

Последний интеграл, являясь поверхностным интегралом, должен быть равен потоку энергии через поверхность, вызванному возрастанием W . Он же со знаком минус впереди равен результирующему *потоку* энергии через замкнутую поверхность *наружу*.

Таким образом, вектор, определяющий плотность потока энергии в среде, в которой распространяются упругие волны, равен

$$\mathbf{S} = - \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{\hat{x}}. \quad (2.2.20)$$

Этот результат не является неожиданным; $\partial \mathbf{s} / \partial t$ есть скорость частицы среды в точке x, y, z . Усилие, приложенное к элементу поверхности $d\mathbf{A}_u$, перпендикулярной к $\partial \mathbf{s} / \partial t$, равно $\mathbf{\hat{x}} \cdot d\mathbf{A}_u$, а мощность равна силе, умноженной на скорость. Так как размерность $\mathbf{\hat{x}}$ есть сила на единицу площади, размерность \mathbf{S} есть мощность на единицу площади.

Для плоской продольной волны, данной уравнениями (2.2.13) и (2.2.14), переносимая мощность равна

$$\mathbf{S} = i(\lambda + 2\mu) c_c [f''(x - c_c t)]^2, \quad (2.2.21)$$

а для поперечной плоской волны, данной уравнениями (2.2.15) и (2.2.16), она равна

$$\mathbf{S} = i\mu c_s [F''(x - c_s t)]^2. \quad (2.2.22)$$

Плотность потока энергии для плоской упругой волны обычно называется *интенсивностью* волны. Мы видим, что в каждом случае величина интенсивности равна плотности энергии, умноженной на скорость волны. В плоской волне энергия перемещается со скоростью, равной скорости волны.

В приведенных случаях величины $c_c f''$ и $c_s F''$ — амплитуды скорости среды — можно рассматривать как аналоги плотности электрического тока, а величины $(\lambda + 2\mu) f''$ и $\mu F''$ — амплитуды приложенных усилий — как аналоги электрической напряженности. Произведение этих двух величин дает плотность мощности. Отношение их дает величину, которая может быть названа *импедансом* среды для волн рассматриваемого типа. Для волн сжатия импеданс равен $(\lambda + 2\mu)/c_c = \rho c_c$, а для волн сдвига $\mu/c_s = \rho c_s$.

2.3. Движение жидкости

Жидкость отличается от упругого тела тем, что она не оказывает сопротивления при сдвиге. Мы не можем надеяться найти связь смещения жидкости с тензором напряжений, так как напряжение сдвига может изменяться с течением времени, тогда как смещение остается постоянным, и наоборот, при постоянном напряжении сдвига смещение может изменяться. Требуется, чтобы постоянная *скорость* сдвига вызывала бы постоянное усилие сдвига в жидкости.

Это указывает (если это еще было неясно!), что поведение жидкости удобнее выражать с помощью скоростей, чем с помощью перемещений. Употребляются два способа описания движения жидкости — один, учитывающий скорость каждой частицы жидкости в каждый момент времени, и другой, в котором рассматривается скорость движения жидкости в каждой точке пространства для каждого момента времени. В первом способе векторное поле следует за частицами жидкости в их движении, во втором — поле отнесено к постоянной системе коор-

динат и вектор в данной точке определяет скорость той части жидкости, которая в данный момент находится в этой точке.

Два способа описания движения жидкости отдаленно соответствуют атомистическому представлению о жидкости и представлению о жидкости, как о непрерывной среде. Реальная жидкость является, конечно, совокупностью молекул, каждая из которых движется под влиянием сил. Некоторые из этих сил являются *внутренними*, вызванными воздействием других соседних молекул; характер этих сил определяет сжимаемость жидкости. Другие силы являются *внешними* и вызываются телами, находящимися на некотором расстоянии; таковы, например, силы тяжести, электрические силы; эти силы действуют более или менее одинаково на все молекулы, находящиеся в данной малой области.

Исследуя первый способ описания, мы должны начать с того, чтобы охарактеризовать каждую молекулу ее положением в пространстве при $t = 0$; чтобы иметь возможность детально определить последующие движения молекул, мы должны также знать их начальные скорости. Однако для многих проблем достаточно знать только среднее положение и скорость молекул в каждом элементе объема (например, $dxdydz$ в точке x_0, y_0, z_0), имеющем большие размеры сравнительно с величиной молекул, но малые по сравнению со всей протяженностью рассматриваемой жидкости. Когда эти средние получены, внутренние силы взаимно уничтожаются (за исключением задачи определения связи между давлением и плотностью) и остаются только внешние силы, действующие на часть жидкости, находящуюся в рассматриваемом элементе. С помощью этого приема осреднения мы получаем уравнения движения жидкости в целом, в которых не учитывается разрывность ее строения и которые соответствуют непрерывному, не имеющему зернистого строения приближению к реальной жидкости. Рассуждения в § 2.4 покажут, как совершается этот переход от слишком детализированного молекулярного изображения жидкости к слаженному среднему ее изображению. Второй способ описания обычно начинается сразу с рассмотрения слаженного приближения. Средние скорости частиц такой жидкости, близких в момент t к фиксированной точке x, y, z , считаются функциями t , как будто жидкость действительно непрерывна.

Мы предпочитаем второй способ изображения, так как он более соответствует типам полей, изученных в других частях этой главы. Вектор $v(x, y, z, t)$ есть скорость той части жидкости, которая находится в момент t в точке x, y, z . Выражение $\operatorname{div} v$ есть поток жидкости из «области вблизи x, y, z », так что $dxdydz \operatorname{div} v$ есть поток жидкости из элемента $dxdydz$ наружу. Если $\operatorname{div} v$ везде равна нулю, то жидкость **несжимаема**. Вектор $w = \frac{1}{2} \operatorname{rot} v$ представляет циркуляцию жидкости «около точки x, y, z »; он называется *вихревым вектором* жидкости (см. стр. 49). Если w всюду равен нулю, поток жидкости называется *безвихревым* (в этом случае вектор v является градиентом скалярного *потенциала скорости*).

Все это напоминает нам основные понятия, связанные с векторным полем, изучение которого проведено в § 1.2. В самом деле, мы использовали там пример движения жидкости, чтобы облегчить описание векторного поля; некоторые термины, такие как вихрь, линии тока и поток были выбраны для того, чтобы аналогия была более полной. Мы можем теперь вернуться к этой точке зрения, чтобы получить некоторые количественные характеристики движения жидкости.

Например, линии тока изображают средние траектории отдельных частиц жидкости. Дифференциальные уравнения этих линий имеют вид

$dx/v_x = dy/v_y = dz/v_z$. Количество линий тока, пересекающих данную поверхность, равное интегралу потока $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$, распространенному на эту поверхность, также равно среднему потоку жидкости через эту поверхность и т. д. Если вихрь отсутствует (т. е. $\text{rot } \mathbf{v} = 0$) и существует потенциал скоростей, то линии тока везде ортогональны к эквишотиальным поверхностям и дают естественную систему координат для нашей задачи.

Уравнение неразрывности. Прежде чем перейти к деталям, следует указать два общих свойства поля скоростей жидкости. Одно из них касается связи между суммарным потоком и изменением плотности жидкости. Если \mathbf{v} — скорость жидкости, а ρ — плотность жидкости в точке x, y, z в момент t , то $\rho \mathbf{v}$ есть вектор, представляющий поток массы через квадратный сантиметр и $dx dy dz \text{div}(\rho \mathbf{v})$ дает тогда суммарное истечение массы из элемента объема $dx dy dz$. Так как масса не возникает и не исчезает в большинстве рассматриваемых случаев, это истечение массы равно потере массы $\rho dx dy dz$ жидкости в этом элементе. Другими словами,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \mathbf{v}). \quad (2.3.1)$$

Это уравнение называется *уравнением неразрывности* жидкости. Из этого уравнения очевидно, что для жидкости постоянной плотности ρ (несжимаемая жидкость) суммарный поток $\text{div } \mathbf{v}$ должен быть равен нулю.

