

$$(h_n)^2 = \sum_{m=1}^{4} \left(\frac{\partial x_m}{\partial x'_n}\right)^2, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 = x, y, z, ict.$$

Так как коэффициенты h все равны единице, то нет необходимости различать ковариантные, контравариантные и «истинные» векторные составляющие.

Четырехмерные инварианты. Точно так же, как и в случае трех измерений, весьма полезным для нас будет разыскание тех величин, которые не изменяются при преобразовании Лоренца. Иными словами, значение такой величины, измеренное любым наблюдателем, движущимся с любой постоянной скоростью (меньшей скорости света), будет одним и тем же. Эти величины аналогичны тем скалярным величинам, которые мы изучали выше, и во многих случаях соответствуют измеримым величинам, так как, согласно теории относительности, многие физические величины должны иметь одно и то же значение при измерении их различными наблюдателями, движущимися с различными скоростями. Такие величины называются *лоренц-инвариантными*.

Для движущейся без ускорения частицы пространственно-временная длина данной части ее мировой линии является четырехмерным инвариантом. Если перемещение этой частицы в системе координат, связанной с наблюдателем B, равно x', а длительность этого перемещения во времени, связанном с тем же наблюдателем, равна t', то квад-

рат *собственной длины* мировой линии равен

$$s^2 = (ct')^2 - (x')^2.$$

Для наблюдателя A, согласно уравнению (1.7.3), квадрат собственной длины равен

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 = \frac{1}{1-(u/c)^2}\left[(ct')^2 + 2ux't' + \left(\frac{ux'}{c}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - (x')^2 - 2ux't' - (ut')^2\right] = (ct')^2 - (x')^2,$$

то есть имеет то же значение. Квадрат длины той же мировой линии для наблюдателя, движущегося вместе с этой частицей, должен равняться квадрату его собственного времени, умноженному на c^2; это значение также совпадает с предыдущими.

Поэтому в теории относительности ни *пространственная длина* линии, ни длительность времени *не являются* инвариантами. Пространственная длина линии для наблюдателя A, движущегося вместе с линией, равна *измеренному в один и тот же момент времени, связанного с* A, расстоянию $x_2 - x_1$ между точками на двух мировых линиях. Для наблюдателя B, движущегося со скоростью u, пространственная длина той же линии определяется расстоянием между точками на тех же мировых линиях, измеренным *в один и тот же момент времени, связанного с* B, т. е. для $t'_2 = t'_1$. Согласно уравнениям (1.7.3), мы имеем

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1-(u/c)^2}};$$

следовательно, расстояние, измеренное наблюдателем B, движущимся относительно этой линии, равно

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1)\sqrt{1-(u/c)^2}$$

и оказывается короче расстояния, измеренного A, так как отличается множителем $\sqrt{1-(u/c)^2}$. Так как видимые размеры объектов изменяются в зависимости от относительной скорости наблюдателя, то и видимая плотность материи также не является инвариантной относительно преобразования Лоренца.

Многие другие величины, являвшиеся скалярами в трех измерениях (т. е. для очень малых относительных скоростей), оказываются не инвариантными в пространстве-времени. Например, масса тела не является четырехмерным инвариантом. Точным инвариантом является некоторая комбинация массы и кинетической энергии тела, соответствующая релятивистской зависимости между массой и энергией. Это будет доказано после того, как мы изучим четырехмерные векторы.

4-векторы. Сказанное до сих пор дает основание предполагать, что, распространяя наши концепции на векторы в четырех измерениях, мы также столкнемся с некоторыми неожиданностями. Как и 3-вектор, 4-вектор должен иметь инвариантную длину, но только теперь этой длиной должна служить собственная длина в пространстве и времени. Две точки (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) и (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) при измерении наблюдателем B определяют 4-вектор

$$F'_1 = x'_2 - x'_1, \ldots, \quad F'_4 = c(t'_2 - t'_1).$$

Для наблюдателя A, движущегося относительно B со скоростью u (в направлении x), компонентами этого вектора являются

$$F_1 = \frac{F'_1 + (uF'_4/c)}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, \quad F_2 = F'_2, \quad F_3 = F'_3, \quad F_4 = \frac{(uF'_1/c) + F'_4}{\sqrt{1-(u/c)^2}}.$$

и, таким образом, для этого преобразования Лоренца направляющие косинусы равны:

$$\gamma_{11}=\operatorname{ch}\alpha,\quad \gamma_{22}=\gamma_{33}=1,\quad \gamma_{44}=\operatorname{ch}\alpha,\quad \gamma_{14}=\gamma_{41}=\operatorname{sh}\alpha,$$
$$\gamma_{12}=\gamma_{21}=\gamma_{13}=\gamma_{31}=\gamma_{23}=\gamma_{32}=\gamma_{24}=\gamma_{42}=\gamma_{34}=\gamma_{43}=0,$$
$$\operatorname{th}\alpha=u/c. \tag{1.7.4}$$

Это преобразование компонент типично для 4-векторов. Заметим, что «сумма» квадратов четырех компонент $F^2=F_1^2+F_2^2+F_3^2-F_4^2$ инвариантна, как это и должно быть.

