ГЛАВА 2

Уравнения полей

Физические явления, которые могут быть описаны с помощью полей, связаны с положением точек и со временем таким образом, что обычно эту связь можно выразить посредством дифференциальных уравнений с частными производными. Изменение поля в какой-либо точке влияет на его значения в соседних точках, эти последние изменения отражаются на значениях в точках более отдаленных и так далее; имеет место взаимозависимость, которая наиболее естественно выражается через пространственные и временные частные производные. Таким образом, поле, соответствующее определенной физической ситуации обычно является решением некоторого дифференциального уравнения с частными производными, а именно частным решением, удовлетворяющим определенной совокупности подходящих для данной ситуации «граничных условий».

Бóльшая часть этой книги будет посвящена отысканию для специальных видов дифференциальных уравнений с частными производными частных решений, удовлетворяющих данным граничным и начальным условиям. Однако эта и следующая главы будут посвящены рассмотрению способов нахождения дифференциальных уравнений, соответствующих данной физической задаче. Этот процесс выделения наиболее важных взаимозависимостей в изучаемом явлении с целью выражения и изучения их в дифференциальной форме является одной из наиболее трудных задач физика-теоретика.

Мы не будем пытаться рассмотреть все дифференциальные уравнения с частными производными, которые оказались полезными в физике; это потребовало бы полного обзора всей физики. Даже относительно тех уравнений, которые здесь выводятся, мы будем предполагать, что физическая сторона дела достаточно известна и что рассматриваемые величины не требуют подробных пояснений. Такие пояснения можно найти в других источниках. Нас здесь интересует лишь процесс получения дифференциального уравнения из условий физической задачи.

Мы обнаружим, что некоторые типы дифференциальных уравнений вновь и вновь появляются в самых разнообразных ситуациях и что, следовательно, детальное изучение решений этих сравнительно немногочисленных уравнений даст нам возможность решать проблемы в чрезвычайно большом числе случаев, представляющих интерес с точки зрения физики.

2.1. Гибкая струна

Прежде чем перейти к более сложным вопросам, полезно подвергнуть детальному рассмотрению пример одномерной задачи, с тем чтобы выявить некоторые приемы и понятия в их простейшей форме. Гибкая натянутая

струна является хорошим примером этого рода, так как он достаточно нагляден и хорошо знаком большинству читателей.

Физическим прототипом здесь является струна нижнего регистра фортепиано, представляющая собой более или менее равномерно нагруженную проволоку, натянутую между двумя абсолютно жесткими зажимами. Такая струна обладает жесткостью, но, как показывает опыт, сопротивление перемещению струны из положения ее равновесия в значительно большей степени вызвано ее натяжением, нежели жесткостью. Поэтому при выводе уравнения струны обычно допускают упрощение, пренебрегая жесткостью (в некоторых книгах по колебаниям и теории звука исследуется и влияние жесткости и устанавливается, в каких случаях ею заведомо можно пренебречь). Другие упрощающие предположения состоят в том, что масса струны равномерно распределена вдоль ее длины, что натяжение также равномерно и что отклонение точки струны от положения равновесия мало по сравнению с расстоянием этой точки от ближайшего закрепленного конца струны. Два последних предположения не независимы друг от друга.

Форма такой струны в любой момент может быть выражена через ее отклонение от положения равновесия. Более точно: каждую точку струны мы задаем ее расстоянием x от некоторой начальной точки, измеренным в тот момент, когда струна находилась в положении равновесия (имела форму прямолинейного отрезка, соединяющего точки опоры). Перемещение $\psi(x)$ точки x, отсчитываемое от ее положения равновесия, есть функция x (а иногда и времени). Если рассматривать движение только в плоскости, то поле $\psi(x)$, соответствующее этому примеру, будет скалярным одномерным полем.

Силы, действующие на элемент струны. Рассматривая рис. 2.1, мы видим, что при малом наклоне $\partial\psi/\partial x$ струны результирующая сила $F_T(x)\,dx$, действующая на участок струны между точками x и $x+dx$, вызванная натяжением T струны, равна

$$F_T(x)\,dx = T\cdot(\partial\psi/\partial x)_{x+dx} - T\cdot(\partial\psi/\partial x)_x \text{ или } F_T(x) = T\cdot(\partial^2\psi/\partial x^2) \qquad (2.1.1)$$

и имеет направление, примерно совпадающее с направлением перпендикуляра к линии равновесия. Эта результирующая сила, вызванная натяжением, действующим на элемент струны в точке x, которая стремится вернуть струну в положение равновесия, пропорциональна скорости изменения наклона струны в точке x. Она стремится выпрямить каждый участок струны: если кривизна положительна, она направлена вверх, если кривизна отрицательна, она направлена вниз. Таким образом, сила зависит только от формы участка струны в непосредственной близости от точки x и не зависит от формы струны в целом. Однако если струну предоставить действию этой силы, то струна только тогда придет в равновесие, когда *каждый* участок струны станет прямолинейным. Таким образом, дифференциальное уравнение струны, хотя и имеет дело только с формой каждого элементарного участка струны, в итоге налагает определенные ограничения на форму всей струны в целом.

В действительности на струну фортепиано действуют и другие силы — сила, вызванная жесткостью струны (которой, как мы уже говорили, во многих случаях можно пренебречь), и сила трения воздуха, в котором струна движется, а также и некоторые другие силы.

Сила трения при движении в воздухе также относительно мала; если нас интересует движение в течение короткого промежутка времени или же форма струны, когда она неподвижна, этой силой также можно пренебречь. Другие силы, которые могут играть роль — это сила тяжести,

действующая на каждый участок струны (если струна натянута горизонтально), и сила, исходящая от молоточка фортепиано, или пальца арфиста, или смычка скрипача. Какие из этих сил нужно включить в уравнение, определяющее форму струны, зависит от того, какой частный случай рассматривается.

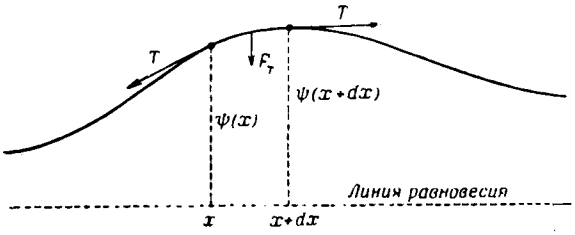


Рис. 2.1. Силы натяжения T, приложенные к элементу струны, и их равнодействующая F_T.

Уравнение Пуассона. Струна может быть подвергнута, например, действию не зависящих от времени поперечных сил, распределенных по ее длине, и нас может интересовать форма равновесия струны, возникшая в результате одновременного действия этих внешних сил и сил, вызванных натяжением. В этом случае зависимость от времени отсутствует и дифференциальное уравнение, определяющее форму струны, имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -f(x), \quad f(x) = \frac{F(x)}{T}, \tag{2.1.2}$$

где поперечная сила, приложенная к элементу струны, лежащему между x и $x+dx$, равна $F(x)\,dx$. Здесь эта приложенная поперечная сила уравновешена в каждой точке результирующей поперечной силой, вызванной натяжением T. Уравнение (2.1.2) представляет собой одномерный случай *уравнения Пуассона*.

В качестве одного из случаев, описываемых этим уравнением, рассмотрим горизонтальную струну, на которую действует сила тяжести, вызванная ее собственным весом. Если каждый сантиметр длины струны весит ρ $г$, то сила $F(x)$ равна $-\rho g$, где g — ускорение силы тяжести. Общим решением полученного уравнения $d^2\psi/dx^2 = \rho g/T$ является $\psi = a + bx + (\rho g/2T)\,x^2$, где a и b определяются из «граничных условий». Если оба конца струны закреплены жестко (т. е. если их смещениями можно пренебречь) и находятся друг от друга на расстоянии L, то эти граничные условия имеют вид $\psi = 0$ при $x = 0$ и при $x = L$. Нетрудно видеть, что квадратичная функция от x со старшим членом $(\rho g/2T)\,x^2$, обращающаяся в нуль при $x = 0$ и при $x = L$, имеет вид $\psi = (\rho g/2T)\,x\,(x - L)$. Это, следовательно, и есть решение задачи. Форма струны — парабола с приблизительно постоянной кривизной $\rho g/T$ и наибольшим смещением в середине струны [1]).

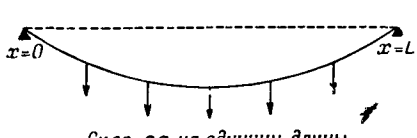


Рис. 2.2. Форма натянутой струны, находящейся под действием поперечных сил тяжести.

