

Линии Маха, соответствующие областям  $B$  и  $C$ , расходятся (как показано пунктирными линиями  $Oa$  и  $Ob$  на рис. 2.17); в области, расположенной между ними, в точном решении происходит *непрерывное* изменение от состояния, соответствующего области  $B$ , к состоянию, соответствующему области  $C$ . Изменения давления вдоль линии  $H$  также показаны на рис. 2.17. Здесь видно, что при переходе от области более быстрого движения к области, где скорость меньше, давление *возрастает* скачкообразно, в то время как обратное изменение происходит более плавно.

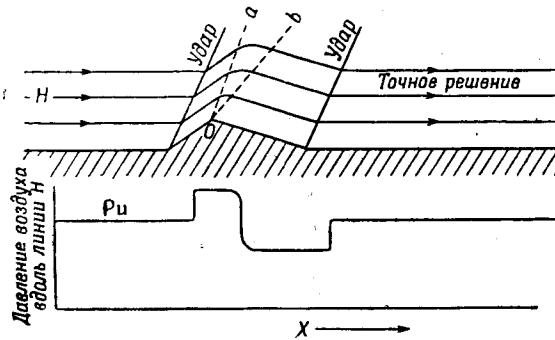


Рис. 2.17. Двумерный сверхзвуковой поток; точное решение.

Показаны линии тока и распределение давления вдоль  $H$ .

Еще очень многое можно было бы сказать здесь об аэродинамике сверхзвуковых скоростей, но это слишком далеко бы нас от нашей цели в этой главе. Мы здесь изучаем приемы получения уравнений полей, а не занимаемся исчерпывающим рассмотрением различных отделов физики.

## 2.4. Диффузия и другие явления просачивания жидкости

В предыдущем параграфе мы молча предполагали, что рассматриваемая жидкость одна заполняет пространство, что внутри жестких границ, соответствующих изучаемой задаче, нет других жидкостей или твердых тел, мешающих потоку жидкости. Однако многие интересные задачи связаны с просачиванием жидкости через пористое твердое тело (или через другую жидкость), которое в каждой точке взаимодействует с диффундирующими жидкостью. Примерами могут служить проникновение жидкости через пористую среду, или движение особых жидкостей, например свободных электронов, через газ, или нейтронов через вещество. Весьма важным является вопрос о расчете потока тепла через вещество. Тепло является, конечно, внутренней энергией самого вещества, но оно ведет себя во многих отношениях так, как будто бы оно было жидкостью с «плотностью» и скоростью потока, которые могут быть измерены.

Во всех этих случаях мы все еще можем говорить об эффективной плотности  $\rho$  рассматриваемой жидкости, равной средней массе на единицу объема (или количеству тепла на единицу объема и т. д.) в каждой точке, даже в том случае, когда каждый элемент объема содержит также другую жидкость или твердое тело. Во многих случаях мы не можем говорить о средней скорости (что такое скорость тепла, например?), но мы можем всегда говорить о *потоке массы* (или полном потоке тепла и т. д.) через квадратный сантиметр в каждой точке. Это количество

является вектором и равно  $\rho \mathbf{v}$ , если здесь имеется такое понятие, как скорость жидкости  $\mathbf{v}$ .

Вообще говоря, рассматриваемая жидкость не исчезает (хотя в случае, когда жидкость представляет собой нейтронный газ, некоторые нейтроны исчезают благодаря поглощению их ядрами), так что уравнение неразрывности обычно сохраняется

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (2.4.1)$$

Однако, начиная с этого момента, наши рассуждения зависят от того, какую именно жидкость мы изучаем.

**Поток жидкости через пористое твердое тело.** Например, для жидкости, просачивающейся сквозь пористое твердое тело, обычно можно пренебречь расширением и сжатием жидкости, т. е. положить  $\partial \rho / \partial t = 0$ . Можно пренебречь также вязкостью, так как влияние ее мало по сравнению с силами трения при просачивании; кроме того, можно пренебречь вихревыми движениями. Таким образом, поток массы  $\mathbf{J}$  можно рассматривать как градиент скалярного потенциала, удовлетворяющего уравнению Лапласа  $\operatorname{div} [\operatorname{grad} \phi] = \nabla^2 \phi = 0$ , как и в случае безвихревого потока несжимаемой жидкости. Отличие от других случаев, рассмотренных в предыдущем параграфе, имеется в уравнении движения, определяющем давление в каждой точке. В настоящем случае это различие состоит в наличии силы, заставляющей жидкость течь через поры; в первом приближении эта сила пропорциональна потоку.