Очень важное значение имеет вектор, являющийся четырехмерным обобщением импульса частицы, движущейся относительно наблюдателя A с постоянной скоростью u в направлении оси x. Для наблюдателя B, движущегося вместе с частицей, масса частицы равна m_0, а собственное время — τ. Относительно наблюдателя A частица проходит расстояние dx за время dt, где $(d\tau)^2=(dt)^2-(dx/c)^2$. Пространственная компонента вектора импульса не может равняться $m_0(dx/dt)$, так как было бы трудно найти соответствующую временну́ю компоненту, чтобы получающийся в результате квадрат длины был инвариантом. С другой стороны, если выбрать пространственную компоненту равной величине $m_0(dx/d\tau)$, которая преобразуется так же, как и dx, т. е.

$$p_x=m_0\frac{dx}{d\tau}=\frac{m_0u}{\sqrt{1-(u/c)^2}},\quad p_t=m_0c\frac{dt}{d\tau}=\frac{m_0c}{\sqrt{1-(u/c)^2}},\quad u=\frac{dx}{dt},$$

где τ является собственным временем рассматриваемой частицы (и, следовательно, наблюдателя B), то квадрат длины p будет равен $p_x^2-p_t^2=-(m_0c)^2$, а эта величина инвариантна.

Для наблюдателя C, движущегося относительно A со скоростью $v=c\operatorname{th}\beta$ в направлении x, вектор импульса преобразуется согласно уравнению (1.7.4)

$$p_x'=p_x\operatorname{ch}\beta+p_t\operatorname{sh}\beta=m_0c\operatorname{sh}(\alpha+\beta)=m_0u'/\sqrt{1-(u'/c)^2},$$
$$p_t'=p_x\operatorname{sh}\beta+p_t\operatorname{ch}\beta=m_0c\operatorname{ch}(\alpha+\beta)=m_0c/\sqrt{1-(u'/c)^2},$$

где $u=c\operatorname{th}\alpha$ есть скорость частицы относительно A, а $u'=c\operatorname{th}(\alpha+\beta)$ — ее скорость относительно наблюдателя C. Таким образом, определение импульса как 4-вектора согласуется с данным ранее правилом сложения скоростей.

Поэтому 4-вектор, соответствующий импульсу, измеренному наблюдателем A, для частицы, движущейся относительно A со скоростью u, равен

$$p_x=\frac{m_0(dx/dt)}{\sqrt{1-(u/c)^2}},\quad p_y=\frac{m_0(dy/dt)}{\sqrt{1-(u/c)^2}},\quad p_z=\frac{m_0(dz/dt)}{\sqrt{1-(u/c)^2}},$$
$$p_t=\frac{m_0c}{\sqrt{1-(u/c)^2}},\quad u^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \tag{1.7.5}$$

где x, y, z, t являются координатами частицы для наблюдателя A.

Временна́я компонента этого импульса пропорциональна полной энергии частицы относительно наблюдателя A,

$$E=cp_t=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}=m_0c^2+\frac{1}{2}m_0u^2+\ldots,$$

которая не инвариантна относительно преобразования Лоренца. Это уравнение показывает также, что полная энергия может быть разделена

на энергию покоя и на нерелятивистскую кинетическую энергию только тогда, когда u мала по сравнению с c.

Другим 4-вектором является пространственно-временной градиент $\Box\psi$ некоторой скалярной функции ψ от (x, y, z, t), где

$$(\Box\psi)_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x} \text{ и т. д.}, \quad (\Box\psi)_4 = \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Так как коэффициенты Ламе все равны единице, а, следовательно, все символы Кристоффеля равны нулю, эти компоненты являются также компонентами четырехмерной ковариантной производной от ψ. Следовательно, сокращенная производная второго порядка

$$\Box^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1.7.6}$$

является лоренц-инвариантной. Оператор $\Box^2$ называется *даламбертианом*. С формальной точки зрения он аналогичен трехмерному оператору Лапласа ∇^2. Однако, как мы увидим в дальнейшем, ввиду наличия отрицательного знака перед временным членом решения уравнения Лапласа $\nabla^2\psi = 0$ существенно отличаются от решений уравнения $\Box^2\psi = 0$, которое является *волновым уравнением* для волн, движущихся со скоростью света c.

Тензор напряжения-энергии. По аналогии с трехмерным случаем можно построить аффиноры или тензоры для четырех измерений, преобразующиеся при преобразованиях Лоренца по формулам, которые легко определить, обобщая сказанное в предыдущем параграфе. Интересный и полезный пример такого тензора получается при распространении на четырехмерный случай аффинора напряжений для упругой среды, определенного формулами (1.6.28). Каждая из девяти компонент T_{ij} напряжений имеет размерность дина на квадратный сантиметр или грамм, деленный на сантиметр и на квадрат секунды; они преобразуются согласно правилам, имеющим место в трехмерном случае. По аналогии с предыдущим рассмотрением вектора импульса частицы мы должны ожидать, что временная компонента четырехмерного тензора может оказаться пропорциональной плотности энергии заданной среды. Другими словами, эта четвертая компонента должна быть связана с членом ρc^2, выражающим полную энергию (где ρ — плотность массы для данной среды), который имеет размерность грамм, деленный на сантиметр и на квадрат секунды.

Поэтому мы полагаем, что тензор напряжения-энергии P_{ij} в точке (x, y, z, ct) среды имеет для наблюдателя A, неподвижного относительно помещающейся в (x, y, z, ct) части среды, следующие компоненты:

$$\begin{aligned} &P_{11} = T_{xx} \text{ и т. д.}, \quad P_{12} = T_{xy} = P_{21} = T_{yx} \text{ и т. д.}, \\ &P_{14} = P_{24} = P_{34} = P_{41} = P_{42} = P_{43} = 0, \\ &P_{44} = c^2\rho_0, \end{aligned} \tag{1.7.7}$$

где ρ_0 — плотность среды в (x, y, z, ct), как ее измерил бы наблюдатель A.