Некоторые интересные общие свойства решений уравнения (2.1.2) вытекают из того факта, что ψ входит в уравнение в первой степени. Например, если ψ есть решение уравнения (2.1.2) для заданной функции

[1]) При малых по абсолютной величине значениях $\partial\psi/\partial x$ (что имеет место в рассматриваемом случае) кривизна струны $(\partial^2\psi/\partial x^2)\cdot[1+(\partial\psi/\partial x)^2]^{-3/2}$ приблизительно равна $\partial^2\psi/\partial x^2$. — *Прим. ред.*

$f(x)$, то $a\psi$ есть решение уравнения $d^2\psi/dx^2 = -af(x)$. Это новое решение часто также удовлетворяет тем же граничным условиям, что и ψ (это имеет место, например, для струны с двумя закрепленными концами). Аналогично если ψ_1 есть решение уравнения $d^2\psi/dx^2 = -f_1$ и ψ_2 — решение уравнения $d^2\psi/dx^2 = -f_2$, то $\psi = \psi_1 + \psi_2$ есть решение уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -f_1 - f_2. \tag{2.1.3}$$

Оба эти свойства будут многократно использованы в этой книге.

Сосредоточенная сила. Дельта-функция. Во многих случаях, имеющих практический интерес, поперечная сила приложена лишь к малому участку струны. Это внушает мысль о довольно очевидной идеализации — о силе, приложенной в «одной точке» струны. С математической точки зрения эта идеализация соответствует рассмотрению предельного случая силы

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \xi - \frac{\Delta}{2}, \\ \frac{F}{\Delta}, & \xi - \frac{\Delta}{2} < x < \xi + \frac{\Delta}{2}, \\ 0, & \xi + \frac{\Delta}{2} < x \end{cases}$$

при стремлении к нулю длины Δ участка струны, к которому приложена сила.

Подобные идеализации сосредоточенных сил, электрических зарядов и т. д. будут очень полезны в наших последующих рассуждениях. Они все могут быть выражены с помощью одной «патологической функции», называемой *дельта-функцией*:

$$\delta(x) = \lim_{\Delta \to 0} \begin{cases} 0, & x < -\frac{\Delta}{2} \\ \frac{1}{\Delta}, & -\frac{\Delta}{2} < x < \frac{\Delta}{2}, \\ 0, & \frac{\Delta}{2} < x. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Мы называем ее «патологической функцией» потому, что она не обладает «физически нормальными» свойствами непрерывности и дифференцируемости в точке $x = 0$ [1]). Однако если от этой функции не требовать слишком многого, она окажет значительную помощь в дальнейшем исследовании многих задач. Вспоминая обычное определение интеграла, как предела сумм, можно вывести следующее интегральное правило для дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\delta(\xi - x)\,d\xi = f(x). \tag{2.1.5}$$

Тесно связанной с дельта-функцией и иллюстрирующей интегральные свойства последней является *единичная ступенчатая функция*

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \tag{2.1.6}$$

[1]) Дельта-функция даже не является функцией в обычном понимании этого слова, представляя собой простейший пример *обобщенных функций*. См. об этом Микусинский Я., Сикорский Р., Элементарная теория обобщенных функций, вып. 1, Изд. иностр. лит., М., 1958. — *Прим. ред.*

Эта функция является также не совсем обычной: дифференцирование ее возможно только с известными предосторожностями [1]).

Обращаясь теперь к задаче о решении уравнения (2.1.2), мы сначала ищем решение уравнения в случае силы, сосредоточенной в точке $x=\xi$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\delta(x-\xi).$$

Решение этого уравнения ψ удовлетворяет однородному уравнению $d^2\psi/dx^2 = 0$ во всех точках, где $x \neq \xi$. Чтобы изучить поведение ψ в точке $x=\xi$, интегрируем обе части уравнения по промежутку от $x=\xi-\varepsilon$ до $x=\xi+\varepsilon$, где ε — исчезающе малая величина. Воспользовавшись равенством (2.1.6), мы видим, что в точке $x=\xi$ угловой коэффициент касательной к графику решения должен иметь единичный скачок. Если опоры жесткие, то форма струны длины L для силы $F=T$, сосредоточенной в $x=\xi$, определяется равенствами

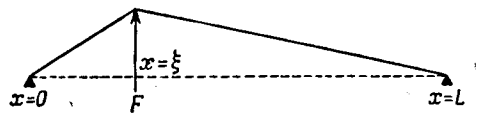


Рис. 2.3. Форма струны, на которую действует одна сила в точке $x=\xi$.

$$\psi = G(x\,|\,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x(L-\xi)}{L}, & 0 < x < \xi, \\ \dfrac{\xi(L-x)}{L}, & \xi < x < L. \end{cases} \tag{2.1.7}$$

Функция $G(x\,|\,\xi)$ называется *функцией Грина* уравнения (2.1.2) для точки $x=\xi$. Отсюда мы видим, что решение для струны, находящейся под действием силы F, сосредоточенной в точке $x=\xi$, имеет вид $(F/T)\,G(x\,|\,\xi)$ и что решение для двух сил — одной F_1, сосредоточенной в точке ξ_1, и другой F_2, сосредоточенной в ξ_2, — имеет вид $(F_1/T)\,G(x\,|\,\xi_1) + (F_2/T)\,G(x\,|\,\xi_2)$.

Переходя от сумм к интегралам и пользуясь равенством (2.1.5), мы видим, что форма равновесия струны, на которую действует не зависящая от времени поперечная сила $F(x)$ и которая находится под действием натяжения T между двумя жесткими опорами, удаленными друг от друга на расстояние L, определяется равенством

$$\psi = \int_0^L \frac{F(\xi)}{T}\,G(x\,|\,\xi)\,d\xi. \tag{2.1.8}$$

Таким образом, функция Грина, которая является решением для случая силы, сосредоточенной в точке $x=\xi$, может быть использована и для получения решения уравнения Пуассона в случае, когда сила имеет произвольный вид и распределена вдоль струны.

Этот прием получения решения общего уравнения с помощью интеграла, содержащего функцию Грина, которая является решением простого частного случая уравнения, подробнее будет рассмотрен дальше.

Волновое уравнение. В связи с другими задачами нам представляется более интересным изучение движения струны после того, как приложенные силы исчезли, чем нахождение устойчивой формы струны под влиянием приложенных поперечных сил. Простейший случай, который является также одним из наиболее интересных, — это случай, когда можно пренебречь всеми силами, кроме сил, вызванных натяжением T струны. Если масса струны равномерно распределена и составляет ρ г

[1]) Из приведенного соотношения (2.1.6) видно, что производной единичной ступенчатой функции является дельта-функция. — *Прим. ред.*

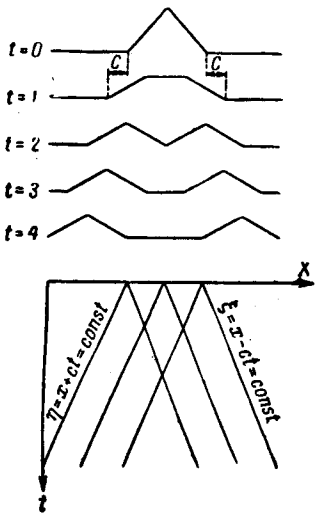
на единицу длины, уравнение поперечного движения получается приравниванием произведения $\rho\,(dx)\,(\partial^2\psi/\partial t^2)$ массы каждого элемента длины струны на его ускорение поперечной силе, вызванной натяжением и действующей на тот же элемент $T dx\,(\partial^2\psi/\partial x^2)$, определенной равенством (2.1.1). Полученное уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,,\quad c^2=\frac{T}{\rho}\,, \tag{2.1.9}$$

по причинам, которые вскоре станут ясными, называется *волновым уравнением*. Оно утверждает, что поперечное ускорение любого участка струны пропорционально кривизне этого участка [1]).

Волна может быть грубо описана как некоторая конфигурация среды (форма струны, распределение плотностей в жидкости и т. д.), перемещающаяся по среде с определенной скоростью. Скорость распространения волны не связана необходимо со скоростью любого участка среды. В самом деле, для волн, определяемых простым уравнением (2.1.9), скорость волны совершенно не зависит от скорости участков среды; другими словами, если уравнение (2.1.9) имеет место, то скорость любой волны на струне будет одна и та же, какую бы форму ни имела эта волна. Волна движется *вдоль* струны со скоростью c, в то время как точка струны движется *поперек* струны вверх и вниз со скоростью $\partial\psi/\partial t$, определяемой формой проходящей волны.

Представление для волны этого типа может быть найдено, если принять, что отклонение струны от положения равновесия есть функция от $x-ct$ для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x, и от $x+ct$ для волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси x. Чтобы показать, что уравнение (2.1.9) определяет такое движение, можно сделать замену переменных, взяв за новые переменные величины $\xi=x-ct$ и $\eta=x+ct$.



Р и с. 2.4. Волновое движение струны; показаны волны, распространяющиеся в противоположных направлениях.