В отдельных задачах удобно предположить, что жидкость возникает (или исчезает) в некоторой точке или точках. Такие точки называются *источниками* (или *стоками*) жидкости. Естественно, что в этих точках уравнение неразрывности не имеет места.

Второе общее свойство поля скоростей движущейся жидкости связано с тем, что система координат векторного поля не перемещается вместе с жидкостью. Чтобы найти скорость изменения векторного свойства $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ жидкости в выделенной частице жидкости (положение частицы дается радиусом-вектором \mathbf{r} в момент t) или вблизи нее, мы не можем взять скорость изменения \mathbf{F} в точке x, y, z , т. е. $\partial \mathbf{F} / \partial t$, так как выделенная частица не остается обычно в одной точке. Изменение \mathbf{F} , которое нас интересует, равно разности между значением $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ в точке x, y, z , где по предположению находилась частица жидкости в момент t , и значением $\mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, t + dt)$ в точке $x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt$, где находится частица в момент $t + dt$. Эта разность в развернутой форме, если ограничиться только членами первого порядка, имеет вид $d\mathbf{F} = [\partial \mathbf{F} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{F}] dt$. Скорость изменения свойства \mathbf{F} жидкости, обозначаемая символом полной производной, дается поэтому уравнением

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{F} \quad (2.3.2)$$

через скорость изменения функции \mathbf{F} в точке x, y, z во времени (равную частной производной \mathbf{F} по t) и через скорость изменения функции \mathbf{F} при переходе от точки x, y, z к соседним точкам (определенную членом $\nabla \mathbf{F}$).

Например, ускорение части жидкости, находившейся «в» точке x, y, z в момент t , равно

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (v^2) - 2\mathbf{v} \times \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Вторая форма этого выражения получается перестановкой компонент вектора, а третья форма — заменой выражения $\frac{1}{2} \operatorname{rot} v$ вихревым вектором w . Согласно рассуждению, приведенному на стр. 49, величина вектора w равна угловой скорости частиц жидкости, «близких» к точке x, y, z , а направление вектора w совпадает с направлением поступательного движения правого винта, вращающегося вместе с жидкостью.

Скорость изменения скалярных свойств жидкости подсчитывается таким же образом. Скорость изменения плотности данного элемента жидкости, оказавшегося в момент t «в» точке x, y, z , при его дальнейшем движении, подсчитанная этим способом, оказывается равной

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad} \rho. \quad (2.3.4)$$

Но уравнение неразрывности дает $\partial \rho / \partial t = -\operatorname{div}(\rho v)$, так что

$$\frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div}(\rho v) + v \cdot \operatorname{grad} \rho = -\rho \operatorname{div} v. \quad (2.3.5)$$

Решения для несжимаемых жидкостей. Если плотность ρ жидкости везде постоянна, уравнение, определяющее v , принимает вид $\operatorname{div} v = 0$.

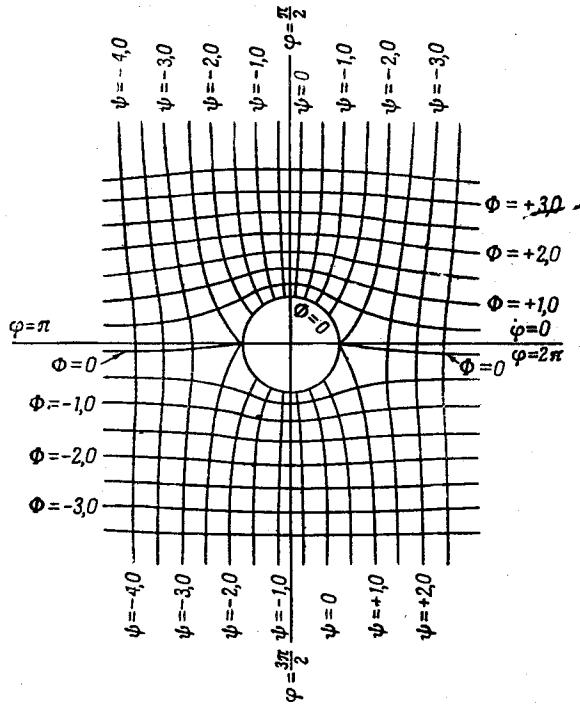


Рис. 2.9. Эквидистантные линии ψ и линии тока Φ в двумерном потоке несжимаемой жидкости.

Наличие циркуляции вызывает разрыв потенциала ϕ при $\phi=0$.

Наиболее общее решение этого уравнения может быть выражено с помощью скалярного и векторного потенциала (как показано на стр. 59)

$$v = \operatorname{rot} A + \operatorname{grad} \phi; \quad \nabla^2 \phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = 0. \quad (2.3.6)$$

\mathbf{A} может быть любым достаточно правильным векторным полем, удовлетворяющим граничным условиям. Уравнение для потенциала скоростей ϕ называется *уравнением Лапласа*. Оно будет весьма подробно изучено в этой книге позже. Линии тока, рассмотренные на стр. 23 для безвихревого поля, будут, конечно, перпендикулярны к поверхностям, на которых потенциал скоростей сохраняет постоянное значение.

Если вихри отсутствуют, то $\mathbf{A} = 0$ и скорость полностью определяется скалярным потенциалом. Если, кроме того, линии тока лежат в параллельных плоскостях, потенциал скоростей может быть сделан функцией только двух координат и движение называется двумерным (или плоским) потоком. Этот частный случай имеет большое число важных применений в аэродинамике. Здесь линии тока и потенциальные линии образуют двумерную ортогональную систему криволинейных координат.

Уравнение линий тока (см. стр. 23) имеет вид

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \text{ или } -v_y dx + v_x dy = 0.$$

Следовательно, если $v_y = -\partial\Phi/\partial x$ и $v_x = \partial\Phi/\partial y$, то

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy = 0 \text{ или } \Phi(x, y) = \text{const}$$

вдоль линии тока. Функция Φ называется функцией тока; она связана с потенциалом скоростей ϕ соотношениями

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

которые называются *уравнениями Коши — Римана*; значительно подробнее они будут изучены в гл. 4 в связи с функциями комплексного переменного.

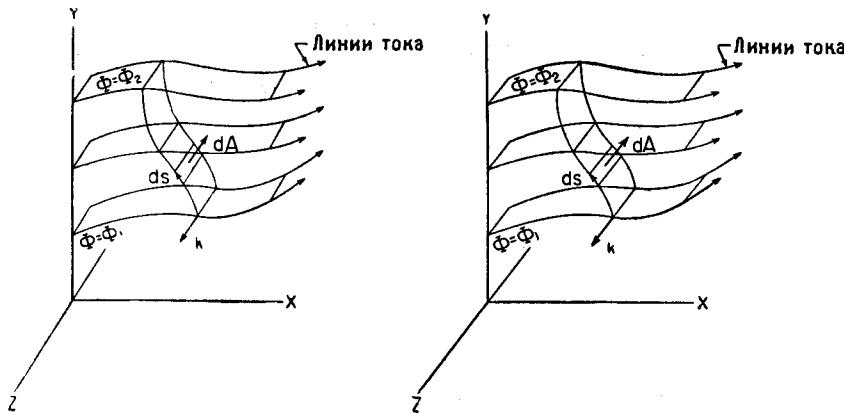


Рис. 2.10. Интеграл потока в двумерном случае.