Если эти величины являются компонентами истинного 4-тензора, то компоненты P, измеренные наблюдателем B, движущимся относительно среды, находящейся в (x, y, z, ct), со скоростью u в направлениях x, должны определяться общими правилами преобразования

$$P'_{mn} = \sum_{ij} \frac{\partial\xi'_m}{\partial\xi_i}\frac{\partial\xi'_n}{\partial\xi_j} P_{ij}, \quad \xi'_1 = \xi_1 \operatorname{ch}\alpha + \xi_4 \operatorname{sh}\alpha,$$

$$\xi'_2 = \xi_2, \quad \xi'_3 = \xi_3, \quad \xi'_4 = \xi_1 \operatorname{sh}\alpha + \xi_4 \operatorname{ch}\alpha, \quad c\operatorname{th}\alpha = u.$$

В результате преобразования получим

$$
\begin{aligned}
&P'_{11} = T_{xx}\,\mathrm{ch}^2\alpha + \rho_0 c^2\,\mathrm{sh}^2\alpha, \quad P'_{12} = P'_{21} = T_{xy}\,\mathrm{ch}\,\alpha,\\
&P'_{13} = P'_{31} = T_{xz}\,\mathrm{ch}\,\alpha, \quad P'_{22} = T_{yy}; \quad P'_{33} = T_{zz},\\
&P'_{23} = P'_{32} = T_{yz}, \quad P'_{14} = P'_{41} = (T_{xx} + \rho_0 c^2)\,\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha,\\
&P'_{24} = P'_{42} = T_{xy}\,\mathrm{sh}\,\alpha, \quad P'_{34} = P'_{43} = T_{xz}\,\mathrm{sh}\,\alpha,\\
&P'_{44} = T_{xx}\,\mathrm{sh}^2\alpha + \rho_0 c^2\,\mathrm{ch}^2\alpha.
\end{aligned}
\tag{1.7.8}
$$

Пространственные компоненты (P'_{11}, P'_{22} и т. д.) оказываются компонентами напряжения, какими их измерил бы наблюдатель B в этой среде, если принять во внимание конечную скорость света, а компонента P'_{44} оказывается равной эффективной плотности, измеренной наблюдателем B, умноженной на c^2. Исследование компоненты P'_{14} показывает, что ее можно рассматривать как величину, пропорциональную плотности параллельного оси x потока импульса среды, как ее измерил бы наблюдатель B. Соответственно компоненты P'_{24} и P'_{34} должны быть пропорциональны потокам импульса в направлениях y и z, как их измерил бы наблюдатель B.

Следовательно, мы приходим к важному и интересному результату, который может быть проверен как дальнейшим анализом, так и экспериментом: относительное движение преобразует напряжение в поток импульса и наоборот. Более того, так как в системе, неподвижной относительно данной среды (наблюдатель A), мы можем проверить, что свернутые тензорные уравнения

$$\sum_n \left(\frac{\partial P_{mn}}{\partial \xi_n}\right) = 0$$

или (в компонентах T)

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = 0 \text{ и т. д.}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(c\rho_0) = 0$$

являются справедливыми, то эти уравнения должны быть справедливыми также для наблюдателей, движущихся относительно данной среды (или, что то же, для среды, движущейся относительно наблюдателя). Например, если определить вектор импульса M относительно наблюдателя B как вектор с пространственными компонентами

$$
\begin{aligned}
&M_x = (1/c)\,(\rho_0 c^2 + T_{xx})\,\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha = P'_{41}/c,\\
&M_y = P'_{42}/c, \quad M_z = P'_{43}/c,
\end{aligned}
$$

а плотность относительно наблюдателя B как

$$\rho = \rho_0\,\mathrm{ch}^2\alpha + (T_{xx}/c^2)\,\mathrm{sh}^2\alpha = P'_{44}/c^2,$$

то одно из преобразованных уравнений должно иметь вид

$$\sum_n \left(\frac{\partial P'_{4n}}{\partial \xi'_n}\right) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial M_x}{\partial x'} + \frac{\partial M_y}{\partial y'} + \frac{\partial M_z}{\partial z'} + \frac{\partial \rho}{\partial t'} = 0,$$

где штрихами снабжены те координаты, которые соответствуют наблюдателю B. Очевидно, что это уравнение является уравнением неразрывности для данной среды, связывающим плотность импульса (или поток массы) с изменением плотности массы ρ. Остальные три преобразованных уравнения оказываются уравнениями движения этой среды.

Спиновое пространство и пространство-время. Одним из самых интересных выводов в современной теоретической физике является заключение о том, что двумерное «пространство состояний», связанное со спином электрона, и четырехмерное пространство-время, описывающее движение электрона, находятся в тесной связи. В предыдущем параграфе мы начали обсуждение вопроса о спиновом пространстве, соответствующем двум возможным спиновым состояниям электрона, и показали, что изменение направления спина на 180° в обычном пространстве (опрокидывание спина) соответствует повороту вектора состояния в спиновом пространстве на 90°. В этом есть некоторая аналогия с соотношением между векторами на комплексной плоскости, соответствующими (-1) и $\sqrt{-1}$, и при желании пофантазировать можно рассматривать спиновое пространство как своеобразный «квадратный корень» по отношению к обычному пространству. В самом деле, можно показать, что двумерное спиновое пространство является «пространством квадратного корня», причем не для трехмерного пространства, а для четырехмерного пространства-времени. Более определенно мы найдем, что четыре компоненты аффинора в спиновом пространстве могут быть отождествлены с компонентами 4-вектора в пространстве-времени.