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\,,$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\,.$$

Следовательно, уравнение (2.1.1) принимает вид

$$4\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

Решением этого уравнения служит $\psi=f(\xi)+F(\eta)$, где f и F — любые функции, удовлетворяющие требованиям непрерывности и имеющие малые амплитуды, что было предположено при выводе уравнения (2.1.9). Как мы увидим дальше, это и будет наиболее общим решением уравнения (2.1.9), так что наиболее общее движение струны всегда представляет собой наложение волны, движущейся направо, и другой волны, движущейся налево, причем обе волны движутся с постоянной скоростью, одной и той же для обеих волн, и имеют неизменную форму.

[1]) См. примечание на стр. 121. — *Прим. ред.*

Заметим, что в случае, когда c есть скорость света, волновое уравнение будет инвариантным относительно преобразования Лоренца, так как тогда выражение $(\partial^2\psi/\partial x^2)-(1/c^2)(\partial^2\psi/\partial t^2)$ является скаляром, полученным сверткой тензора второго порядка $\partial^2\psi/\partial x_n\,\partial x_m$, и, следовательно, инвариантно относительно пространственно-временного вращения, имеющего вид, рассмотренный в первой главе. Линии $\xi=x-ct$ и $\eta=x\ \ ct$ представляют собой мировые линии нулевой собственной длины ($c^2dt^2-dx^2=0$) и изображают лучи света.

Простое гармоническое движение, уравнение Гельмгольца. Иногда волновое движение в его зависимости от времени будет синусоидальным, так что можно выделить (как часто говорят, «отделить») множитель, зависящий только от времени и имеющий вид $e^{-i\omega t}$. Так как мы условились применять только действительную часть комплексного решения, этот множитель и дает синусоидальную зависимость от времени. Постоянная ω называется *угловой скоростью* колебания, а величина $\nu=\omega/2\pi$ — *частотой* колебания волны.

Подставив выражение $\psi=\gamma(x)\,e^{-i\omega t}$ в волновое уравнение (2.1.9), получим для пространственной части ψ уравнение

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\gamma=0, \tag{2.1.10}$$

которое называется *уравнением Гельмгольца*.

Мы увидим дальше в этой книге (но будет хорошим упражнением для читателя — показать самому это теперь), что функция Грина [см. исследование уравнения (2.1.7)] этого уравнения для бесконечной струны, соответствующая силе $Te^{-i\omega t}$, сосредоточенной в точке $x=0$, имеет вид

$$G(x\,|\,0)=\begin{cases}\dfrac{i}{2}\,\dfrac{c}{\omega}\,e^{-i\omega x/c}, & x<0,\\[2ex] \dfrac{i}{2}\,\dfrac{c}{\omega}\,e^{i\omega x/c}, & x>0.\end{cases}$$

Общее выражение для любой приложенной силы, имеющей синусоидальную зависимость от времени с частотой $\omega/2\pi$, получается в виде интеграла, аналогичного интегралу (2.1.8).

Волновая энергия. Так как волны распространяются в обоих направлениях с постоянной скоростью и не изменяя своей формы, естественно ожидать, что волновая энергия, однажды сообщенная струне, распространяется без потерь. Полная энергия струны составляется из суммы кинетических энергий отдельных элементов струны

$$\text{К. Э.}=\frac{1}{2}\rho\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2dx$$

(интегрирование производится по длине струны) и полной потенциальной энергии струны. Если форма струны в момент t определяется функцией $\psi(x,\,t)$, то потенциальная энергия может быть найдена, если вообразить, что эта форма струны получилась под действием поперечной распределенной силы такой величины, что, двигая медленно струну, она перемещает ее из положения равновесия и придает ей окончательную форму $\psi(x,\,t)$. Можно принять, что промежуточные формы струны определяются функцией $\beta\psi$, где β меняется от нуля до единицы по мере того, как струна движется. Чтобы достигнуть промежуточной формы струны $\beta\psi$, нужно к элементу ее dx приложить силу $-T\beta\,(\partial^2\psi/dx^2)\,dx$; работа этой силы при перемещении этого элемента из положения $\beta\psi$

в положение $(\beta+d\beta)\psi$ равна $-T\psi\,(\partial^2\psi/\partial x^2)\,dx\,\beta\,d\beta$. Полная работа, соответствующая движению струны из положения равновесия ($\beta=0$) к ее окончательному положению $\psi\,(\beta=1)$, равна, следовательно,

$$\text{П. Э.} = -T\int \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx\int_0^1 \beta\,d\beta = -\frac{1}{2}T\int \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx.$$

Полная энергия, которой обладает участок струны от точки $x=a$ до $x=b$, имеет поэтому вид

$$W(a,\,b) = \text{К.Э.} + \text{П.Э.} = \frac{1}{2}\rho\int_a^b\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - c^2\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\rho\int_a^b\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right]dx - \frac{1}{2}T\left[\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_a^b,$$

где окончательная симметричная форма получена интегрированием по частям члена, определяющего потенциальную энергию.

Если концы a и b струны жестко закреплены, то ψ равно нулю в точках a и b и последний член в симметричном выражении обращается в нуль. Таким образом, энергия всей струны пропорциональна интегралу по длине струны от квадрата скорости каждого элемента, сложенного с произведением c^2 на квадрат наклона каждого элемента.

Применение этого выражения для подсчета энергии только части струны не дает единственно возможного результата, так как вопрос об энергии «концов» выбранного участка не может быть решен однозначно. Вполне определенной величиной является энергия всей струны, включая опоры, так как только эта энергия сохраняется. Этот факт может быть показан более наглядно, если подсчитать потенциальную энергию части струны другим способом и убедиться в том, что это дает другой результат. Например, из-за отличия формы $\psi(x)$ от формы равновесия струна растягивается. Соответствующая избыточная энергия, вызванная растяжением, будет как раз потенциальной энергией струны, так как она равна работе, произведенной главной (горизонтальной) составляющей натяжения T. Длина элемента dx струны благодаря растяжению становится равной $\sqrt{1+(\partial\psi/\partial x)^2}\,dx$. Потенциальная энергия, получающаяся в результате действия постоянной силы T, таким образом, имеет величину

$$\text{П. Э.} = +T\int_a^b\left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2} - 1\right]dx.$$

Последнее выражение с точностью до членов второго порядка равно

$$\text{П. Э.} = \frac{1}{2}T\int_a^b\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 dx,$$

так что энергия $W(a,\,b)$ имеет вид

$$W(a,\,b) = \frac{1}{2}\rho\int_a^b\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right]dx. \qquad (2.1.11)$$

Сравнивая это с нашим предыдущим выражением, мы видим, что оба они различаются слагаемым $-\frac{1}{2}T\,[\psi\partial\psi/\partial x]_a^b$, которое зависит только

от значений в концах a и b. Каждый из этих результатов одинаково пригоден для всей струны, так как если a и b являются концами ее (которые жестко или свободно закреплены[1]), так что энергия не передается опорам), то оба выражения совпадают друг с другом. Только в этом случае результат будет единственным. Так как выражение (2.1.11) проще, мы будем употреблять его в дальнейших рассуждениях.

Поток энергии. Скорость изменения энергии части струны, лежащей между a и b, получается дифференцированием $W(a, b)$ по времени

$$\frac{d}{dt}W(a, b) = \rho \int_a^b \left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{T}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}\right] dx =$$

$$= T\int_a^b \left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}\right] dx = T\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] dx.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}W(a, b) = T\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_a^b = T\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x=b} - T\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x=a}. \quad (2.1.12)$$

Эти два члена представляют собой поток энергии внутрь струны или изнутри ее через два конца. Если $-T(\partial\psi/\partial t)(\partial\psi/\partial x)$ представляет собой поток энергии в положительном направлении оси x через точку x, то первый член правой части представляет поток энергии внутрь участка струны через его правый конец ($b > a$), а второй член — поток энергии внутрь участка струны через левый конец.

Нетрудно проверить, что $-T(\partial\psi/\partial t)(\partial\psi/\partial x)$ равно потоку энергии вдоль струны в положительном направлении оси x, так как $-T(\partial\psi/\partial x)$ равно поперечной силе, с которой часть струны, лежащая слева от x, действует на часть струны, расположенную правее, вызывая ее движение, а $\partial\psi/\partial t$ есть поперечная скорость точки x струны. Сила, умноженная на скорость, как известно, равна мощности или потоку энергии.

В этой связи член $-T(\partial\psi/\partial x)$ аналогичен напряжению в линии электропередачи в некоторой точке, а $\partial\psi/\partial t$ аналогично силе тока, проходящего через ту же точку. Произведение этих двух величин равно передаваемой мощности.

Мощность и волновой импеданс. Аналогия с линией передачи может быть продолжена и далее. Для переменных токов комплексное отношение напряжения к силе тока называется импедансом, или полным сопротивлением линии. Часто этот импеданс[2]) является функцией частоты переменного тока, но иногда, а именно когда импеданс есть чистое омическое сопротивление, он не зависит от частоты.