Раньше мы упомянули, что «плотность линий тока» является мерой полного потока и, следовательно, мерой скорости жидкости. Это легко показать в случае двумерного потока, так как интеграл потока $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$

между двумя линиями тока $\Phi(x, y) = \Phi_2$ и $\Phi(x, y) = \Phi_1$ может быть приведен к криволинейному интегралу в плоскости xy . Речь идет об интеграле потока между двумя плоскостями, параллельными плоскости xy и удаленными друг от друга на расстояние, равное единице; за элемент площади $d\mathbf{A}$ можно взять узкую полоску, длина которой равна

единице, а ширина равна ds , где ds — длина элемента дуги кривой, идущей от Φ_1 к Φ_2 в плоскости xy .

Направление dA , конечно, перпендикулярно к направлению ds ; именно, $dA = ds \times k$, где, само собой разумеется, ds всегда перпендикулярно к k . Интеграл потока равен тогда

$$\int_1^2 v \cdot dA = \int_1^2 v \cdot (ds \times k) = \int_1^2 (v \times ds) \cdot k = \int_1^2 (v_x dy - v_y dx) = \int_1^2 d\Phi = \Phi_2 - \Phi_1.$$

Другими словами, полный поток жидкости вдоль области, заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$ и поверхностями, определенными линиями тока 1 и 2, равен разности значений Φ_2 и Φ_1 функции тока.

Обычные граничные условия в потоке жидкости требуют, чтобы направления скоростей в точках границы были касательными ко всем ограничивающим поверхностям. Если вязкость значительна, мы должны потребовать, чтобы жидкость в непосредственной близости к поверхности двигалась вместе с поверхностью, иначе говоря, если поверхность неподвижна, то и касательная компонента скорости на границе должна быть равна нулю. Однако если вязкость невелика, можно с достаточным основанием принять, что жидкость может скользить вдоль поверхности без заметного торможения, так что допускается конечная тангенциальная компонента скорости вблизи поверхности.

Примеры. Несколько простых примеров, может быть, разъяснят некоторые из этих утверждений и определений. Скалярный потенциал и соответствующее поле скоростей, данные уравнениями

$$\psi = -\frac{Q}{r}; \quad v = \frac{Q}{r^2} a_r, \quad (2.3.7)$$

приводят, как было показано на стр. 27, в случае простирающейся неограниченной жидкости к точечному источнику жидкости в начале

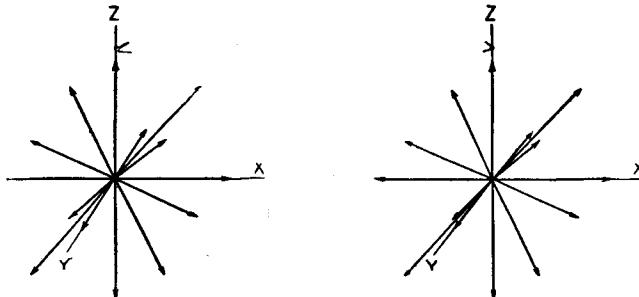


Рис. 2.11. Линии тока для точечного источника.

координат ($r=0$). Как показано в уравнении (1.2.9), полный поток из источника равен $4\pi Q$; эта величина называется *мощностью источника*. Так как здесь векторный потенциал отсутствует, то вектор $w = \frac{1}{2} \operatorname{rot} v$, определяющий вихревое движение (см. стр. 150), равен нулю и поток является *безвихревым*.

Другой случай представляет собой поток сдвига, который получается, когда жидкость находится между двумя плоскими параллельными поверхностями (например, $z=0$ и $z=1$), одна из которых движется относительно другой. Если поверхность $z=0$ неподвижна, а поверхность $z=1$ движется в направлении оси x с единичной скоростью,

жидкость между ними, как говорят, подвергается действию единичной скорости сдвига. Поле скоростей остается неподвижным относительно обеих поверхностей и равномерно распределено между ними; оно определяется векторным потенциалом

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2} z^2 \mathbf{j}; \quad \mathbf{v} = z \mathbf{i}. \quad (2.3.8)$$

Здесь нет результирующего потока ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$), а вихревой вектор $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{j}$ постоянен во всей области.

Иным примером поля скоростей, имеющего и векторный и скалярный потенциалы, является следующий, выраженный в цилиндрических координатах r, φ, z :

$$\psi = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \omega a^2 \varphi, & r > a, \end{cases} \quad \mathbf{A} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \omega r^2 \mathbf{a}_z, & r < a, \\ 0, & r > a, \end{cases} \quad (2.3.9)$$

где ω — угловая скорость жидкости внутри цилиндра $r = a$. Вектор скорости тогда имеет вид

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \omega r \mathbf{a}_\varphi, & r < a, \\ \frac{\omega a^2}{r} \mathbf{a}_\varphi, & r > a. \end{cases}$$

Вихревой вектор $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}$ равен $\omega \mathbf{a}_z$ (как этого и надо было ожидать из его определения на стр. 49) для $r < a$ и равен нулю при $r > a$. Заме-

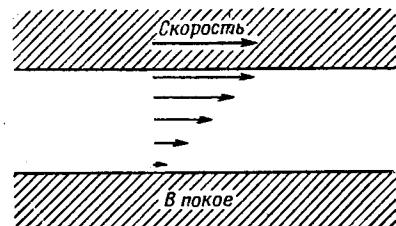


Рис. 2.12. Скорости жидкости в потоке сдвига.

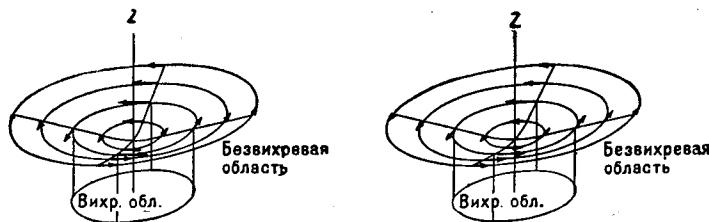


Рис. 2.13. Скорости движения, линии тока и поверхности нулевого давления (свободная поверхность) для простого завихрения.

тим, что при $r > a$ поле скоростей является полем, находящимся вне простой вихревой линии, данной уравнением (1.2.11). Здесь мы предложили сделать область вихревого движения конечной ($r < a$), вместо того чтобы сконцентрировать ее в бесконечно узкой окрестности прямой линии, как это было сделано в гл. 1.

Напряжения в жидкостях. Прежде чем идти в этом анализе дальше, нужно изучить внутренние напряжения в жидкости. Конечно, здесь имеется давление, которое может быть вызвано силами тяжести или другими силами, действующими на жидкость, или может быть вызвано сжатием жидкости либо и теми и другими причинами.

Кроме того, имеются также напряжения трения, обусловленные *скоростью изменения деформации*, пропорциональные вектору скорости v , вместо вектора смещения s , как это было в случае упругого тела. Мы видели на стр. 72, что деформация упругого тела может быть представлена с помощью симметрического аффинора $\mathfrak{S} = \frac{1}{2}(\nabla s + s\nabla)$. Скорость изменения этой деформации является также аффинором

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2}(\nabla v + v\nabla).$$

Множитель расширения $|\mathfrak{U}| = \operatorname{div} v$ в силу уравнения неразрывности пропорционален скорости изменения плотности жидкости (эта скорость равна нулю, если жидкость несжимаема). «Остаток» \mathfrak{U} , который может быть представлен с помощью аффинора

$$\mathfrak{U}_s = \frac{1}{2}(\nabla v + v\nabla) - \frac{1}{3}\mathfrak{J} \operatorname{div} v, \quad |\mathfrak{U}_s| = 0,$$

соответствует скорости чистого сдвига и изображает форму скорости изменения аффинора деформации для несжимаемых жидкостей.

Перейдем теперь к рассмотрению формы аффинора напряжения и зависимости ее от скорости деформации. Если жидкость неподвижна, то единственным напряжением является статическое давление p , которое будет вполне симметричным

$$\mathfrak{T} = -p\mathfrak{J},$$

так что сила, действующая на элемент площади dA , равна $-pdA$ (знак минус обозначает давление, отрицательное натяжение). Если жидкость расширяется без сдвига ($\mathfrak{U}_s = 0$), то возможно возникновение трения чистого расширения, а также изменение давления из-за скорости расширения (это имеет место для всех жидкостей, кроме одноатомных газов). В этом случае напряжение будет иметь вид

$$\mathfrak{T} = (-p + \lambda \operatorname{div} v)\mathfrak{J},$$

где λ можно назвать *коэффициентом трения расширения*.