Чтобы показать это, мы должны рассматривать компоненты векторов в спиновом пространстве и даже сами единичные векторы как комплексные величины, имеющие комплексно-сопряженные (a и $\bar{a}$ для компонент, являющихся числами, и $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}^*$ для векторов состояния), так что $a\bar{a}$ и $\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^*$ являются вещественными положительными числами. Мы начнем с двух взаимно-перпендикулярных векторов состояния $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ (для них комплексно-сопряженными являются $\mathbf{e}_1^*$ и $\mathbf{e}_2^*$), представляющих состояния, при одном из которых спин расположен в некотором определенном направлении, а при другом — в противоположном. Для того чтобы два комплексных вектора могли быть названы единичными ортогональными векторами, должны выполняться соотношения

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1^*\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2^* = \mathbf{e}_2^*\cdot\mathbf{e}_2 = 1$$

и

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2^* = \mathbf{e}_1^*\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_2^*\cdot\mathbf{e}_1 = 0.$$

Значения комплексных величин $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2^*\cdot\mathbf{e}_1^*$ и т. д. роли не играют.

Любой лежащий в спиновом пространстве вектор может быть выражен при помощи этих двух векторов:

$$\mathbf{s} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{s}^* = \bar{a}_1\mathbf{e}_1^* + \bar{a}_2\mathbf{e}_2^*,$$

и любой аффинор в спиновом пространстве может быть представлен в виде

$$\mathfrak{S} = c_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^* + c_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^* + c_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^* + c_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^*. \tag{1.7.9}$$

Аффинор в спиновом пространстве называется *спинором второго порядка*. Он имеет обычные для аффиноров свойства, переводя вектор состояния в спиновом пространстве в другой вектор состояния

$$\mathfrak{S}\cdot\mathbf{s} = (c_{11}a_1 + c_{12}a_2)\,\mathbf{e}_1 + (c_{21}a_1 + c_{22}a_2)\,\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{s}^*\cdot\mathfrak{S} = (\bar{a}_1c_{11} + \bar{a}_2c_{21})\,\mathbf{e}_1^* + (\bar{a}_1c_{12} + \bar{a}_2c_{22})\,\mathbf{e}_2^*.$$

Чтобы придать физический смысл этим определениям, мы должны найти связь между изменением компонент спинора a_i и компонент аффинора c_{ij} под действием преобразования Лоренца и их же изменением при пово-

роте осей в спиновом пространстве. Например, величины, являющиеся лоренц-инвариантными, должны также оставаться инвариантными при повороте осей в спиновом пространстве. В силу наших предыдущих замечаний мы должны потребовать, чтобы четыре компоненты c_{ij} спинора второго порядка в спиновом пространстве преобразовывались подобно компонентам 4-вектора в обычном пространстве-времени. *Аффинор в спиновом пространстве есть вектор в пространстве-времени*; тем самым достигнута наша цель представить спиновое пространство как «пространство квадратного корня».

Спиноры и 4-векторы. До сих пор мы не разбирали тех специфических правил преобразования для спинового пространства, благодаря которым компоненты c_{ij} спинора второго порядка преобразуются подобно компонентам 4-вектора. Наиболее общее преобразование задается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1' &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_1^{*\prime} &= \bar{\alpha}_{11}\mathbf{e}_1^* + \bar{\alpha}_{12}\mathbf{e}_2^*,\\
\mathbf{e}_2' &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_2^{*\prime} &= \bar{\alpha}_{21}\mathbf{e}_1^* + \bar{\alpha}_{22}\mathbf{e}_2^*,\\
\mathbf{e}_1 &= \alpha_{22}\mathbf{e}_1' - \alpha_{12}\mathbf{e}_2', & \mathbf{e}_1^* &= \bar{\alpha}_{22}\mathbf{e}_1^{*\prime} - \bar{\alpha}_{12}\mathbf{e}_2^{*\prime},\\
\mathbf{e}_2 &= -\alpha_{21}\mathbf{e}_1' + \alpha_{11}\mathbf{e}_2', & \mathbf{e}_2^* &= -\bar{\alpha}_{21}\mathbf{e}_1^{*\prime} + \bar{\alpha}_{11}\mathbf{e}_2^{*\prime},
\end{aligned} \tag{1.7.10}$$

где нужно считать

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1, \quad \bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{22} - \bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{21} = 1,$$

для того чтобы масштаб в новых координатах совпадал с масштабом в старых.

Под действием этого преобразования в спиновом пространстве компоненты произвольного спинора подвергаются следующей замене:

$$c_{mn} = \sum_{ij} c_{ij}' \alpha_{im} \bar{\alpha}_{jn}. \tag{1.7.11}$$

Чтобы наиболее надежным путем двигаться дальше, нужно найти функцию от c, инвариантную относительно преобразований α в спиновом пространстве, которую затем можно сделать инвариантной относительно преобразования Лоренца. Используя правила, по которым перемножаются α, мы легко можем показать, что одним из инвариантов является величина $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ (это можно показать подстановкой и перемножением, с учетом того, что $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$ и т. д.). Эту величину можно сделать также лоренц-инвариантной, если связать компоненты c с компонентами F_n некоторого 4-вектора таким способом, чтобы

$$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = c^2F_4^2 - F_1^2 - F_2^2 - F_3^2,$$