Исходя из уравнения (2.3.14) мы видим, что уравнением для потока массы в данном случае является уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + R \mathbf{J} = \mathbf{F} - \operatorname{grad} p, \quad (2.4.2)$$

где  $\mathbf{F}$  — внешняя сила (тяжести и т. д.), действующая на единицу объема жидкости,  $p$  — давление, а  $R$  — *удельное сопротивление потоку* со стороны пористого материала. Когда пористое вещество оказывает одинаковое сопротивление во всех направлениях,  $R$  можно считать скаляром; для неизотропного вещества  $R$  будет аффинором, действующим на  $\mathbf{J}$ . Если движение установившееся, причем  $\mathbf{J} = \operatorname{grad} \phi$  и  $\mathbf{F}$  является также градиентом потенциальной функции  $V$ , это уравнение принимает вид

$$\operatorname{grad} (V - p) = R \operatorname{grad} \phi,$$

а в случае, когда  $R$  — постоянно, оно дает просто  $p = V - R \phi$ , что и служит для определения давления  $p$  в каждой точке.

**Диффузия.** Более интересные проблемы возникают в случае сжимаемой жидкости, а также в случаях, когда вообще нельзя говорить о «силах», действующих на элемент жидкости. Таковы случаи потока тепла, диффузии одной жидкости через другую и диффузии нейтронов через вещество. В случае потока тепла понятие силы, действующей на жидкость, не имеет смысла; в случае диффузии нейтронов существенными силами являются внутренние силы, вызывающие столкновения между нейтронами и частицами вещества.

Ни в одном из этих случаев уравнение движения (2.4.2) не применимо. Поток вызывается не внешними силами и не градиентами давлений, а просто градиентом концентрации. Жидкость по тем или иным причинам стремится перемещаться из точек с более высокой плотностью к точкам с меньшей плотностью, причем поток пропорционален градиенту плот-

ности

$$\mathbf{J} = -a^2 \operatorname{grad} \rho; \quad (2.4.3)$$

постоянная  $a$  называется *постоянной диффузии*. Комбинируя это с уравнением неразрывности (2.4.1), получаем *уравнение диффузии*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = a^2 \nabla^2 \rho, \quad (2.4.4)$$

которое уже встречалось нам на стр. 136 и 160.

В случае потока тепла  $\rho$  есть «количество тепла» в единичном объеме; оно пропорционально температуре  $\rho = CT$ , где  $C$  — теплоемкость вещества на единицу объема. Так как уравнение теплового потока имеет вид  $\mathbf{J} = -K \operatorname{grad} T$ , где  $K$  — теплопроводность вещества, то, очевидно,  $T$  является решением уравнения диффузии при  $a^2 = K/C$ .

Доказательство того, что, например, поток нейтронного газа удовлетворяет приближенно уравнению (2.4.3), и определение соответствующей постоянной диффузии требуют подробного изучения механизма диффузии нейтронов; это будет намечено позже в данном параграфе. В таком случае диффузия является следствием беспорядочного движения частиц жидкости, а постоянная диффузии является мерой сопротивления, оказываемого этому движению другим присутствующим веществом.

Уравнение диффузии (2.4.4) отличается от волнового уравнения (2.2.2) тем, что оно содержит производную первого порядка по времени вместо производной второго порядка. Это соответствует тому факту, что диффузия является необратимым процессом подобно движению при наличии трения, при котором энергия теряется (или энтропия возрастает), в то время как волновое движение является обратимым и консервативным. В одномерном случае уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

является простейшей формой *параболического уравнения с частными производными*. Как отмечено на стр. 136, плотность жидкости здесь изменяется так же, как изменяются смещения точек струны в случае полного затухания; плотность жидкости здесь стремится к тому, чтобы стать везде постоянной, причем никогда не «перебарщивает» настолько, чтобы возникли колебания, как это имело место для волновых и вибрационных движений.

**Фазовое пространство и функция распределения.** Прежде чем идти дальше в изучении диффузии, нам надо будет рассмотреть подробно движения частиц диффундирующей жидкости; это значит, что мы должны на время отказаться от представления о жидкости как о непрерывной, гладкой среде и рассмотреть ее атомистическое, разрывное строение. Такое исследование целесообразно выполнить именно в этой главе, если только удастся показать, как можно описать поведение большого числа атомов с помощью непрерывных полей, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям с частными производными, а также показать, как свойства отдельных атомов связаны с постоянными, содержащимися в уравнениях поля.