Если, кроме того, налицо и скорость сдвига жидкости, то существует и пропорциональное ей напряжение сдвига $2\eta\mathfrak{U}_s$, где η называется *коэффициентом вязкости*. Полный аффинор напряжения поэтому связан с давлением и со скоростью деформации следующим уравнением:

$$\mathfrak{T} = -p\mathfrak{J} + \lambda\mathfrak{J}|\mathfrak{U}| + 2\eta\mathfrak{U}_s = -(p + \gamma \operatorname{div} v)\mathfrak{J} + \eta(\nabla v + v\nabla), \quad (2.3.10)$$

где $\gamma = \frac{2}{3}\eta - \lambda$ может быть названо вторым коэффициентом вязкости.

Это уравнение аналогично уравнению (1.6.28) для напряжений в упругом теле, но только там, где раньше стояло смещение s , теперь стоит скорость v (и, конечно, добавлен член, содержащий давление). Однако это различие не тривиально, так как сила, пропорциональная скорости, является диссипативной силой, в то время как напряжения в (1.6.28) — консервативны.

Можно, конечно, было бы допустить, что постоянные γ и η являются аффинорами, а не скалярами, однако ожидать, что имеет место такое усложнение, здесь менее обосновано, чем при изучении изотропных твердых тел. Мы полагаем, что жидкость изотропна и экспериментальные данные подтверждают это.

Возвращаясь к нашим примерам, мы можем использовать выражение аффинора $\frac{1}{2}(\nabla v + v\nabla)$ в сферических координатах, данное на стр. 117

для вычисления тензора напряжения

$$\mathfrak{T} = \left(-p + \frac{2\eta Q}{r^3} \right) \mathfrak{J} - \frac{6\eta Q}{r^3} \mathbf{a}_r \mathbf{a}_r, \quad (2.3.11)$$

соответствующего потоку в случае простого источника, данного уравнением (2.3.7). Другими словами, сила, действующая на элемент поверхности, перпендикулярный к радиус-вектору, есть сила сжатия, величина которой равна $p + (4\eta Q/r^3)$, в то время как сила сжатия, действующая на любую площадку, перпендикулярную предыдущей, равна $p - (2\eta Q/r^3)$. Поэтому при наличии вязкости ($\eta > 0$) сила, действующая на элемент жидкости, не будет изотропной и для достаточно мощного потока (Q велико) или для достаточно малого r ; сила, действующая «шоперс» радиальной линии тока, становится натяжением, в то время как сила, действующая «вдоль» линии тока, всегда является сжатием. Силы такого рода должны, конечно, изменять форму элемента жидкости при его перемещении от источника по радиусу; этот элемент должен расширяться во всех направлениях, перпендикулярных к радиусу, и соответственно сжиматься в радиальном направлении. Если жидкость вязкая, такую деформацию производит неизотропная сила. Постоянная γ не фигурирует здесь, так как мы предположили, что жидкость несжимаема и $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

В случае единичной скорости сдвига, данного уравнением (2.3.8), тензор напряжения равен

$$\mathfrak{T} = -p \mathfrak{J} + \eta (\mathbf{k} \mathbf{i} + \mathbf{i} \mathbf{k}). \quad (2.3.12)$$

Здесь сила, действующая на единицу площади неподвижной поверхности ($z=0$), равна $\mathfrak{T} \cdot \mathbf{k} = -pk + \eta i$. Компонента $-pk$, нормальная к поверхности, дает, конечно, давление (знак минус указывает на то, что сила направлена κ поверхности). Компонента ηi параллельна направлению движения верхней плоскости ($z=1$) и вызвана вязкостью жидкости; именно здесь в точности осуществлены условия, соответствующие основному определению *коэффициента вязкости* жидкости η (η есть величина тангенциальной силы, действующей на единицу площади при единичной скорости сдвига).

В последнем примере, данном уравнением (2.3.9), имеем для напряжения

$$\mathfrak{T} = \begin{cases} -p \mathfrak{J}, & r < a, \\ -p \mathfrak{J} - \frac{4\eta \omega a^2}{r^2} (\mathbf{a}_r \mathbf{a}_\varphi + \mathbf{a}_\varphi \mathbf{a}_r), & r > a. \end{cases} \quad (2.3.13)$$

В той части жидкости, где $r < a$, имеется только напряжение, являющееся изотропным давлением, что, впрочем, неудивительно, так как эта часть жидкости вращается, как твердое тело с угловой скоростью ω . Вне этого вихревого стержня при $r > a$ имеется сдвиг жидкости; сила, действующая на единицу площади площадки, перпендикулярной r , имеет тангенциальную компоненту $-(4\eta \omega a^2/r^2) a_z$, вызывающую тормозящее действие жидкости вне цилиндра радиуса r на жидкость, находящуюся внутри этого цилиндра (и наоборот).

Сила, действующая на элемент жидкости в точке x, y, z , равна, как мы установили, $(\nabla \cdot \mathfrak{T} + F) dx dy dz$. Она должна быть равна ускорению $d\mathbf{v}/dt$ элемента, умноженному на его массу $\rho dx dy dz$. Вытекающее отсюда

уравнение (которое получено с помощью формул стр. 116)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \mathbf{F} + \nabla \cdot [- (p + \gamma \nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{J} + \eta (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)] = \\ &= \mathbf{F} - \text{grad} \left[p - \left(\frac{1}{3} \eta + \lambda \right) \text{div } \mathbf{v} \right] + \eta \nabla^2 \mathbf{v} = \quad (2.3.14) \\ &= \mathbf{F} - \text{grad} \left[p - \left(\frac{4}{3} \eta + \lambda \right) \text{div } \mathbf{v} \right] - \eta \text{rot} \text{rot } \mathbf{v}, \end{aligned}$$

где $\gamma = \frac{2}{3} \eta - \lambda$, служит для вычисления давления, если известна скорость;

оно дает также возможность подсчитать поступательные или колебательные движения. Это уравнение вместе с уравнением неразрывности (2.3.1) и с уравнением состояния, связывающим давление и сжатие жидкости, является основным во всех многообразных проблемах динамики жидкостей. Различные частные случаи его получаются, если тот или другой член исчезающе мал.

Уравнение Бернуlli. Простейший случай соответствует установившемуся движению несжимаемой жидкости, для которого $\partial \mathbf{v} / \partial t$ и $\text{div } \mathbf{v}$ равны нулю. Предположим дополнительно, что внешняя сила \mathbf{F} может быть получена из потенциальной энергии V , $\mathbf{F} = -\text{grad } V$, и используем векторное соотношение

$$\frac{1}{2} \text{grad } v^2 = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}.$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} 2\eta \text{rot } \mathbf{w} - 2\rho \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= -\text{grad } U, \\ U &= V + p + \frac{1}{2} \rho v^2; \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Скалярную величину U можно рассматривать как плотность энергии движущейся жидкости. Первый член в выражении для U равен плотности потенциальной энергии положения, обусловленной внешними силами, последний член равен плотности кинетической энергии. Если движение жидкости *безвихревое*, вихревой вектор \mathbf{w} равен нулю и U всюду постоянно для потока данного вида. В этом случае скорость жидкости определяем через потенциал скорости при помощи граничных условий и потом находим давление из уравнения

$$p = U - V - \frac{1}{2} \rho v^2, \quad (2.3.16)$$

где U — постоянная, определяемая из граничных условий. Это уравнение называется *уравнением Бернуlli* для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$).