---

[1])На свободно закрепленном конце $\partial\psi/\partial x = 0$. — *Прим. ред.*

[2]) Так как для обозначения изменения во времени мы употребляем показательную функцию с отрицательным показателем $e^{-i\omega t}$, то знак членов реактанса (реактивного сопротивления или мнимой части импеданса) будет противоположен знаку соответствующих выражений, принятых в электротехнике. Их легко получить, поставив знак минус перед i. Например, если $Z = R - iX$, то X будет тем же самым членом реактивного сопротивления, который встречается в электротехнических инженерных обозначениях. Таким образом, формулы импеданса, употребляемые в этой книге, переходят в формулы в инженерных обозначениях при помощи замены $-i$ всюду на $+j$.

Аналогичным электрическому импедансу является комплексное отношение поперечной движущей силы к поперечной скорости, которое можно назвать механическим импедансом. Для простой струны, достаточно длинной для того, чтобы волны не отражались от правого конца (который предполагается находящимся в $x=\infty$), смещение точки x, вызванное синусоидальной волной, идущей в направлении возрастания x, может быть представлено выражением $\psi = A_+ e^{i(\omega/c)(x-ct)}$. Сила и скорость в точке x равны

$$-T\frac{\partial\psi}{\partial x} = -iT\frac{\omega}{c}\psi, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\omega\psi.$$

Следовательно, поток энергии через точку x, т. е. среднее значение произведения действительных частей этих двух выражений, есть

$$\text{мощность} = \frac{1}{2}\rho c\omega^2 |A_+|^2 = \frac{1}{2}\rho c |U_+|^2, \quad T = \rho c^2$$

для синусоидальной волны, распространяющейся в положительном направлении оси x. Величина $U_+ = -i\omega A_+$ может быть названа *амплитудой скорости* струны (но не волны) для синусоидальной волны.

Импеданс в точке x для этой простой волны равен

$$Z_\omega = \frac{-T(\partial\psi/\partial x)}{\partial\psi/\partial t} = \rho c. \tag{2.1.13}$$

Эта величина называется *волновым импедансом* струны. Для простой струны в случае волн, распространяющихся в одном направлении, он постоянен и не зависит ни от x, ни от частоты. На самом деле для получения этого выражения для волнового импеданса не обязательно рассматривать, как мы делали, распространяющуюся в одном направлении волну такого специального вида. Для любой волны $f(x-ct)$, распространяющейся в положительном направлении оси x, поперечная сила равна $-Tf'(x-ct)$ (здесь штрих обозначает производную), соответствующая поперечная скорость равна $-cf'(x-ct)$ и отношение силы к скорости, следовательно, равно $T/c = \rho c$; оно не зависит ни от x и t ни от формы волны.

Конечно, если мы имеем дело с волнами обоих направлений, импеданс будет зависеть от частоты и положения точки. Если $\psi = [A_+ e^{i\omega x/c} + A_- e^{-i\omega x/c}] e^{-i\omega t}$, тогда средний поток энергии, полученный как осреднение выражения (2.1.12) по циклу, равен

$$\text{мощность} = \frac{1}{2}\rho c\omega^2 [|A_+|^2 - |A_-|^2]$$

и импеданс равен

$$Z(x) = \rho c \frac{A_+ e^{i\omega x/c} - A_- e^{-i\omega x/c}}{A_+ e^{i\omega x/c} + A_- e^{-i\omega x/c}}.$$

В этой главе встретится много случаев, в которых аналогия с напряжением, силой тока, мощностью и импедансом может быть с пользой применена и обобщена. Например, в волновых движениях всех видов можно обычно найти две величины, получаемые из волновой функции, такие, что их произведение равно потоку энергии в волне, а их отношение может быть принято за обобщенный импеданс. В большинстве этих случаев, когда волна перемещается только в одном направлении, импеданс является действительной постоянной, не зависящей от положения и частоты; в этих случаях это постоянное значение может быть названо *волновым импедансом* изучаемого волнового движения.

Более сложные выражения импеданса для более сложных форм волнового движения легче всего дать через этот волновой импеданс как масштабный множитель. Например, для струны постоянная $\rho c = T/c = \sqrt{\rho T}$ является масштабным множителем в общем выражении импеданса.

Вынужденное движение струны. Как пример применения обобщенного понятия импеданса рассмотрим движение струны длины l, поддерживаемой в точке $x = l$ под натяжением T зажимом (не являющимся абсолютно жестким) и приводимой в движение поперечной силой в точке $x = 0$. Отношение синусоидальной поперечной силы, действующей на зажим в точке $x = l$ и являющейся действительной частью выражения $F_l e^{-i\omega t}$, и поперечной скорости зажима $U_l e^{-i\omega t}$, вызванной силой, называется *поперечным механическим импедансом* зажима $Z_l = F_l/U_l$. Эта величина зависит обычно от частоты $\omega/2\pi$, но внутри известных границ не зависит от амплитуды F_l и U_l.

Форма струны может быть представлена с помощью комбинации синусоидальной волны $A_+ e^{(i\omega x/c) - i\omega t}$, идущей из источника ($x = 0$) к зажиму ($x = l$), и другой волны $A_- e^{-(i\omega x/c) - i\omega t}$, отраженной от зажима и движущейся назад к источнику:

$$\psi = [A_+ x^{i\omega x/c} + A_- e^{-i\omega x/c}]\, e^{-i\omega t} = A \operatorname{ch}\left[\frac{i\omega x}{c} + \pi\alpha_0 - i\pi\beta_0\right] e^{-i\omega t},$$

где

$$A_+ = \frac{1}{2} A e^{\pi(\alpha_0 - i\beta_0)}, \qquad A_- = \frac{1}{2} A e^{-\pi(\alpha_0 - i\beta_0)}.$$

Следовательно, поперечная сила, с которой струна действует на зажим, равна

$$\begin{aligned} F_l e^{-i\omega t} &= -T\,(\partial\psi/\partial x)_{x=l} = \\ &= -i\omega\rho c\,[A_+ e^{i(\omega/c)l} - A_- e^{-i(\omega/c)l}]\, e^{-i\omega t} = \\ &= -i\omega\rho c A \operatorname{sh}[i(\omega l/c) + \pi\alpha_0 - i\pi\beta_0]\, e^{-i\omega t} = \\ &= Z_l U_l e^{-i\omega t} = Z_l\,(-\partial\psi/\partial t)_{x=l} = \\ &= -i\omega Z_l\,[A_+ e^{i(\omega/c)l} + A_- e^{-i(\omega/c)l}]\, e^{-i\omega t} = \\ &= -i\omega Z_l A \operatorname{ch}[i(\omega l/c) + \pi\alpha_0 - i\pi\beta_0]\, e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Для получения четырех последних выражений мы воспользовались определением поперечного механического импеданса зажима.

Из этих уравнений мы можем выразить через импеданс Z_l комплексное отношение амплитуд волн A_-, A_+, а также постоянные α_0, β_0 [1])

$$\frac{A_-}{A_+} = \frac{\rho c - Z_l}{\rho c + Z_l} e^{2i\omega l/c}, \qquad \alpha_0 - i\beta_0 = \frac{1}{\pi} \operatorname{ar\,th}\left(\frac{Z_l}{\rho c}\right) - i\,\frac{2l}{\lambda}, \tag{2.1.14}$$

где $\lambda = c/\nu = 2\pi c/\omega$ — длина волн, распространяющихся по струне. Отношение A_-/A_+ называется *отношением стоячих волн* или, иначе, *коэффициентом отражения*. Если Z_l чисто мнимое, т. е. является чистым реактивным сопротивлением, то $|A_-/A_+| = 1$, так что амплитуды падающей и отраженной волн равны, как это и должно быть, хотя, конечно, *фаза* отраженной волны будет отлична от фазы падающей волны. Связь между коэффициентом отражения и Z_l, устанавливаемая в (2.1.14), является примером соотношений между унитарным оператором отражения и опе-

[1]) См. примечание на стр. 127.