Такая связь устанавливается, конечно, с помощью методов кинетической теории. Пусть наша жидкость состоит из  $N$  атомов (или молекул), каждый из которых имеет массу  $m$ . «Состояние»  $n$ -го атома в любой момент задается его положением и скоростью (для молекул существуют еще другие внутренние движения, которые здесь нет надобности рассматривать). Положение атома может быть задано с помощью *радиус-вектора*

$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ , проведенного к атому из некоторого начала координат; скорость этого атома может быть задана с помощью вектора, изображающего количество движения или импульс  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = ip_x + jp_y + kp_z$ . Таким образом, состояние атома (в той мере, как это нам здесь нужно) может быть задано положением точки в шестимерном фазовом пространстве с координатами  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$ . Методы кинетической теории дают способы, при помощи которых можно перейти от движения отдельных атомов в фазовом пространстве, движений, вызванных влиянием внешних и внутренних (межатомных) сил, к средним движениям множества атомов.

Переход совершается с помощью *функции распределения*. Для определения этой функции рассмотрим жидкость частного вида, состоящую из  $N$  атомов, удовлетворяющих данным начальными и граничными условиям обычного типа. В некоторый момент атомы этой жидкости изображаются множеством  $N$  точек в фазовом пространстве. В одних областях фазового пространства имеется концентрация точек, в других областях они расположены очень редко. Если  $N$  – достаточно большое число, мы обнаружим тенденцию к «гладкости» густоты этого множества точек. Мы можем записать среднюю плотность точек в различных областях фазового пространства, и эта плотность будет меняться более или менее гладким образом от точки к точке. Предположим теперь, что для подобного множества  $N$  атомов мы снова имеем те же начальные и граничные условия, и рассмотрим распределение этих  $N$  точек в фазовом пространстве в соответствующий момент времени. Так как начальные и граничные условия являются условиями макроскопическими и относятся только к средним положениям атомов, то второе множество точек не будет в точности совпадать точка в точку с первым множеством. Однако средняя плотность точек будет более или менее одинакова в обоих случаях.

Предположим, что мы проделали тот же самый опыт не дважды, а много раз, отправляясь от  $N$  атомов, подчиненных условиям, тождественным друг другу с макроскопической точки зрения. Тогда можно получить *плотность вероятности*  $f(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  для каждой точки фазового пространства, так что величина  $\int dx dy dz dp_x dp_y dp_z$  указывает, для какой части из общего числа опытов какая-нибудь из рассматриваемых точек находится в момент  $t$  внутри элемента  $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$  фазового пространства в точке  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$ . Функция  $f$  называется *функцией распределения*. Если мы рационально поставим наш эксперимент, мы найдем, что  $f$  будет достаточно непрерывной функцией  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  и  $t$ ; можно ожидать, что она будет удовлетворять некоторому дифференциальному уравнению, которое будет служить звеном, связывающим микроскопические взаимодействия между атомами жидкости и макроскопические движения жидкости в целом.

Мы можем получить макроскопические свойства жидкости, рассмотренные в предыдущем параграфе, с помощью интегралов, содержащих функцию распределения. Обозначим элемент объема в фазовом пространстве через  $dV_x dV_p$ , где  $dV_x = dx dy dz$  и  $dV_p = dp_x dp_y dp_z$ ; иногда применяются сферические координаты  $r, \theta, \phi$  в обычном пространстве и  $p, \theta, \phi$  в пространстве импульсов; в этом случае соответствующие элементы объема принимают вид  $dV_x = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$  и  $dV_p = p^2 dp \sin \theta d\theta d\phi$ .