потому что такая комбинация из F, стоящая в правой части этого равенства, инвариантна. Это можно осуществить многими способами, но наиболее прост следующий:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= cF_4 + F_1, & F_4 &= (1/2c)(c_{11} + c_{22});\\
c_{22} &= cF_4 - F_1, & F_3 &= (i/2)(c_{12} - c_{21}),\\
c_{12} &= F_2 - iF_3, & F_2 &= (1/2)(c_{12} + c_{21}),\\
c_{21} &= F_2 + iF_3, & F_1 &= (1/2)(c_{11} - c_{22}).
\end{aligned} \tag{1.7.12}$$

Преобразование Лоренца для спиноров. Для наблюдателя B (штрихованные координаты), движущегося со скоростью u в направлении x отно-

сительно данного электрона, находящегося в покое относительно наблюдателя A (нештрихованные координаты), компоненты F преобразуются следующим образом:

$$cF_4 = cF_4' \operatorname{ch}\alpha + F_1' \operatorname{sh}\alpha, \quad F_1 = F_1' \operatorname{ch}\alpha + cF_4' \operatorname{sh}\alpha,$$
$$F_2 = F_2', \quad F_3 = F_3', \quad u = c \cdot \operatorname{th}\alpha.$$

Следовательно, преобразование компонент спинора имеет вид

$$\begin{gathered} c_{11} = c_{11}' e^{\alpha}, \quad c_{12} = c_{12}', \quad c_{21} = c_{21}', \\ c_{22} = c_{22}' e^{-\alpha}, \quad e^{\alpha} = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}, \end{gathered} \tag{1.7.13}$$

а преобразование соответствующих направляющих косинусов при повороте единичных векторов в спиновом пространстве имеет вид

$$\alpha_{11} = e^{\alpha/2}, \quad \alpha_{22} = e^{-\alpha/2}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0. \tag{1.7.14}$$

Поэтому любой вектор состояния в спиновом пространстве, имеющий относительно наблюдателя A вид $\mathbf{s} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$, превращается в $\mathbf{s}' = a_1 e^{\alpha/2}\mathbf{e}_1' + a_2 e^{-\alpha/2}\mathbf{e}_2'$ относительно наблюдателя B, движущегося относительно A со скоростью $u = c \cdot \operatorname{th}\alpha$.

Естественно, что формулы перехода для c и α в случае более общего преобразования Лоренца будут сложнее приведенных здесь, но и они могут быть разработаны теми же методами. Любая пара комплексных величин, удовлетворяющих условиям преобразования для компонент вектора состояния в спиновом пространстве, называется *спинором первого порядка*; четверка величин, удовлетворяющих условиям преобразования, для компонент c, заданных уравнениями (1.7.9) — (1.7.11), называется *спинором второго порядка* и т. д. Уравнения (1.7.12) дают соотношения между компонентами спинора и компонентами 4-вектора для рассмотренного нами простого преобразования Лоренца.

Пространственный поворот спиноров. В качестве следующего примера соотношения «квадратного корня» между компонентами спинора и компонентами вектора мы рассмотрим случай, когда временна́я координата не меняется, а пространственные координатные оси поворачиваются на соответствующие углы Эйлера, указанные на стр. 38. Под действием этого преобразования временна́я компонента любого 4-вектора остается неизменной, и потому, согласно уравнению (1.7.12), сумма $c_{11} + c_{22}$ должна остаться неизменной. Выражая $c_{11} + c_{22}$ через компоненты α, мы видим, что для чистого пространственного поворота, когда $c_{11} + c_{22} = c_{11}' + c_{22}'$, мы должны иметь

$$\bar{\alpha}_{1n}\alpha_{1m} + \bar{\alpha}_{2n}\alpha_{2m} = \bar{\alpha}_{n1}\alpha_{m1} + \bar{\alpha}_{n2}\alpha_{m2} = \delta_{nm} = \left\{\begin{matrix} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{matrix}\right\} \quad n, \ m = 1, \ 2.$$

Этот результат не является неожиданным, так как следствием из него будет $\mathbf{e}_n'\mathbf{e}_n^{*\prime} = 1$, а мы должны были ожидать, что «длина» вектора состояния при пространственном повороте останется неизменной. Объединяя все условия, содержащие α, мы увидим, что

$$\bar{\alpha}_{11} = \alpha_{22}, \quad \bar{\alpha}_{12} = -\alpha_{21} \text{ и т. д.} \tag{1.7.15}$$

Выпишем выражения для преобразований компонент F при пространственном повороте [модифицируя уравнения (1.3.8) и заменяя F_z на F_1,

F_x на F_2 и F_y на F_3]

$$F_2' = [\cos\Phi\cos\theta\cos\psi - \sin\Phi\sin\psi]\,F_2 + \\ + [\sin\Phi\cos\theta\cos\psi + \cos\Phi\sin\psi]\,F_3 - \sin\theta\cos\psi\,F_1,$$

$$F_3' = -[\cos\Phi\cos\theta\sin\psi + \sin\Phi\cos\psi]\,F_2 - \\ - [\sin\Phi\cos\theta\sin\psi - \cos\Phi\cos\psi]\,F_3 + \sin\theta\sin\psi\,F_1,$$

$$F_1' = \sin\theta\cos\Phi\,F_2 + \sin\theta\sin\Phi\,F_3 + \cos\theta\,F_1, \quad F_4' = F_4$$

и подставим эти выражения в уравнение (1.7.12) как для штрихованных, так и для нештрихованных компонент, чтобы получить уравнения преобразования для c

$$c_{12}' = -\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\,e^{i\psi}(c_{11} - c_{22}) + \cos^2(\theta/2)\,e^{i(\psi+\Phi)}\,c_{12} - \sin^2(\theta/2)\,e^{i(\psi-\Phi)}c_{21}$$

и т. д. При помощи направляющих косинусов α связь этой компоненты с нештрихованными выражается уравнением

$$c_{12}' = \alpha_{22}\alpha_{21}c_{11} + \alpha_{22}^2 c_{12} - \alpha_{21}^2 c_{21} - \alpha_{21}\alpha_{22}c_{22}.$$

Здесь мы обратили уравнения (1.7.11) и использовали равенства (1.7.15).