ратором импеданса, которые были рассмотрены в параграфе, посвященном абстрактным векторным пространствам. Из (2.1.14) видим, что граничное условие в точке $x=l$ определяет сдвиг фаз и отношение амплитуд падающей и отраженной волн. Если эти величины известны, то отношение Z_0 приложенной силы к скорости в точке $x=0$ приложения силы, которое является для струны *импедансом точки приложения силы*, может быть найдено сразу

$$Z_0 = \rho c \frac{1-(A_-/A_+)}{1+(A_-/A_+)} = \rho c \operatorname{th}[\pi(\alpha_0 - i\beta_0)]. \tag{2.1.15}$$

Другими словами, если известна сила, может быть вычислена скорость струны в точке $x=0$, равно как и выражения A_+, A_-, A, ϕ. Например, если приложенная сила есть $f(\omega)e^{-i\omega t}$, то волна определяется выражением

$$\phi(\omega, x, t) = \frac{f(\omega)e^{-i\omega t}}{-i\omega Z_0} \frac{\operatorname{ch}(i(\omega x/c)+\pi\alpha_0 - i\pi\beta_0)}{\operatorname{ch}(\pi\alpha_0 - i\pi\beta_0)} =$$

$$= \frac{f(\omega)e^{-i\omega t}}{-i\omega\rho c}\left[\operatorname{cth}(\pi\alpha_0 - i\pi\beta_0)\cos\frac{\omega x}{c} + i\sin\frac{\omega x}{c}\right]. \tag{2.1.16}$$

Переходная характеристика. Интеграл Фурье. Так же как и в случае уравнения Пуассона, рассмотренного на стр. 121, решение для нескольких различных сил, действующих одновременно, равно сумме решений для этих сил, действующих отдельно. Например, если действуют силы всех частот и полную поперечную силу, действующую в конце $x=0$, струны можно выразить в форме интеграла

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega, \tag{2.1.17}$$

то форма струны как функция x и t определяется равенством

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega, x, t)\,d\omega, \tag{2.1.18}$$

где $\phi(\omega, x, t)$ дается выражением (2.1.16).

В главе 4 мы покажем, что весьма многие функции от t могут быть выражены с помощью интегралов типа, приведенного в равенстве (2.1.17) (интегралы этого вида называются *интегралами Фурье*), и мы увидим там, как найти $f(\omega)$, если $F(t)$ известно. Следовательно, интеграл (2.1.18) дает общее решение задачи о движении струны под действием приложенной в конце её поперечной силы, почти в любом физически реализуемом случае. Техника решения аналогична технике применения функции Грина, затронутой при выводе формулы (2.1.8); она подскажет нам также подобные методы решения других уравнений, которые дальше встретятся в этой главе. Сначала находят решение для «силы» особенно простого вида, зависящей от некоторого параметра (точки приложения для уравнения Пуассона, частоты для волнового уравнения). Сила общего вида может быть тогда получена в виде интеграла от простой силы, взятого по параметру; полученное решение будет выражаться также аналогичным интегралом от простого решения, взятым по тому же параметру. Это — общий принцип техники применения функции Грина; он будет рассмотрен в гл. 7 и в некоторых других местах этой книги.

Операторные уравнения струны. Прежде чем закончить разбор задачи о волновом движении простой струны, интересно наметить другой подход к задаче, связанный с рассмотрением операторов в абстрактном

векторном пространстве, изложенный в гл. 1 и далее в этой главе. Начнем с рассмотрения струны, состоящей из совокупности материальных точек одинаковой массы, соединенных между собой невесомыми участками струны, имеющими равные длины. Сначала предположим, что имеется лишь конечное число N таких точек (очевидно, недостаточное приближение к равномерной струне), а потом будем приближаться к действительной струне, заставив N стремиться к бесконечности. Таким образом мы обнаружим связь между связанными осцилляторами, разобранными на стр. 80, и гибкой струной.

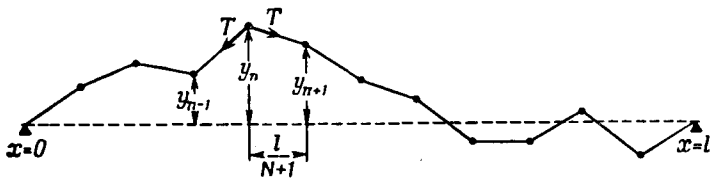


Рис. 2.5. Смещения материальных точек, лежащих на упругой струне.

Мы аппроксимируем струну постоянной плотности, находящуюся под натяжением T между двумя жесткими зажимами, удаленными друг от друга на расстояние l, посредством N равноудаленных материальных точек, каждая из которых имеет массу $\rho l/N$ и удалена от соседних точек на расстояние $l/(N+1)$. Беглый взгляд на рис. 2.5 показывает, что если смещение n-й массы от положения равновесия есть y_n, то действующая на эту массу поперечная сила, вызванная смещением соседних масс, равна

$$(N+1)\,T\left\{\frac{y_{n+1}-y_n}{l}+\frac{y_{n-1}-y_n}{l}\right\}=(N+1)\,\frac{T}{l}\,(y_{n+1}+y_{n-1}-2y_n).$$

(Последнее выражение в скобках является, конечно, разностным аналогом второй производной.) Следовательно, наша система совокупных уравнений движения N частиц имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2y_1}{dt^2}+2\omega_0^2y_1=\omega_0^2y_2,\\
&\frac{d^2y_2}{dt^2}+2\omega_0^2y_2=\omega_0^2(y_1+y_3),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d^2y_n}{dt^2}+2\omega_0^2y_n=\omega_0^2(y_{n-1}+y_{n+1}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d^2y_N}{dt^2}+2\omega_0^2y_N=\omega_0^2y_{N-1},
\end{aligned}\qquad(2.1.19)$$

где $\omega_0^2=N(N+1)(T/\rho l^2)$.

Будем теперь считать смещения y_n составляющими вектора $\mathbf{y}$ в абстрактном векторном пространстве N измерений; единичные векторы этого пространства, расположенные вдоль осей координат, обозначим через $\mathbf{e}_n$. Правые части уравнений можно рассматривать как результат действия аффинора $\omega_0^2\mathrm{U}$, который преобразует вектор $\mathbf{e}_n$ в вектор с единичными компонентами вдоль $\mathbf{e}_{n-1}$ и $\mathbf{e}_{n+1}$. Аффинор U назовем *оператором единичного сдвига*, так как он сдвигает индекс n на единицу в ту и другую стороны. Оператор U может быть записан следующим образом через век-

торы e:

$$\mathfrak{U} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) + \ \ldots\ + \mathbf{e}_n(\mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_{n+1}) + \ \ldots\ + \mathbf{e}_N\mathbf{e}_{N-1}. \quad (2.1.20)$$

Таким образом, уравнение, определяющее вектор y, изображающий смещение всех частиц,

$$\mathbf{y} = \sum_{n=1}^{N} y_n \mathbf{e}_n$$

может быть записано так:

$$\frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} + 2\omega_0^2\mathbf{y} = \omega_0^2\mathfrak{U}\cdot\mathbf{y}.$$

Собственные векторы оператора единичного сдвига. Решение дифференциального уравнения для y производится легче, если использовать собственные векторы $\mathbf{u}_n$ оператора $\mathfrak{U}$:

$$\mathfrak{U}\cdot\mathbf{u}_n = \eta_n\mathbf{u}_n,$$

где $\mathbf{u}_n$ — единичный вектор, направленный по главной оси оператора $\mathfrak{U}$. Подставив в уравнение для y вместо y вектор $\mathbf{u}_n$, получим уравнение, определяющее зависимость $\mathbf{u}_n$ от времени

$$\frac{d^2\mathbf{u}_n}{dt^2} + \omega_0^2(2-\eta_n)\mathbf{u}_n = 0,$$

так что зависимость $\mathbf{u}_n$ от времени выражается множителем $e^{-i\omega_0\sqrt{2-\eta_n}t}$. Выражение вектора $\mathbf{u}_n$ через единичные векторы $\mathbf{e}_m$ найдем, решив приведенное выше уравнение для собственных значений.

Пусть $\mathbf{u}_n$ выражено через $\mathbf{e}_m$ с помощью равенства

$$\mathbf{u}_n = \sum_{m=1}^{N} \gamma_{nm}\mathbf{e}_m,$$

где величины γ являются направляющими косинусами преобразования. Тогда γ удовлетворяют уравнениям

$$\gamma_{n,m-1} - \eta_n\gamma_{n,m} + \gamma_{n,m+1} = 0; \quad (2.1.21)$$

в первом и последнем уравнениях, т. е. при $m=1$ и $m=N$, величины γ_{n0} и $\gamma_{n,N+1}$, естественно, опущены. Однако и эти два уравнения можно записать в том же виде, если мы предположим, что величины $\gamma_{n,0}$ и $\gamma_{n,N+1}$ всегда равны нулю.