Заметим, что, как может получиться, в некоторых областях для решения требуется достаточно большая скорость, так что давление, найденное по этой формуле, сделается отрицательным. В принципе это произойти не может, так как иначе возникла бы кавитация и граничные условия должны были бы быть изменены.

Очень многие задачи, представляющие практический интерес, могут быть решены с достаточной степенью точности, если допустить, что поток определяется потенциалом скоростей (т. е. что поток безвихревой), который удовлетворяет уравнению Лапласа. Давление в любой точке может быть найдено из уравнения Бернуlli. Тем же способом могут быть решены даже многие задачи аэродинамики, хотя воздух далеко не является несжимаемым. Только в случае, когда скорость значительной

части воздуха приближается к скорости звука, полученному приближение оказывается непригодным. Более сложный случай *сверхзвукового потока* будет затронут далее в этом параграфе.

Как пример безвихревого движения несжимаемой жидкости мы снова рассмотрим поток жидкости из простого источника, данный уравнением (2.3.7). Если пренебречь гравитационным потенциалом, давление, как функция r , будет иметь вид $p_\infty - (ρQ^2/2r^4)$, где p_∞ — давление на бесконечном расстоянии от источника. Мы видим, что если действительные размеры источника достаточно малы (r — достаточно мало), то давление может оказаться отрицательным и появится кавитация.

В заключение рассмотрим случай вертикального вихря радиуса a , определенного уравнением (2.3.9). Теперь мы примем во внимание гравитационный потенциал $V = ρgz$. При $r > a$ вихревой вектор w равен нулю, так что U постоянно. Предположим, что жидкость, когда она неподвижна, имеет свободную поверхность ($p = 0$) при $z = 0$. Постоянное значение U в таком случае должно быть таким, что $p = 0$ при $z = 0$ и при $r = \infty$, так что

$$ρgz + p + \frac{ρω^2 a^4}{2r^2} = 0, \quad r > a.$$

При $r < a$ вихревой вектор w не равен нулю, но $\text{rot } w = 0$, так что

$$\text{grad } U = 2ρv \times w = 2ρω^2 r \mathbf{a}_r.$$

Определив отсюда интегрированием U и выбрав постоянную интегрирования так, чтобы давление было непрерывным при $r = a$, получим

$$ρgz + p + \frac{ρω^2}{2} (2a^2 - r^2) = 0, \quad r < a.$$

Уравнение свободной поверхности есть уравнение поверхности $p = 0$

$$z = \begin{cases} \frac{ω^2}{2g} (r^2 - 2a^2), & r < a, \\ -\frac{ω^2 a^4}{2gr^2}, & r > a. \end{cases} \quad (2.3.17)$$

В обоих рассмотренных случаях вязкость не влияет на давление, так как в уравнении, определяющем давление для установившегося движения несжимаемой жидкости, содержится единственный член, зависящий от вязкости, и этот член содержит также $\text{rot } w$; в наших же простых примерах $\text{rot } w = 0$. Можно рассмотреть другие примеры, в которых $\text{rot } w$ не равен нулю и, следовательно, вязкость влияет на давление; однако в примерах этого рода чаще всего v и p зависят от времени.

Волновое уравнение. В качестве первого примера неустановившегося движения рассмотрим колебания с малой амплитудой. В этом случае в уравнении (2.3.14) можно пренебречь членами, содержащими квадрат v , и мы получаем более простое уравнение

$$ρ \frac{\partial v}{\partial t} = -\text{grad}(p + V) + \left(\frac{4}{3} η + λ \right) \text{grad} \text{div } v - η \text{rot} \text{rot } v, \quad (2.3.18)$$

где мы спохватили $F = -\text{grad } V$; здесь мы более не предполагаем, что жидкость несжимаема.

Чтобы пойти дальше, нужно рассмотреть связь между давлением и сжатием жидкости. Поток материи, вытекающий из любого элемента объема, уменьшает давление сжимаемой жидкости; именно для упругой жидкости, если только сжатие невелико, скорость изменения p пропорциональна дивергенции v , $dp/dt = -z \text{div } v$. Постоянная z называется

модулем сжатия рассматриваемой жидкости. Если смещения малы, это равенство можно выразить через смещение \mathbf{s}

$$p = -\mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{s}, \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = \mathbf{v}.$$

На стр. 59 мы видели, что каждое векторное поле может быть единственным образом разбито на две части, одна из которых является градиентом, а другая — вихрем. Это обстоятельство мы используем здесь дважды; во-первых, положим, что неизвестная скорость \mathbf{v} равна сумме градиента потенциала скоростей ϕ и вихря векторного потенциала \mathbf{A} . Подставив это в (2.3.18), мы приравняем отдельно градиенты и вихри в обеих частях. Равенство вихрей дает

$$\rho \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2.3.19)$$

Это уравнение не является векторным волновым уравнением, но представляет собой векторный аналог уравнения диффузии, упомянутого на стр. 136, и будет рассмотрено в § 2.4. Так как здесь содержится производная по времени только первого порядка, а не второго, то решения этого уравнения не будут истинными волнами, распространяющимися с определенной скоростью и имеющими неизменную энергию; эти решения определяют возмущения, затухающие с течением времени и уменьшающиеся при распространении в пространстве. Эти решения будут рассмотрены более подробно в гл. 12. Отметим, что эти волны не влияют на давление. Заметим также, что уравнение для вихря $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}$ совпадает с уравнением для \mathbf{A} . Для нас не должно быть неожиданным, что наличие вязкости вызывает распространение вихревого движения.

Собирая члены с градиентами в обеих частях уравнения, полученного из (2.3.18), и дифференцируя обе части по времени, получим окончательно уравнение для продольных волн

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= c^2 \nabla^2 \psi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{4}{3} \eta + \lambda \right) \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right), \\ c^2 &= \frac{\chi}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Если вязкость сжатия $\frac{4}{3} \eta + \lambda$ мала, то в жидкости распространяются обычные волны сжатия со скоростью c и все замечания, сделанные относительно волн сжатия в упругой среде, применимы и здесь. Если эта вязкость не равна нулю, то нужно ввести еще член, характеризующий затухание. Например, для простых гармонических волн в случае, когда зависимость от времени выражена множителем $e^{-i\omega t}$, уравнение для второго множителя, выражающего зависимость ψ от положения точки в пространстве, имеет вид

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2 \psi}{c^2 - i(\omega/3\rho)(4\eta + 3\lambda)} = 0.$$

Другими словами, функция ψ содержит в качестве пространственного множителя показательную функцию с комплексным показателем, определяющую пространственное затухание волны.

С другой стороны, если построена стоячая волна, для которой часть, зависящая от положения точки в пространстве, удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$, то уравнение для зависимости ψ от времени имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{4}{3} \eta + \lambda \right) k^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + c^2 k^2 \psi = 0.$$

Это уравнение является уравнением колебаний, затухающих с течением времени.

Безвихревой поток сжимаемой жидкости. Нашим следующим примером иного рода движения жидкости, представленного уравнением (2.3.14), будет установившееся безвихревое движение сжимаемой жидкости. Это — важный в аэродинамике случай, когда скорость жидкости приближается к рассмотренной в предыдущем пункте скорости распространения волны сжатия $c = \sqrt{\kappa/p}$. Так как приводимые рассуждения почти всегда применяются к потоку воздуха, мы можем, кроме того, наше выражение для сжимаемости κ считать приспособленным для случая газа.

Мы не можем здесь углубляться в подробное рассмотрение термодинамики идеального газа; для справок по этому вопросу имеется большое число книг. Нам здесь нужно только записать два уравнения, связывающих давление p , плотность ρ и температуру T газа, подвергающегося адиабатическому расширению (расширению без потери тепла, содержащегося в газе):

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (2.3.21)$$

где индексами 0 обозначены давление, плотность и температура в стандартных условиях (например, когда жидкость неподвижна). Эти уравнения можно написать иначе, связав давление и плотность газа с его энтропией S :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = A e^{\alpha S}.$$

Адиабатическое расширение газа является расширением при постоянной энтропии S . Постоянная γ равна отношению удельных теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме (ее значение для воздуха равно 1,405).