Сравнивая последние два уравнения, мы находим, что направляющие косинусы α для поворота в спиновом пространстве, соответствующего пространственному повороту с углами Эйлера Φ, θ, ψ [см. уравнения (1.3.8) и рис. 1.6], равны

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos(\theta/2)\,e^{-i(\psi+\Phi)/2}, & \alpha_{21} &= -\sin(\theta/2)\,e^{i(\psi-\Phi)/2}, \\ \alpha_{12} &= \sin(\theta/2)\,e^{-i(\psi-\Phi)/2}, & \alpha_{22} &= \cos(\theta/2)\,e^{i(\psi+\Phi)/2}, \end{aligned} \tag{1.7.16}$$

где мы вновь прибегли к равенствам (1.7.15), чтобы распутать эти уравнения. Поэтому при этом повороте пространственной системы координат вектор состояния в спиновом пространстве $\mathbf{s} = a_1\mathbf{e}_1' + a_2\mathbf{e}_2'$ превращается в

$$\mathbf{s} = [a_1\cos(\theta/2)\,e^{-i\psi/2} - a_2\sin(\theta/2)\,e^{i\psi/2}]\,e^{-i\Phi/2}\mathbf{e}_1 + \\ + [-a_1\sin(\theta/2)\,e^{-i\psi/2} + a_2\cos(\theta/2)\,e^{i\psi/2}]\,e^{i\Phi/2}\mathbf{e}_2.$$

Это уравнение показывает, что углы поворота в спиновом пространстве равны половинам углов поворота в обычном пространстве. Поворот на 180° ($\theta = \pi$, $\Phi = \psi = 0$) переводит $\mathbf{s} = a_1\mathbf{e}_1' + a_2\mathbf{e}_2'$ в $\mathbf{s} = a_2\mathbf{e}_1 - a_1\mathbf{e}_2$, а это есть поворот на 90° в спиновом пространстве.

Обычно представляют интерес преобразования (1.7.14) и (1.7.16). Все другие случаи могут быть разобраны тем же способом при помощи уравнений (1.7.12). Несмотря на то, что мы начали обсуждение этих вопросов, стремясь удовлетворить довольно неопределенному условию, мы развили теорию величины, преобразующейся вполне определенным образом при общем повороте координат (включая поворот Лоренца) и все же не являющейся тензором, в соответствии с ранее проведенными рассуждениями. При первоначальном изучении спиноров этот факт казался совершенно неожиданным.

Спиновые векторы и тензоры. В спиновом пространстве можно найти четверку простых аффиноров, ведущих себя подобно единичным векторам в пространстве-времени:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_4 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^* = \mathfrak{I}, \\ \boldsymbol{\sigma}_1 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^*, \\ \boldsymbol{\sigma}_2 &= i\,(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^*), \\ \boldsymbol{\sigma}_3 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^*. \end{aligned} \tag{1.7.17}$$

Эти величины действуют на спиновые векторы **e** следующим образом:

$$\sigma_4 \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n, \quad \sigma_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \sigma_2 \cdot \mathbf{e}_1 = i\mathbf{e}_2, \quad \sigma_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \quad \text{и т. д.}$$

Сравнение с уравнениями (1.6.44) показывает, что величины σ_1, σ_2, σ_3 равны спиновым операторам для электрона, умноженным на $2/\hbar$. Они называются *спиновыми операторами Паули*. Величина σ_4 есть, очевидно, единичный аффинор. Мы видим также, что $i\sigma_1$, $i\sigma_2$, $-i\sigma_3$ в точности совпадают с кватернионными операторами Гамильтона.

Теперь мы можем переписать спинорный аффинор, заданный уравнением (1.7.9), в виде 4-вектора, используя уравнения (1.7.12) и (1.7.17):

$$\mathfrak{S} = cF_4\sigma_4 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3, \tag{1.7.18}$$

где «единичные векторы» σ являются операторами, действующими на векторы состояния в спиновом пространстве, а компоненты F представляют собой обычные числа, преобразующиеся подобно компонентам обычного 4-вектора. Итак, мы видим, наконец, каким образом операторы в спиновом пространстве могут действовать подобно векторам пространства-времени. Распространение этого рассуждения на преобразование отражения $\mathbf{r}' \to -\mathbf{r}$ и его согласование со спиновым пространством требует, чтобы мы рассматривали $\mathbf{e}^*$ и $\mathbf{e}$ как независимые величины, так что преобразование одной в другую оказывается возможным. Однако мы не будем углубляться дальше в эти вопросы, скажем только, что вектор σ преобразуется подобно *аксиальному* вектору (см. задачу 1.34).