Решение уравнений (2.1.21) получается с помощью тригонометрической формулы

$$\cos\alpha\sin m\alpha = \frac{1}{2}\sin[(m-1)\alpha] + \frac{1}{2}\sin[(m+1)\alpha].$$

В самом деле, положив $\gamma_{nm} = A\sin m\alpha_n$ (зависимость от времени подразумевается) и $\eta_n = 2\cos\alpha_n$, мы удовлетворим всем уравнениям. Одно из дополнительных условий, именно $\gamma_{n0}=0$, также выполняется; второе требование $\gamma_{n,N+1}=0$ может быть удовлетворено, если положим, что α_n равно $n\pi/(N+1)$. Так как

$$\sum_{m=1}^{N}\sin\frac{mn\pi}{N+1}\sin\frac{mn'\pi}{N+1} = \begin{cases} 0 & n'\neq n, \\ \frac{1}{2}(N+1), & n'=n, \end{cases}$$

то значения постоянных A можно выбрать так, чтобы γ были нормированными направляющими косинусами, а $\mathbf{u}$ — единичными векторами, если

$\mathbf{e}$ — единичные векторы. Окончательные результаты таковы:

$$\mathbf{u}_n = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{m=1}^{N} y_m \sin\frac{mn\pi}{N+1} \exp\left[-2i\omega_0 i \sin\frac{n\pi}{2(N+1)}\right],$$

$$\mathfrak{U} \cdot \mathbf{u}_n = 2\cos[n\pi/(N+1)]\,\mathbf{u}_n. \qquad (2.1.22)$$

Таким образом, мы нашли совокупность N взаимно-ортогональных единичных векторов в абстрактном векторном пространстве; эти векторы направлены вдоль главных осей оператора $\mathfrak{U}$ (т. е. являются собственными векторами оператора $\mathfrak{U}$).

В этой новой системе координат решение уравнения движения для вектора $\mathbf{y}$, представляющего движение N частиц, получается непосредственно

$$\sum_{m=1}^{N} y_m \mathbf{e}_m = \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{N} U_n \mathbf{u}_n =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n,\,m=1}^{N} U_n \mathbf{e}_m \sin\frac{mn\pi}{N+1} \exp\left[-2i\omega_0 t \sin\frac{n\pi}{2(N+1)}\right].$$

Следовательно,

$$y_m = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=1}^{N} U_n \sin\frac{mn\pi}{N+1} \exp\left[-2i\omega_0 t \sin\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]. \qquad (2.1.23)$$

Допустимые частоты равны $\omega_n/2\pi$, где $\omega_n = 2\omega_0 \sin[n\pi/2(N+1)]$. Составляющие движения $\mathbf{u}_n$ называются *нормальными видами движения*.

Если вначале частицы были смещены на расстояния y_n° и все имели начальные скорости, равные нулю, то значения U_n могут быть найдены с помощью первых уравнений стр. 132

$$(\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_n)_{t=0} = U_n = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{m=1}^{N} y_m^\circ \sin\frac{mn\pi}{N+1}. \qquad (2.1.24)$$

Таким образом, коэффициенты разложений y_m могут быть выражены через начальные значения y_m° и направляющие косинусы преобразования.

Предельный случай непрерывной струны. Для того чтобы перейти от набора N частиц к непрерывной струне, мы увеличиваем N до бесконечности, так что каждая «точка» струны отмечается своим значением n, отличным от других значений. Если струна действительно непрерывна, то N равно несчетной бесконечности, а это означало бы, что соответствующее абстрактное векторное пространство имеет несчетное множество взаимно-перпендикулярных направлений. Такое векторное пространство представить себе довольно трудно, но мы можем утешить себя тем, что здесь такие тонкости с различением типов бесконечности являются скорее академическими, так как на самом деле струна непрерывна лишь приближенно и наши теперешние решения недействительны для частей, размеры которых равны размерам атома или меньше их. Мы можем успокоить себя также тем, что только малое подпространство такого «сверхвекторного» пространства соответствует физической стороне дела, так как из непрерывности следует, что значения y_n и y_{n+1} должны сближаться друг с другом при стремлении к нулю расстояний между последовательными точками.

Во всяком случае, для непрерывной струны можно отказаться от несчетного множества индексов m, а характеризовать точки расстоянием x от одного из концов, т. е. положить $x = ml/(N+1)$. Кроме того, так как N столь велико, то разницей между N и $N+1$ можно пренебречь. Однако индекс n, которым отмечены различные допустимые виды движения, вовсе не имеет нужды становиться бесконечным или непрерывным, так как мы обычно интересуемся небольшим (в пределах первой сотни или около того) количеством допустимых частот. Таким образом, n будет сохранять целые значения, и n/N будет мало. Более точно, переход совершается следующим образом:

$$\omega_n \to \frac{n\pi c}{l}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad \mathbf{e}_m \to \mathbf{e}(x), \quad \mathbf{y} = \sum_x y(x)\,\mathbf{e}(x),$$

$$\mathbf{y} \to \sqrt{\frac{N}{2}} \sum_n Y_n \mathbf{u}_n = \sum_{n,x} Y_n \mathbf{e}(x) \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-i\omega_n t},$$

$$y(x) = \sum_n Y_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-i\omega_n t}.$$

Последнее равенство дает обычный *ряд Фурье* для свободных колебаний однородной струны между жесткими зажимами. Функция $\sin(n\pi x/l)\,e^{-i\omega_n t}$, дающая форму n-го нормального колебания, является *функцией преобразования*, заменяющей счетное множество собственных векторов $\mathbf{u}_n$ оператора $\mathfrak{U}$ несчетным множеством единичных векторов $\mathbf{e}(x)$, каждый из которых соответствует отдельной точке непрерывной струны. Суммирование по всем этим точкам обозначено символом суммирования $\sum_x$, хотя его можно было бы выразить также с помощью интеграла по x. Предельный случай уравнения (2.1.24), например, лучше выражается через интеграл. Мы положим Y_n равным предельному значению $U_n\sqrt{2/(N+1)}$, так что уравнения, выражающие Y_n через начальные значения смещений y_n° (если начальные скорости равны нулю), имеют вид

$$Y_n = \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N} y_m^\circ \sin\frac{mn\pi}{N}\right\}, \text{ где } m \to \frac{xN}{l}.$$

Число слагаемых этой суммы по m, лежащих между x и $x+dx$, будет, следовательно, равно $(N/l)\,dx$. Таким образом, сумма для Y_n в пределе будет равна интегралу

$$Y_n = \frac{2}{l}\int_0^l y^\circ(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

который является обычным интегралом для коэффициентов ряда Фурье и дает амплитуды различных нормальных колебаний.

Предположим теперь, что расстояние между зажимами безгранично возрастает (мы помещаем начало координат в средней точке струны); тогда другой способ предельного перехода, который подробно изложен в гл. 4, приводит нас к общему решению в случае волнового движения бесконечной струны, подвергнутой первоначально смещению $y^\circ(x)$ и освобожденной в момент $t = 0$:

$$y(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x-ct)}\,d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} y^\circ(\xi)\,e^{-i\alpha\xi}\,d\xi. \qquad (2.1.25)$$

Действительная часть этого выражения дает истинное смещение точки x в момент t.

Наконец, интересно посмотреть, какой вид принимает в пределе оператор $\mathcal{U}$ для непрерывной струны. Чтобы подойти к уравнению для вектора $\mathbf{y}$, мы ищем предел выражения, полученного в результате применения оператора $\omega_0^2[\mathcal{U}-2]$ к вектору $\mathbf{y}=\sum_m y_m \mathbf{e}_m \to \sum_x y(x)\,\mathbf{e}(x)$. До перехода к пределу применение оператора давало для составляющих y_m вектора

$$\omega_0^2[\mathcal{U}-2]\cdot\mathbf{y}=\frac{N(N+1)T}{pl^2}\sum_{n=1}^{N}[(y_{n+1}-y_n)-(y_n-y_{n-1})]\,\mathbf{e}_n.$$

Так как расстояние между частицами становится все меньше и меньше, разность $y_{n+1}-y_n$ приближенно можно заменить дифференциалом $dy(x)$, а расстояние между частицами $l/(N+1)$ — дифференциалом dx. Следовательно, $(N/l)(y_{n+1}-y_n)$ при переходе к пределу дает dy/dx, и приведенное выше выражение превращается в

$$\omega_0^2[\mathcal{U}-2]\cdot\mathbf{y}\to c^2\sum_x \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2}\,\mathbf{e}(x),$$

так что уравнение движения для $\mathbf{y}$ в пределе принимает вид

$$\frac{\partial^2\mathbf{y}}{\partial t^2}=\sum_x \frac{\partial^2 y(x)}{\partial t^2}\,\mathbf{e}(x)=c^2\sum_x \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2}\,\mathbf{e}(x)$$

и, следовательно, уравнение для функции преобразования $y(x)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

т. е. совпадает с волновым уравнением (2.1.9).

Таким образом, проделав окольный путь через абстрактное векторное пространство, мы снова пришли к дифференциальному уравнению в частных производных для волнового движения простой струны. Этот экскурс мы предприняли потому, что подобные рассуждения будут проводиться и в дальнейшем в этой главе там, где другие пути совершенно не так прямы и просты, как в случае струны.

Влияние трения. До сих пор мы пренебрегали сопротивлением движению струны со стороны окружающей среды (воздуха или воды). Для движений с малой амплитудой это сопротивление противоположно направлению движения каждого элемента длины и пропорционально его скорости. Сила, действующая на элемент, лежащий между x и $x+dx$, пропорциональна скорости $\partial\psi/\partial t$ этого элемента и направлена в сторону, противоположную этой скорости. Коэффициент пропорциональности R обычно зависит от частоты колебаний струны, но в случае, когда вязкость среды достаточно велика, он не зависит от частоты. Этот последний случай наиболее прост, и мы с него начнем.