Продифференцировав это уравнение при постоянном S , найдем $dp/p = \gamma dp/\rho$, а воспользовавшись уравнением неразрывности (2.3.5), получим $dp/p = -\gamma dt \operatorname{div} \mathbf{v}$. Сравнивая этот результат с определением модуля сжатия κ , мы видим, что $\kappa = \gamma p$ и что скорость звука (волны сжатия) в газе при давлении p и плотности ρ равна

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (2.3.22)$$

В потоке сжимаемого газа как давление, так и плотность (а следовательно, и скорость звука) меняются от точки к точке внутри газа. Связь между этими величинами получается из уравнений (2.3.15), причем мы снова начинаем с рассмотрения безвихревого установившегося потока ($\mathbf{w} = 0$, $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$; мы также пренебрегаем потенциалом V). Так как теперь ρ не остается постоянным, то интегрирование уравнения $\operatorname{grad} U = 0$ несколько сложнее, чем раньше. И давление, и плотность оказываются функциями скорости воздуха v в любой точке. Максимум давления p_0 и соответствующие значения плотности ρ_0 и скорости звука c_0 достигаются в тех точках, где $v=0$ (точки застоя). В любой другой точке, согласно уравнениям (2.3.15) и (2.3.21), имеем

$$v^2 = -2 \int_{v=0}^v \frac{dp}{\rho} = 2 \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} \int_p^{p_0} p^{-1/\gamma} dp = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right].$$

Это равенство указывает на то, что существует максимум скорости потока

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)}},$$

когда давление равно нулю. Такова будет, например, скорость истечения в пустоту. Для воздуха при температуре 15°C ($T_0 = 288$) в точках застоя эта предельная скорость составляет $75\,700 \text{ см/сек}$. При этой предельной скорости скорость звука равна нулю (так как давление равно нулю). В точках застоя воздух неподвижен и скорость звука $\sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ максимальна. Поэтому, когда v меняется от нуля до v_{\max} , безразмерное отношение $M = v/c$ меняется от нуля до бесконечности. Это отношение называется *числом Маха* в точке для потока воздуха. Если число Маха меньше единицы, поток называется *дозвуковым*, если оно больше единицы, поток будет *сверхзвуковым*.

Формулы, выражающие давление, плотность, температуру, скорость звука и число Маха в некоторой точке через скорость потока v в этой точке и через давление p_0 и плотность ρ_0 в точке застоя, имеют вид:

$$\begin{aligned} p &= p_0 \left[1 - \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2 \right]^{\gamma/(\gamma-1)} = p_0 \left(\frac{c}{c_0} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}; \\ \rho &= \rho_0 \left[1 - \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2 \right]^{1/(\gamma-1)} = \rho_0 \left(\frac{c}{c_0} \right)^{2/(\gamma-1)}; \\ T &= T_0 \left[1 - \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2 \right] = T_0 \left(\frac{c}{c_0} \right)^2; \\ c &= \sqrt{\frac{1}{2} (\gamma - 1) (v_{\max}^2 - v^2)}; \\ M &= \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \cdot \frac{v^2}{v_{\max}^2 - v^2}}; \\ v_{\max} &= \sqrt{\frac{2 \gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)}} = 75\,700 \text{ см/сек}; \\ c_0 &= v_{\max} \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = 34\,100 \text{ см/сек}. \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Скорость v_s , для которой число Маха M равно единице (скорость жидкости равна скорости звука), оказывается равной $\sqrt{(\gamma-1)/(\gamma+1)} v_{\max} = 31\,100 \text{ см/сек}$ для воздуха при температуре 15°C ($T_0 = 288$) в точках застоя. Для этой скорости давление, плотность и т. д. равны: $p_s = 0,528 p_0$; $\rho_s = 0,685 \rho_0$; $T_s = 0,832 T_0 = 240^{\circ}\text{K} = -33^{\circ}\text{C}$; $c_s = v_s$.

Дозвуковой и сверхзвуковой потоки. Различные примеры показывают важность области, где $M = 1$, и обнаруживают, что явления в газовом потоке, скорость которого превышает указанную (сверхзвуковой поток), совершаю отличны от явлений в газовом потоке, скорость которого меньше указанной (дозвуковой поток). В качестве очень простого примера рассмотрим воздушный поток, набегающий на очень малый неподвижный предмет, находящийся в точке P (рис. 2.14). Наличие этого предмета постоянно тормозит движение воздуха перед ним, что непрерывно вызывает звуковую волну впереди него. Если скорость воздуха меньше скорости звука, эти волны от препятствия в точке P могут распространяться против течения и, так сказать, предупреждать среду о предстоящей встрече с этим препятствием. Если же воздух движется быстрее звука, то предостережение не может быть послано навстречу и расширяющиеся фронты волн относятся по течению, как видно на

правой части рис. 2.14. Огибающая этих волн является «носовой волной» возмущения и называется *линией или поверхностью Маха*. Первое сообщение о наличии препятствия в точке P появляется лишь тогда, когда воздух наталкивается на линию или поверхность Маха. Между прочим,

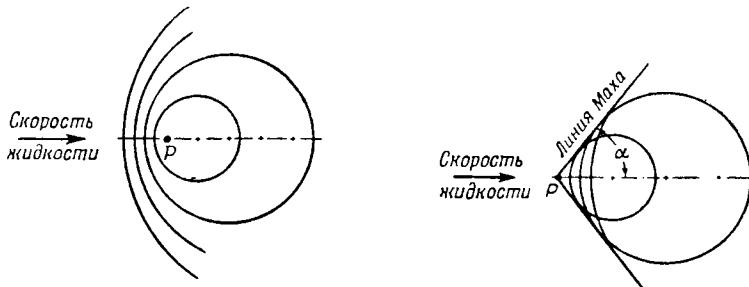


Рис. 2.14. Распространение возмущения в жидкости, вызванного небольшим препятствием в точке P при дозвуковой (слева) и сверхзвуковой (справа) скорости потока.

нетрудно видеть, что угол наклона этих линий к оси потока, так называемый *угол Маха*, дается равенством

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{M} = \arcsin \frac{c}{v}.$$

Позже мы снова вернемся к линиям Маха.

В качестве второго примера рассмотрим поток воздуха в трубе с переменным поперечным сечением $S(x)$ (см. рис. 2.15). Для того чтобы

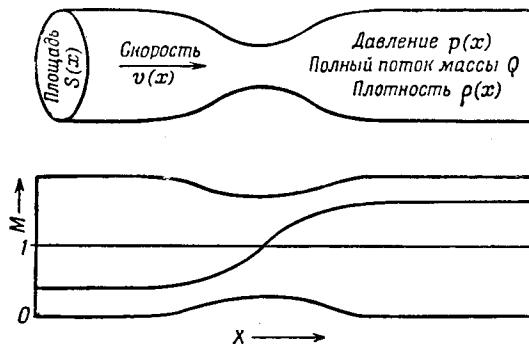


Рис. 2.15. Поток воздуха в трубе с переменным поперечным сечением.

Нижний график показывает три возможных хода изменения величины $M = v/c$ вдоль трубы.