Прежде всего, интеграл от функции  $f$ , распространенный на всю часть пространства, лежащую внутри границ, будет как раз равен числу атомов жидкости

$$\iiint \iiint \iiint \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dV_x dV_p = N. \quad (2.4.5)$$

Среднее число частиц на единицу объема обычного пространства будет

равно интегралу от  $f$  по пространству импульсов; это число после умножения его на  $m$  — массу отдельной частицы — дает плотность

$$\rho(x, y, z, t) = m \iiint f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dV_p, \quad (2.4.6)$$

упомянутую в этом параграфе раньше. Полный средний импульс, отнесеный к единице объема, т. е. к одному кубическому сантиметру,

$$\mathbf{J}(x, y, z, t) = \iiint p f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dV_p, \quad (2.4.7)$$

является вектором  $\mathbf{J}$  потока массы, рассмотренным раньше. Полная кинетическая энергия жидкости равна

$$U = \frac{1}{2m} \iiint p^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dV_x dV_p. \quad (2.4.8)$$

Если пренебречь силами, действующими между атомами, она равна полной внутренней энергии газа и пропорциональна его температуре. Эти интегралы показывают, что  $f$  должно стремиться к 0 для возрастающих значений  $p$  настолько быстро, чтобы интеграл для  $U$  не был расходящимся.

Одно из дифференциальных свойств функции  $f$  имеет общую значимость и связано с уравнением неразрывности (2.4.1). Все частицы в данном элементе  $dV_p$  пространства импульсов перемещаются с одной и той же скоростью  $\mathbf{p}/m$ . Внутри элемента  $dV_x$  в точке  $\mathbf{r}(x, y, z)$  в момент  $t$  содержится  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dV_x dV_p$  таких частиц; в момент  $t + dt$  они будут находиться в точке  $\mathbf{r} + (\mathbf{p}/m) dt$ . Следовательно, плотность вероятности  $f$  в точке  $\mathbf{r}$  в момент  $t$  должна быть равна плотности в точке  $\mathbf{r} + (\mathbf{p}/m) dt$  в момент  $t + dt$  для частиц, имеющих импульс  $\mathbf{p}$ :

$$f\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m} dt, \mathbf{p}, t + dt\right) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t).$$

Разлагая левую часть в ряд и сохраняя только члены, содержащие первые степени  $dt$ , получим *уравнение неразрывности* для функции распределения

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = -\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \text{grad}[f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)], \quad (2.4.9)$$

где оператор градиента действует на  $f$ , как на функцию, зависящую только от  $x, y, z$ . Сопоставив это уравнение с уравнениями (2.4.6) и (2.4.7), непосредственно получаем обычную форму уравнения неразрывности (2.4.1). Оно может быть видоизменено благодаря влиянию иных факторов, что будет рассмотрено дальше.

**Давление и уравнение состояния.** Очень простой пример покажет, как можно использовать функцию распределения, чтобы связать сглаженное давление, рассмотренное в предыдущем параграфе, с движениями отдельных частиц. Рассмотрим сосуд, имеющий объем  $V$  и содержащий  $N$  атомов газа, равномерно распределенных внутри него; термином «равномерно распределенных» мы отмечаем, что  $f$  не зависит от  $\mathbf{r}$  внутри  $V$ . Чтобы газ остался равномерно распределенным,  $f$  не должно зависеть от  $t$  и  $\mathbf{J}$  должен всюду равняться нулю. Для удовлетворения всем этим требованиям проще всего предположить, что  $f = (N/4\pi V) \phi(p)$ , где  $\phi$  является функцией одной только величины  $p$  импульса частицы,

причем эта функция имеет следующие свойства:

$$\int_0^{\infty} \phi(p) p^2 dp = 1; \quad \frac{1}{2m} \int_0^{\infty} \phi(p) p^4 dp = \varepsilon. \quad (2.4.10)$$

Первый интеграл определяет произвольную постоянную, от которой зависит величина  $\phi$  (т. е. нормирует  $\phi$ ), так что  $\phi p^2 dp$  есть вероятность того, что частица газа имеет величину импульса, заключенную между  $p$  и  $p + dp$ . Величина  $\varepsilon$  является тогда средней кинетической энергией частицы.

Подставив это выражение  $f$  в интегралы, определяющие указанные величины, связанные с полем, получим

$$\rho = \frac{Nm}{V}; \quad \mathbf{J} = 0; \quad U = N\varepsilon.$$

Следует отметить, что предположение о том, что  $f$  равно  $(N/4\pi V)\phi(p)$ , налагает известные ограничения на природу стенок сосуда, ограничивающих объем  $V$ . Во-первых, эти стенки должны отталкивать обратно внутрь  $V$  каждую частицу, ударяющуюся о них, и не допускать утечки этих частиц; иначе  $N$  и  $f$  будут изменяться с течением времени. Во-вторых, при отражениях частиц от стенки должно сохраняться распределение импульсов, даваемое функцией  $\phi(p)$ ; так что образы частиц, только что отраженных от стенки сосуда, не должны отличаться, по крайней мере с точки зрения распределения скоростей, от образов неотраженных частиц. Это вовсе не значит, что каждая частица должна отбрасываться так же, как и в случае вполне упругих стенок; это значит только, что для каждой частицы, отраженной с уменьшенной энергией, существует частица, энергия которой после отражения возрастает. Иначе распределение  $f$  изменилось бы при приближении к границе и, следовательно,  $f$  не могла бы быть независимой от  $\mathbf{r}$ .