Уравнение движения, если принять во внимание натяжение и трение среды, без учета жесткости и внутреннего трения струны имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+2k\frac{\partial\psi}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0,\quad k=\frac{R}{2\rho},\quad c^2=\frac{T}{\rho}.$$

Благодаря трению свободные колебания, конечно, становятся затухающими. Если струна натянута между двумя жесткими зажимами, нахо-

дящимися друг от друга на расстоянии l, то форма нормальных колебаний не изменяется трением и по-прежнему будет иметь вид $\sin(\pi nx/l)$. В то же время отдельные колебания затухают с течением времени, так как решение этого уравнения имеет вид

$$\psi = \sum_n A_n \sin\frac{\pi nx}{l} e^{-kt - i\omega_n t}, \quad \omega_n^2 = \frac{\pi nc}{l} - k^2.$$

Если k зависит от частоты, то для n-го нормального колебания оно будет иметь значение, соответствующее величине ω_n, так что различные колебания будут затухать с различными скоростями.

С другой стороны, если струна имеет очень большую длину и приводится в движение на одном конце действием синусоидальной силы $Fe^{-i\omega t}$, то волны будут затухать при перемещении по струне в большей степени, чем с течением времени. Решение в этом случае имеет вид

$$\psi = Ae^{i\alpha x - i\omega t}, \quad \alpha^2 = \frac{\rho\omega^2}{T} + i\frac{R\omega}{T};$$

следовательно, α имеет положительную мнимую часть, которая и вызывает затухание в направлении движения волны.

Уравнение диффузии. В одном из возможных предельных случаев силы вязкости могут полностью преобладать над инерционными силами, так что уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \varkappa^2\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad \varkappa^2 = \frac{R}{T}. \tag{2.1.26}$$

Это уравнение много раз будет встречаться в этой книге. Так как оно также описывает поведение некоторого растворенного вещества, диффундирующего в растворителе (где ψ — плотность растворенного вещества), то обычно его называют *уравнением диффузии* [1]).

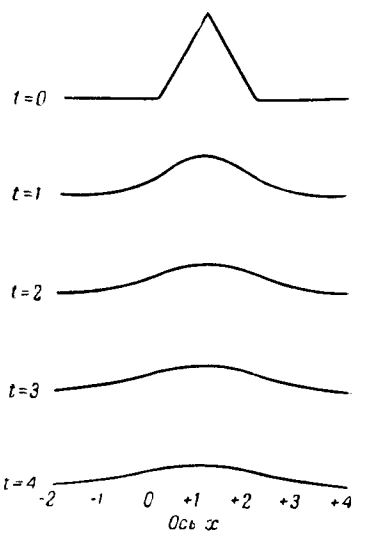
Так же как и в случае волнового уравнения (2.1.9), здесь имеет место тенденция к выпрямлению искривленных участков, но здесь *скорость* любого участка струны пропорциональна и противоположна по знаку кривизне этого участка, тогда как в волновом уравнении *ускорение* пропорционально кривизне и противоположно ей по знаку. Короче говоря, мы и здесь по существу имеем дело с условием равновесия. Для волнового уравнения скорость движения искривленного участка непрерывно возрастает до тех пор, пока он не сделается прямолинейным, и только тогда скорость начинает уменьшаться, что и вызывает колебательное движение. В случае же уравнения диффузии скорость любого участка становится равной нулю, как только этот участок окончательно выпрямляется, так что здесь колебательного движения нет. Таково предполагаемое поведение струны, не имеющей массы, движущейся в вязкой жидкости, когда затухание больше критического.

В случае волнового уравнения общее решение может быть выражено в виде результата наложения друг на друга двух волн, движущихся в противоположных направлениях $f(x+ct)+F(x-ct)$, что объясняется симметричностью соотношений между x и t в уравнении. В уравнении диффузии этой симметрии нет, и поэтому не существует простого выражения для общего решения. Кроме того, здесь имеется различие между положительным и отрицательными направлениями времени, что вытекает из того факта, что производная по времени, входящая в уравнение, есть

[1]) Уравнение (2.1.26) называют также уравнением теплопроводности. — *Прим. ред.*

производная первого порядка, тогда как в волновом уравнении она является производной второго порядка.

Например, если струна имеет синусоидальную форму $Ae^{i\omega x/c}$, то для волнового уравнения зависимость от времени имеет также синусоидальный характер $e^{-i\omega t}$. Но для уравнения диффузии множитель, дающий зависимость от времени, имеет вид $e^{-(\omega/\varkappa c)^2 t}$ и не является симметричным относительно времени. Для положительного времени синусоидальная форма затухает экспоненциально (по закону показательной функции), но рассматривая обратное течение времени, мы видим, что амплитуда волны безгранично возрастает, когда t становится все больше и больше (по абсолютной величине), оставаясь отрицательным. Чем меньше длина волны флуктуаций (т. е. чем больше ω), тем быстрее функции затухают в положительном направлении времени и тем быстрее они растут в отрицательном. Как мы покажем детально дальше, для волнового уравнения можно и предсказать дальнейшее движение, и восстановить предшествующее движение, если известно состояние в данный момент. Для уравнения диффузии возможно только предсказание, попытки восстановить прошлое приводят только к расходящимся выражениям.



Р и с. 2.6. Последовательные графики решения уравнения диффузии; верхняя кривая относится к начальному моменту.

Уравнение Клейна — Гордона. Один из видов уравнений, встречающихся в квантовой механике (применяется для описания скалярного мезонного поля), может быть также иллюстрирован с помощью гибкой струны, на которую действуют дополнительные силы жесткости, вызванные средой, окружающей струну. Если, например, струна заделана в тонкий резиновый лист (или если она расположена вдоль оси резинового цилиндра, внешняя поверхность которого остается неизменной), то дополнительно к восстанавливающей силе, вызванной натяжением струны, появится восстанавливающая сила, вызванная влиянием резины на каждый участок струны. Если смещение элемента dx струны в точке x равно $\psi(x)$, то эта восстанавливающая сила будет равна $-K\psi\,dx$, где K — постоянная, зависящая от упругих свойств и распределения резины.

Таким образом, уравнение движения струны имеет вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \mu^2\psi, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}, \quad \mu^2 = \frac{K}{T}, \tag{2.1.27}$$

где ρ — линейная плотность, а T — натяжение струны. Это уравнение в квантовой механике называется *уравнением Клейна — Гордона*. Заметим, что в случае, когда c есть скорость света, это уравнение, как и волновое уравнение, инвариантно по отношению к преобразованию Лоренца, так что решения этого уравнения ведут себя соответствующим образом относительно пространственно-временны́х вращений специальной теории относительности.

Влияние на такую струну постоянной единичной поперечной силы, приложенной в точке $x = \xi$, отличается от влияния такой силы на струну, находящуюся под действием только натяжения. Форма упруго

подкрепленной струны бесконечной длины, соответствующая форме (2.1.7), в этом случае дается уравнением

$$G(x\,|\,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\mu}e^{\mu(x-\xi)}, & x<\xi,\\ \dfrac{1}{2\mu}e^{\mu(\xi-x)}, & x>\xi.\end{cases} \tag{2.1.28}$$

В случае обычной струны, находящейся под действием одного натяжения, мы должны были считать струну имеющей конечную длину, так как конечные опоры были только «якорями», препятствовавшими силе переместить струну на неопределенно большое расстояние. Напротив, в данном случае упругая среда, в которой заключена струна, поглощает почти полностью влияние силы; точное положение точек опоры важно только для частей струны, находящихся на малых по сравнению с $1/\mu$ расстояниях от обоих концов. Следовательно, в этом случае можно взять функцию Грина, не зависящую от конечных точек (т. е. для бесконечной струны). Формула показывает, что часть среды, удаленная от точки приложения силы на расстояние примерно $1/\mu$, поглощает бо́льшую часть силы и смещение струны за пределами этого расстояния становится весьма малым.

В случае, когда приложенные поперечные силы произвольного вида распределены вдоль струны, соответствующая форма струны выражается интегралом от функции Грина, определенной уравнением (2.1.28); общая форма такого интеграла дана в равенстве (2.1.8).

Если упруго подкрепленная струна натянута между жесткими зажимами, находящимися друг от друга на расстоянии L, она может колебаться; при этом последовательные нормальные виды движения аналогичны по форме нормальным колебаниям для струны без упругой оболочки, но отличаются от них частотой.