воздух не накапливался где-либо (т. е. чтобы поток был установившимся), необходимо, чтобы через каждое поперечное сечение в единицу времени проходила одна и та же масса Q воздуха. Если поперечное сечение трубы меняется не слишком быстро с изменением x и если внутренняя поверхность трубы гладкая, то плотность и скорость почти одинаковы во всех точках каждого поперечного сечения; поэтому с достаточно хорошим приближением мы можем считать p , ρ и v функциями одного только x . Для такого приближения в случае установившегося потока имеем

$$Q = S(x) \rho(x) v(x) = \frac{S \rho_0}{v_{\max}^{2/(\gamma-1)}} (v_{\max} - v^2)^{1/(\gamma-1)} v$$

или

$$\ln S = \frac{2}{\gamma-1} \ln v_{\max} + \ln \left(\frac{Q}{\rho_0} \right) - \ln v - \frac{1}{\gamma-1} \ln (v_{\max}^2 - v^2).$$

Дифференцируя по x последнее уравнение и пользуясь выражением для c из (2.3.23), получаем

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} (M^2 - 1); \quad M = \frac{v}{c}. \quad (2.3.24)$$

Поэтому если поток всюду дозвуковой ($M < 1$), то при *уменьшении* размеров S скорость воздуха v *возрастает*, и наоборот; если же поток всюду является сверхзвуковым ($M > 1$), то при *убывании* S скорость воздуха *убывает*, и наоборот. В обоих случаях при максимуме или минимуме S скорость v также достигает максимума или минимума. Эти случаи показаны на нижней части рис. 2.15.

Тем не менее, если давление ρ_0 , полный поток Q и т. д. подобраны надлежащим образом, число Маха M может оказаться равным 1 там, где S достигает минимума. В этом случае при обращении dS/dx в нуль dv/dx может не быть равным нулю и скорость при прохождении газа через узкое сечение трубы может возрасти от дозвуковой до сверхзвуковой (конечно, скорость может быть и вначале сверхзвуковой, а в конце — дозвуковой). Этот случай изображен средней кривой нижней части рис. 2.15.

Потенциал скорости. Линейное приближение. Теперь мы должны вывести уравнение, которое даст нам возможность рассчитать векторное поле скоростей, удовлетворяющее любым заданным граничным условиям. Как и в случае безвихревого потока несжимаемой жидкости, предположим, что это поле может быть получено из скалярного поля потенциала скоростей $\mathbf{v} = \text{grad } \psi$. Уравнение для ψ получается из уравнения неразрывности (2.3.1) при $\partial\rho/\partial t = 0$:

$$0 = \text{div}(\rho\mathbf{v}) = \text{div} \left[\frac{\rho_0}{v_{\max}^{2/(\gamma-1)}} (v_{\max}^2 - v^2)^{1/(\gamma-1)} \mathbf{v} \right]$$

или

$$0 = \text{div} [(v_{\max}^2 - v^2)^{1/(\gamma-1)} \mathbf{v}].$$

Следовательно, если $\mathbf{v} = \text{grad } \psi$, то

$$\nabla^2 \psi = J; \quad J = \sum_{m,n=1}^3 \frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_m \partial x_n}, \quad (2.3.25)$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ и $c^2 = \frac{1}{2}(\gamma-1)(v_{\max}^2 - |\text{grad } \psi|^2)$.

Для двумерного потока уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (2.3.26)$$

Здесь существует также функция тока Φ , определяющая линии тока и измеряющая поток массы воздуха между двумя линиями тока. Мы найдем эту функцию из уравнения неразрывности для установившегося потока $\text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$, так как можно положить

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial x};$$

тогда $\operatorname{div}(\rho v)$ автоматически обращается в нуль. Подобно тому как мы видели на стр. 154, полный поток массы между двумя линиями тока (на единицу расстояния по оси z) равен произведению ρ_0 на разность значений Φ для двух рассматриваемых линий тока. Уравнение для Φ аналогично уравнению для ψ

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho c} \right)^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho c} \right)^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right] = -2 \left(\frac{\rho_0}{\rho c} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (2.3.27)$$

Уравнение (2.3.25) не является, конечно, линейным относительно ψ ; его очень трудно решить точно. Если M малое (дозвуковой поток), в первом приближении величиной J можно пренебречь и уравнение сводится к линейному уравнению Лапласа, характеризующему несжимаемые жидкости. Когда найдено решение ϕ_0 уравнения Лапласа для интересующего нас частного случая, с помощью уравнения для J можно, исходя из ϕ_0 , вычислить J_0 для каждой точки. Тогда второе приближение к истинному значению ψ можно получить, решив уравнение Пуассона $\nabla^2 \psi = J_0$ и т. д.

Однако, если M не малое, такие методы итераций не могут быть использованы и нужно применять другие приближенные методы. Один из приемов полезен в случае, когда поток незначительно отличается от равномерного потока $v = v_u$, где v_u — постоянно. В этом случае направление невозмущенного потока можно считать совпадающим с направлением оси x , и мы можем положить

$$v = v_u \mathbf{i} + v_1; \quad \psi = v_u x + \psi_1,$$

где v_1 мало сравнительно с v_u , хотя v_u не обязательно является малым сравнительно с c . С точностью до величин первого порядка относительно малого количества v_1/c имеем

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} (1 - M_u^2) + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \approx 0, \quad (2.3.28)$$

где $M_u^2 = [2/(\gamma - 1)] [v_u^2/(v_{\max}^2 - v_u^2)] = v_u^2/c_u^2$ есть квадрат числа Маха для невозмущенного потока.

Это уравнение, будучи линейным относительно ψ_1 , может быть решено, и тем самым установленный поток может быть определен вблизи неровностей граничных поверхностей, если только эти неровности не вызывают вблизи себя значительных изменений скорости воздуха.

Линии Маха и ударные волны. Уравнение (2.3.28) снова показывает существенное различие между дозвуковым и сверхзвуковым потоками. Это различие можно иллюстрировать в двумерном случае, когда уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} (1 - M_u^2) + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = 0. \quad (2.3.29)$$

Если M_u меньше единицы, это уравнение преобразуется в уравнение Лапласа для ψ_1 путем изменения масштаба для y (полагаем $y' = y \sqrt{1 - M_u^2}$, $x' = x$). Поэтому линии тока и эквипотенциальные поверхности напоминают линии тока и эквипотенциальные поверхности для потока несжимаемой жидкости, но только растянуты в направлении оси y в $1/\sqrt{1 - M_u^2}$ раз.

Если же M_u больше единицы, мы не можем преобразовать наше уравнение в уравнение Лапласа, так как знак перед членом, содержащим $\partial^2 \psi_1 / \partial x^2$, становится отрицательным и уравнение больше напоминает

волновое уравнение (см. стр. 124) с заменой t на x и с «волновой скоростью» $c_u = 1/\sqrt{M_u^2 - 1}$. Решения полученного уравнения имеют вид

$$\psi_1 = f(y - c_u x) + F(y + c_u x).$$

Как было упомянуто на стр. 163, любая неправильность формы границы (которая здесь, очевидно, является плоскостью, параллельной плоскости xz) порождает «носовую волну», которая образует угол $\alpha = \arctg c_u = \arcsin \frac{1}{M_u}$ с осью x , направлением невозмущенного движения. Этот угол является углом Маха, упомянутым на стр. 163.

В двумерном случае мы можем также получить приближенное уравнение для функции тока Φ , рассмотренной на стр. 164. Предположим, что $\Phi = (\rho/\rho_0)v_u y + \Phi_1$; подставляя это в уравнение (2.3.27) и пренебрегая членами высшего порядка, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} (1 - M_u^2) + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0, \quad (2.3.30)$$

аналогичное приближенному уравнению для поправки к потенциалу скоростей ψ .

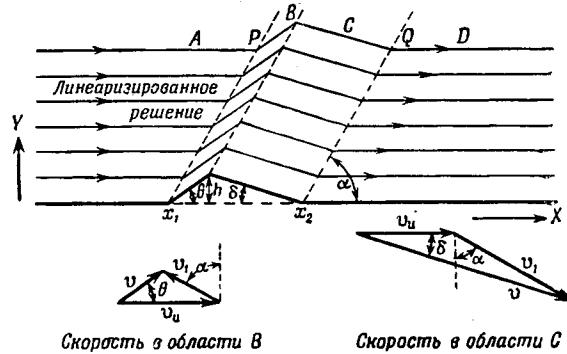


Рис. 2.16. Двумерный сверхзвуковой поток;
линеаризованное решение.