Можно перейти к образованию спинорных форм, преобразующихся подобно аффинорам в пространстве-времени. Например, спинор четвертого порядка

$$\sum_{\mu,\nu} \sigma_\mu \sigma_\nu F_{\mu\nu} = \sigma_4 (F_{11} + F_{22} + F_{33} + F_{44}) + \sigma_1 (F_{14} + F_{41} + iF_{23} - iF_{32}) + \\ + \sigma_2 (F_{24} + F_{42} + iF_{31} - iF_{13}) + \sigma_3 (F_{34} + F_{43} + iF_{12} - iF_{21})$$

имеет компоненты $F_{\mu\nu}$, которые ведут себя подобно компонентам аффинора в пространстве-времени. Особо важной формой является свернутый тензор, образованный умножением спинорного вектора на его сопряженный

$$(\sigma_4 cF_4 + \sigma_1 F_1 + \sigma_2 F_2 + \sigma_3 F_3)(\sigma_4 cF_4 - \sigma_1 F_1 - \sigma_2 F_2 - \sigma_3 F_3) = \\ = \sigma_4 (c^2 F_4^2 - F_1^2 - F_2^2 - F_3^2) \tag{1.7.19}$$

и дающий квадрат длины 4-вектора. Это соотношение будет использовано, когда мы перейдем к рассмотрению теории электрона Дирака.

Оператор вращения в спинорной форме. Обращаясь к исследованиям Гамильтона о кватернионах (см. стр. 78), можно прийти к весьма интересному и полезному спинорному оператору, для которого направляющие косинусы α спиновых векторов служат компонентами:

$$\begin{gathered} \mathfrak{R} = \alpha_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^* + \alpha_{21}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^* + \alpha_{12}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^* + \alpha_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^* = \\ = \sum_n R_n \sigma_n, \quad R_1 = \frac{1}{2}(\alpha_{12} + \alpha_{21}), \\ R_2 = \frac{1}{2i}(\alpha_{12} - \alpha_{21}), \quad R_3 = \frac{1}{2}(\alpha_{11} - \alpha_{22}), \quad R_4 = \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{22}). \end{gathered} \tag{1.7.20}$$

Согласно уравнениям (1.7.10), α являются направляющими косинусами, связывающими в спиновом пространстве штрихованные и нештрихованные единичные векторы **e**. Если они имеют значения, задаваемые фор-

мулами (1.7.16), то они соответствуют повороту пространственных осей координат на углы Эйлера θ, ψ, Φ. Как мы показали выше, спинорный оператор, имеющий вид $\mathfrak{R}$, преобразуется так же, как вектор, и это подчеркивается тем, что мы записываем его при помощи его компонент R «вдоль» единичных спиновых векторов σ.

Однако вектор $\mathfrak{R}$ (или спинорный оператор, в зависимости от того, какая из точек зрения подчеркивается) имеет ту специфическую особенность, что его компоненты

$$R_1 = i\sin(\theta/2)\sin[(\Phi-\psi)/2], \quad R_2 = i\sin(\theta/2)\cos[(\Phi-\psi)/2],$$
$$R_3 = i\cos(\theta/2)\sin[(\Phi+\psi)/2], \quad R_4 = \cos(\theta/2)\cos[(\Phi+\psi)/2]$$

сами связаны с частным видом преобразования, определенным углами θ, ψ, Φ. (Это не означает, что вектор $\mathfrak{R}$ не может быть выражен при помощи любых координат, получающихся вращением на любые углы; это означает только, что он особым образом связан с одним частным случаем поворота осей на углы θ, ψ, Φ.)

Можно ожидать, что этот вектор обладает особой симметрией относительно этого поворота, так как если единичные векторы $\mathbf{e}'$ связаны с векторами $\mathbf{e}$ теми же самыми углами [см. (1.7.10) и (1.7.16)], то тогда оказывается, что выражение для $\mathfrak{R}$, содержащее штрихованные векторы, не отличается от выражения с нештрихованными векторами

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} = \alpha_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^* + \alpha_{21}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^* + \ldots = \\ = [\alpha_{11}\alpha_{22}\bar{\alpha}_{22} - \alpha_{21}\alpha_{22}\bar{\alpha}_{21} - \alpha_{12}\alpha_{21}\bar{\alpha}_{22} + \alpha_{22}\alpha_{21}\bar{\alpha}_{21}]\,\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_1^{*\prime} - \\ - [\alpha_{11}\alpha_{22}\bar{\alpha}_{12} - \alpha_{21}\alpha_{22}\bar{\alpha}_{11} - \alpha_{12}\alpha_{21}\bar{\alpha}_{12} + \alpha_{22}\alpha_{21}\bar{\alpha}_{11}]\,\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2^{*\prime} + \ldots = \\ = \bar{\alpha}_{22}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_1^{*\prime} - \bar{\alpha}_{12}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2^{*\prime} + \ldots = \alpha_{11}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_1^{*\prime} + \alpha_{21}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2^{*\prime} + \ldots,\end{aligned}$$

как это можно доказать, используя правила перемножения для α.