Ряд Фурье для свободных колебаний общего типа имеет вид

$$\psi=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-i\omega_n t},\quad \omega_n^2=c^2\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\mu^2\right].$$

Допускаемые здесь частоты, благодаря наличию слагаемого μ^2, пропорционального коэффициенту упругости K окружающей струну среды, все будут больше соответствующих частот для обычной струны. Этот результат не является неожиданным, так как добавленная жесткость среды должна увеличить собственные частоты.

Вынужденное движение упруго подкрепленной струны. Струна, заделанная в резину и приводимая в движение на одном конце поперечной переменной силой, также обнаруживает известные характерные особенности в поведении по сравнению с обычной струной.

Решение уравнения для волны, распространяющейся только вправо, соответствующее случаю бесконечно длинной струны, имеет вид

$$\psi=\begin{cases}A\exp\left[-x\sqrt{\mu^2-(\omega/c)^2}-i\omega t\right], & \omega^2<\mu^2c^2=K/\rho,\\ A\exp\left\{i(\omega/c)\left[x\sqrt{1-(\mu c/\omega)^2}-ct\right]\right\}, & \omega^2>K/\rho.\end{cases} \tag{2.1.29}$$

При очень больших частотах приложенной силы волновое движение очень похоже на движение обычной струны; только скорость волны [1]) всегда

[1]) Имеется в виду фазовая скорость. — *Прим. ред.*

несколько больше c и отличается от c множителем $1/\sqrt{1-(\mu c/\omega)^2}$. Здесь снова добавочные упругие силы стремятся «ускорить» волны. Волновое число $2\pi/\lambda = \sqrt{(\omega/c)^2-\mu^2}$ не является более линейной функцией от частоты. Таким образом, дополнительно подкрепленная струна ведет себя подобно *диспергирующей среде*. Общая волна составлена из волн, имеющих различные значения ω; эти волны больше не удерживаются вместе, но расходятся из их начального положения в последовательность волн, все более и более

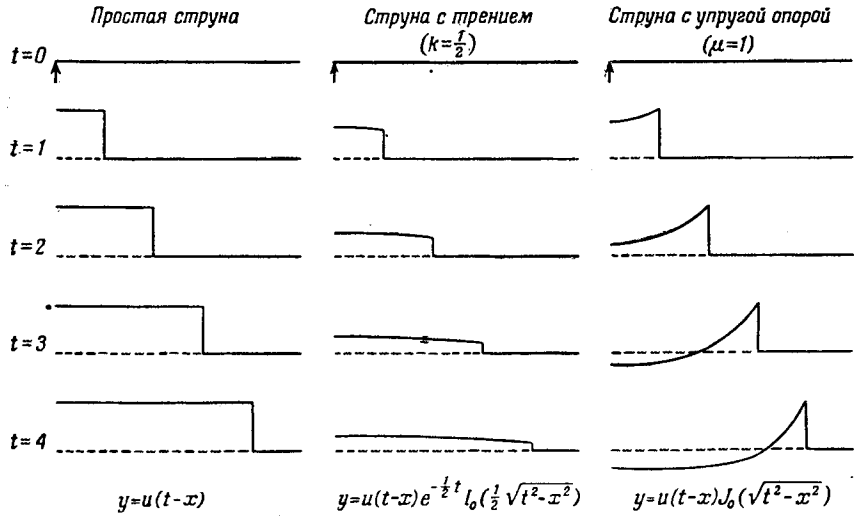


Рис. 2.7. Последовательное изменение формы трех видов струн, приведенных в движение у левого конца в момент $t=0$.

рассеянных вдоль всей длины струны. Конечно, это поведение значительно отличается от поведения волны, движущейся по обыкновенной, не подкрепленной струне, так как там среда не была диспергирующей и форма волны не изменялась по мере ее распространения.

При низких частотах влияние упругой среды преобладает над влиянием инерции массы струны, и для частот, меньших чем $(1/2\pi)\sqrt{K/\rho}$, уже вообще не будет подлинного волнового движения; точки струны движутся взад и вперед, имея одну и ту же фазу, причем величина отклонения от положения равновесия будет наибольшей вблизи точки приложения силы и быстро убывает по мере удаления от приводимого в движение конца.

Волновой импеданс для струны этого типа вычисляется аналогично тому, как была получена формула (2.1.13):

$$Z_\omega = \begin{cases} \dfrac{iT}{\omega}\sqrt{\mu^2-\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2}, & \omega < \mu c, \\ \rho c\sqrt{1-\left(\dfrac{\mu c}{\omega}\right)^2}, & \omega > \mu c. \end{cases} \tag{2.1.30}$$

При высоких частотах волновой импеданс имеет действительное значение и мало отличается от значения ρc импеданса для простой струны. Однако при уменьшении частоты волновой импеданс убывает, а скорость волны возрастает до тех пор, пока при $\omega = \mu c = \sqrt{K/\rho}$ волновой импеданс не станет равным нулю, а скорость волны равной бесконечности. Это — частота резонанса для массы струны и упругости среды.

При более низких частотах импеданс будет мнимым, и здесь нет подлинного волнового движения.

Резюме. Различные причины побудили нас подробно рассмотреть движения гибкой струны. Во-первых, наши рассуждения при изучении струны являются простым примером тех рассмотрений, которые встретятся при изучении других уравнений полей. В каждом случае мы будем рассматривать различные уравнения, получающиеся в предположении, что та или другая сила становится преобладающей; таким образом, изучая различные предельные случаи, мы достигнем достаточно полного понимания наиболее общего случая. Во-вторых, различные типы движения струны дают нам очень наглядное представление о формах решений многих важных дифференциальных уравнений с частными производными, к которым приводит нас изучение многих физических явлений. Те же уравнения появляются часто и тогда, когда они соответствуют физическим состояниям, которые представить себе наглядно гораздо труднее. В-третьих, технические приемы решения, которые здесь были затронуты в связи с физическими проблемами, имеют обычно применение во многих других задачах, и ссылка на простое решение задачи в случае струны поможет нам лучше понять и другие более сложные вопросы.

Мы теперь расширим область наших рассуждений и изучим несколько типичных физических явлений, имеющих большое значение, чтобы показать, какие типы полей могут быть использованы для описания этих явлений и каким дифференциальным уравнениям с частными производными должны удовлетворять эти поля.

2.2. Волны в упругой среде

Для нашего первого изучения трехмерной задачи о взаимной связи физических явлений с дифференциальными уравнениями полей вернемся к задаче о поведении упругой среды (которую мы начали рассматривать в § 1.6), чтобы поставить вопрос о волновом движении в такой среде. Как и в случае струны, мы предполагаем, что смещения точек среды малы и что нас не интересуют перенос или вращение среды в целом. Пусть смещение $\mathbf{s}(x, y, z; t)$ элемента $dx\,dy\,dz$ среды в точке x, y, z в момент времени t мало и его вращение, вызванное деформацией, также мало. Инерциальное сопротивление элемента, вызванное ускорением изменения величины $\mathbf{s}$, равно $(\partial^2\mathbf{s}/\partial t^2)\,\rho\,dx\,dy\,dz$, где ρ — плотность среды.

В § 1.6 мы определили аффинор напряжений $\mathfrak{T} = \mathbf{F}_x\mathbf{i} + \mathbf{F}_y\mathbf{j} + \mathbf{F}_z\mathbf{k} = \mathbf{i}\mathbf{F}_x + \mathbf{j}\mathbf{F}_y + \mathbf{k}\mathbf{F}_z$, сказав, что сила, действующая на элемент $\mathbf{dA}$ поверхности среды, равна $\mathfrak{T}\cdot\mathbf{dA}$. Например, сила, действующая на грань $dy\,dz$ элемента, перпендикулярную к оси x, равна $\mathbf{F}_x\,dy\,dz$. Таким образом, результирующая сила, действующая на элемент $dx\,dy\,dz$ и обусловленная разностью значений $\mathbf{F}_x$ на грани $dy\,dz$ элемента и на противоположной его грани, равна $dx\,(\partial\mathbf{F}_x/\partial x)\,dy\,dz$; поэтому результирующая сила, полученная от действия сил на все грани элемента, равна $\nabla\cdot\mathfrak{T}\,dx\,dy\,dz$.

Но в уравнении (1.6.28) мы показали, что аффинор напряжений $\mathfrak{S}$ связан с аффинором деформаций соотношением $\mathfrak{T} = \lambda\,|\,\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{I} + 2\mu\mathfrak{S}$, где μ есть модуль сдвига среды и $\lambda + \left(\frac{2}{3}\,\mu\right)$ — ее модуль всестороннего сжатия (отношение изотропного давления к относительному уменьшению объема).

Из формулы (1.6.21) мы имеем соотношение между $\mathfrak{S}$ и смещением $\mathbf{s}$, даваемое символически равенством $\mathfrak{S} = {}^1/_2\,(\nabla\mathbf{s} + \mathbf{s}\nabla)$. Сопоставляя все эти уравнения, мы окончательно приходим к уравнению движения среды