Векторные диаграммы показывают способ определения скоростей в областях B и C ; скорость в областях A и D равна v_0 .

В качестве примера рассмотрим поток воздуха, движущегося со сверхзвуковой скоростью вдоль поверхности, совпадающей в основном с плоскостью xz ; однако в некоторой точке на этой плоскости имеется складка, образующая неправильность на границе, параллельную оси z , как показано на рис. 2.16. Если высота h этой складки невелика, то пригодны приближения, даваемые уравнениями (2.3.29) и (2.3.30), и функция тока Φ_1 и потенциал скоростей ψ_1 являются в этом случае функциями от $y - c_u x$ или, что то же самое, от $x - y \sqrt{M_u^2 - 1}$. Функция от $y + c_u x$ в этом случае не нужна (почему?). Поэтому изменение скорости v_1 перпендикулярно к линии Маха, т. е. образует угол α с осью y .

Если граничная поверхность дана уравнением $y = B(x)$, причем $B(x)$ равно нулю при $x > x_2$ и при $x < x_1$, то функция тока такова:

$$\Phi = v_0 y - B(x - y \sqrt{M_u^2 - 1}).$$

Линии тока $\Phi = \text{const}$ изображены в верхней части рис. 2.16. Заметим, что линии тока не возмущаются в области A слева от линии Маха (x_1, P),

а также и в области D справа от линии Маха (x_2, Q); обе эти линии наклонены к оси x под углом Маха $\alpha = \arcsin \frac{1}{M_u}$.

Фактическая скорость v (для этого приближения) в областях B и C рис. 2.16 может быть найдена графически, если воспользоваться следующими двумя очевидными фактами: во-первых, вектор v должен быть параллелен линиям тока, т. е. должен образовать угол θ с осью x , и, во-вторых, вектор v_1 перпендикулярен к линии Маха, т. е. образует угол α с осью y . Графическое построение показано на рис. 2.16. Так как v_1 , по предположению, меньше чем v_u , то для скорости воздуха, его плотности, числа Маха и потока массы мы имеем следующие приближенные выражения для двух областей:

$$\begin{aligned} \text{Область } B \quad v &\approx v_u (1 - \theta \operatorname{tg} \alpha), \\ \rho &\approx \rho_u (1 + M_u^2 \theta \operatorname{tg} \alpha), \\ \rho v &\approx \rho_u v_u [1 + (M_u^2 - 1) \theta \operatorname{tg} \alpha], \\ M &\approx M_u \left[1 - \frac{v_{\max}^2 \theta \operatorname{tg} \alpha}{v_{\max}^2 - v_u^2} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Область } C \quad v &\approx v_u (1 + \delta \operatorname{tg} \alpha), \\ \rho &\approx \rho_u (1 - M_u^2 \delta \operatorname{tg} \alpha), \\ \rho v &\approx \rho_u v_u [1 - (M_u^2 - 1) \delta \operatorname{tg} \alpha], \\ M &\approx M_u \left[1 + \frac{v_{\max}^2 \delta \operatorname{tg} \alpha}{v_{\max}^2 - v_u^2} \right]. \end{aligned}$$

Интересно отметить, что для потока в области B , несмотря на уменьшение скорости воздуха v , поток ρv массы через единичную площадку *возрастает*. Изображение линий тока также подтверждает это, так как на рис. 2.16 видно, что эти линии тока в области B расположены ближе друг к другу, чем в области A , а этому сопутствует возрастание потока массы, как было выяснено на стр. 165. При пересечении первой линии Маха скорость воздуха резко уменьшается и воздух сжимается, при пересечении второй линии Маха движение ускоряется и воздух расширяется, при пересечении третьей линии скорость уменьшается до первоначальной величины и воздух сжимается до первоначального состояния.

Если граница в самом деле искажена так сильно, как изображено на рис. 2.16 (т. е. если углы θ и δ действительно так велики, как показано), то v_1 не будет очень мало сравнительно с v_u и первое приближение не будет достаточным для того, чтобы рассчитать движение. Непосредственно возникающая трудность состоит в том, что угол Маха для воздуха в области B заметно отличается от угла Маха для воздуха в области A , если только скорости v заметно отличаются друг от друга в этих областях. Возникает вопрос: каков должен быть угол между осью x и линией Маха, отделяющей друг от друга области A и B ? Должен ли он совпадать с углом $\alpha_u = \arcsin(1/M_u)$, соответствующим области A , или с углом Маха, соответствующим движению воздуха в области B (последний угол больше чем α_u)? Подробное изучение точного решения показывает, что угол между осью x и действительным «фронтом удара» является промежуточным между двумя указанными выше углами и что воздух при пересечении этого фронта испытывает практически мгновенное изменение состояния; его скорость, плотность и давление становятся равными соответствующим величинам в области B .

Линии Маха, соответствующие областям B и C , расходятся (как показано пунктирными линиями Oa и Ob на рис. 2.17); в области, расположенной между ними, в точном решении происходит *непрерывное* изменение от состояния, соответствующего области B , к состоянию, соответствующему области C . Изменения давления вдоль линии H также показаны на рис. 2.17. Здесь видно, что при переходе от области более быстрого движения к области, где скорость меньше, давление *возрастает* скачкообразно, в то время как обратное изменение происходит более плавно.

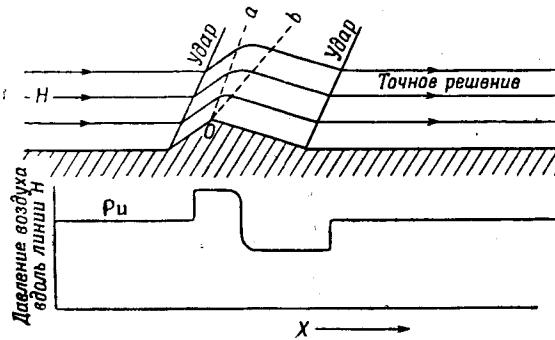


Рис. 2.17. Двумерный сверхзвуковой поток; точное решение.

Показаны линии тока и распределение давления вдоль H .

Еще очень многое можно было бы сказать здесь об аэродинамике сверхзвуковых скоростей, но это слишком далеко бы нас от нашей цели в этой главе. Мы здесь изучаем приемы получения уравнений полей, а не занимаемся исчерпывающим рассмотрением различных отделов физики.

2.4. Диффузия и другие явления просачивания жидкости

В предыдущем параграфе мы молча предполагали, что рассматриваемая жидкость одна заполняет пространство, что внутри жестких границ, соответствующих изучаемой задаче, нет других жидкостей или твердых тел, мешающих потоку жидкости. Однако многие интересные задачи связаны с просачиванием жидкости через пористое твердое тело (или через другую жидкость), которое в каждой точке взаимодействует с диффундирующими жидкостью. Примерами могут служить проникновение жидкости через пористую среду, или движение особых жидкостей, например свободных электронов, через газ, или нейтронов через вещество. Весьма важным является вопрос о расчете потока тепла через вещество. Тепло является, конечно, внутренней энергией самого вещества, но оно ведет себя во многих отношениях так, как будто бы оно было жидкостью с «плотностью» и скоростью потока, которые могут быть измерены.

Во всех этих случаях мы все еще можем говорить об эффективной плотности ρ рассматриваемой жидкости, равной средней массе на единицу объема (или количеству тепла на единицу объема и т. д.) в каждой точке, даже в том случае, когда каждый элемент объема содержит также другую жидкость или твердое тело. Во многих случаях мы не можем говорить о средней скорости (что такое скорость тепла, например?), но мы можем всегда говорить о *потоке массы* (или полном потоке тепла и т. д.) через квадратный сантиметр в каждой точке. Это количество