Однако $\mathfrak{R}$ является также и оператором, действующим на спиновые векторы. В действительности под действием этого оператора каждый спиновый вектор поворачивается именно так, как он повернулся бы при преобразовании $\mathbf{e} \to \mathbf{e}'$. Согласно уравнениям (1.7.10), имеем:

$$\mathfrak{R}\cdot\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n'; \quad \mathfrak{R}^*\cdot\mathbf{e}_n^* = \mathbf{e}_n^{*\prime}, \tag{1.7.21}$$

где

$$\mathfrak{R}^* = \bar{\alpha}_{11}\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_1 + \bar{\alpha}_{21}\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2 + \bar{\alpha}_{12}\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_1 + \bar{\alpha}_{22}\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_2.$$

Другой оператор $\mathfrak{R}^{-1}$ осуществляет обратное преобразование $\mathbf{e}' \to \mathbf{e}$. Из уравнений (1.7.10) видно, что

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}^{-1} = \alpha_{22}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^* - \alpha_{21}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^* - \alpha_{12}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^* + \alpha_{11}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^* = \\ = \alpha_{22}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_1^{*\prime} - \alpha_{21}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2^{*\prime} - \alpha_{12}\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_1^{*\prime} + \alpha_{11}\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_2^{*\prime};\end{aligned}$$

следовательно,

$$\mathfrak{R}^{-1}\cdot\mathbf{e}_n' = \mathbf{e}_n, \quad (\mathfrak{R}^{-1})^*\cdot\mathbf{e}_n^{*\prime} = \mathbf{e}_n^*.$$

Но, так как $\bar{\alpha}_{22} = \alpha_{11}$, $\bar{\alpha}_{12} = -\alpha_{21}$ и т. д., мы можем также показать, что

$$\mathbf{e}_n\cdot(\mathfrak{R}^{-1})^* = \mathbf{e}_n' \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_n^*\cdot\mathfrak{R}^{-1} = \mathbf{e}_n^{*\prime}$$

и что

$$\mathbf{e}_n'\cdot\mathfrak{R}^* = \mathbf{e}_n \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_n^{*\prime}\cdot\mathfrak{R} = \mathbf{e}_n^*, \tag{1.7.22}$$

откуда видна тесная взаимосвязь между оператором $\mathfrak{R}$ и его обратным $\mathfrak{R}^{-1}$.

Особо важным свойством оператора $\mathfrak{R}$ является то, что он не только порождает вращение векторов в спиновом пространстве, но и, кроме того, может вызвать связанное с первым вращение 4-векторов в обычном пространстве. Например, спинор

$$\mathfrak{S} = c_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^* + c_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^* + c_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^* + c_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^*$$

(где c имеют любые значения) преобразуется как 4-вектор [см. уравнение (1.7.18)] с компонентами F_n [см. уравнения (1.7.12)]. Вектор, образованный воздействием оператора $\mathfrak{R}$ «справа и слева» на $\mathfrak{S}$

$$\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{R}^{-1} = c_{11}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_1^{*\prime} + c_{12}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2^{*\prime} + c_{21}\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_1^{*\prime} + c_{22}\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_2^{*\prime} = \\ = F_1\sigma_1' + F_2\sigma_2' + F_3\sigma_3' + F_4\sigma_4', \tag{1.7.23}$$

имеет те же компоненты F_n, но теперь они являются компонентами в разложении по штрихованным единичным векторам, повернутым относительно нештрихованных. Поэтому воздействие оператором $\mathfrak{R}$ справа и слева действительно повернуло вектор $\mathfrak{S}$ на величину, задаваемую углами θ, ψ и Φ. В соответствии с соотношением «квадратного корня» между спиновым пространством и пространством-временем мы должны были воздействовать на спиновый вектор оператором $\mathfrak{R}$ один раз, чтобы произвести поворот, но чтобы получить поворот 4-вектора на соответствующую величину, на него надо подействовать дважды.

Заметим, что здесь мы имели дело с поворотами на конечные углы. Если же поворот бесконечно мал, то углы Эйлера θ и $(\Phi+\psi)$ делаются малыми и поворот может быть представлен при помощи бесконечно малого вектора $\Delta\boldsymbol{\omega}$, направление которого дает ось поворота, а длина — угол поворота в радианах. Рассмотрение свойств векторного произведения показывает, что операция перехода от обычного трехмерного вектора $\mathbf{A}$ к другому вектору $\mathbf{A}'$ при помощи бесконечно малого поворота задается уравнением

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \Delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}. \tag{1.7.24}$$

Изучение приведенных на стр. 105 уравнений для поворота, содержащих углы Эйлера, показывает, что если θ и $(\Phi+\psi)$ малы, то

$$(\Delta\boldsymbol{\omega})_1 \simeq -(\Phi+\psi), \quad (\Delta\boldsymbol{\omega})_2 \simeq -\theta\sin\psi, \quad (\Delta\boldsymbol{\omega})_3 \simeq -\theta\cos\psi.$$

Рассмотрение уравнений для компонент $\mathfrak{R}$ приводит к соответствующей системе уравнений

$$R_4 = 1, \quad R_3 = (i/2)(\Phi+\psi), \quad R_1 = -(i/2)\,\theta\sin\psi,$$
$$R_2 = (i/2)\,\theta\cos\psi,$$

когда θ и $(\Phi+\psi)$ малы.

Следовательно, для бесконечно малого поворота, представленного вектором $\Delta\omega$, спинорный оператор вращения равен

$$\mathfrak{R} \to \sigma_4 + (i/2)\,[(\Delta\boldsymbol{\omega})_1\sigma_1 + (\Delta\boldsymbol{\omega})_2\sigma_2 + (\Delta\boldsymbol{\omega})_3\sigma_3]. \tag{1.7.25}$$

Эти уравнения иногда можно использовать, чтобы проверить, не подчиняются ли компоненты какого-либо неизвестного оператора правилам преобразования 4-векторов.

Задачи к главе 1

1.1. При постоянном ψ поверхности, заданные уравнением

$$(x^2+y^2)\cos^2\psi + z^2\operatorname{ctg}^2\psi = a^2, \quad 0<\psi<\pi,$$