Предположим теперь, что эти несколько необычные требования выполнены, и изучим среднее поведение таких частиц, близких к некоторому участку граничной стенки. Предположим, что этот участок будет плоским, и расположим оси координат так, чтобы он лежал в плоскости  $yz$ , причем сторона, соответствующая отрицательным значениям  $x$ , обращена к газу, а сторона, соответствующая положительным значениям  $x$ , лежит внутри стенки. Рассматривая тогда функцию  $f$  при  $x=0$ , найдем, что все частицы, для которых  $p_x$  положительно, еще не ударялись о стенку, а все те, для которых это значение отрицательно, уже отразились от нее.

Мы теперь в состоянии поставить вопрос о том, какое свойство частиц газа вызывает постоянное давление на стенки сосуда. Очевидно, это — взаимодействие при отражении между стенкой и частицами газа, ударяющимися в эту стенку, то самое взаимодействие, которое отталкивает частицы обратно внутрь сосуда после удара. Так как действие равно противодействию, мы можем сказать, что сила, с которой газ действует на квадратный сантиметр поверхности, будет та же самая, что и сила, с которой квадратный сантиметр поверхности действует на ударяющиеся частицы, отбрасывая их назад внутрь газа. Так как сила равна скорости изменения импульса, эта реакция стенки равна среднему изменению импульсов всех частиц, ударяющихся в стенку в течение одной секунды. Число частиц, соответствующих элементу импульса  $dV_p$  для импульса  $p$ , которые ударяются о единичную площадку плоскости  $yz$  в течение секунды, равно  $v_x(N/4\pi V)\phi(p)dV_p =$

$= (N/4\pi V_m) \phi(p) p^3 dp \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$ , где для этих ударяющихся частиц  $0 < \theta < \pi/2$ . Полное среднее изменение импульса для каждой из этих частиц равно  $2p_x = 2p \cos \theta$ , так что сила, с которой квадратный сантиметр площадки действует на газ (и, следовательно, величина давления), нормальна к поверхности и имеет среднее значение

$$\frac{N}{4\pi V_m} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} 2p^4 \phi(p) dp = P = \frac{2N_e}{3V} = \frac{2}{3} \frac{U}{V}$$

[в силу формулы (2.4.10)]. Таким образом, получаем уравнение, связывающее давление  $P$ , объем  $V$  и внутреннюю кинетическую энергию  $U$ ,

$$PV = \frac{2}{3} U, \text{ или } P = \frac{2}{3} E\rho, \quad (2.4.11)$$

которое называется *уравнением состояния* газа. Величина  $E = U/Nm$  есть кинетическая энергия единицы массы газа, а  $\rho = Nm/V$  — средняя плотность газа.

Мы могли бы показать теперь, что при уменьшении объема такого сосуда с отражающими стенками (это соответствует *адиабатическому сжатию*, см. стр. 161)  $E$  изменяется пропорционально  $(\gamma - 1)$ -й степени плотности (здесь  $\gamma$  — постоянная для рассматриваемого газа, равная для воздуха 1,4) и что, таким образом, давление при адиабатическом сжатии пропорционально  $\gamma$ -й степени плотности  $\rho$ . Однако это не завело бы слишком далеко от нашей цели, и мы должны перейти к рассмотрению соотношения между внутренними силами, действующими в жидкости, и диффузионными свойствами жидкости.

**Средняя длина свободного пробега и эффективное сечение рассеяния.** Отдельные частицы (атомы, молекулы) газа удалены друг от друга достаточно далеко, так что большую часть времени они двигаются как свободные тела с постоянными импульсами. Только изредка сближаются они друг с другом настолько, что на движение их начинают влиять их взаимные силовые поля. Поэтому движение каждой частицы можно разбить на две части: *свободный полет*, когда на частицах не оказывается влияние других частиц, и кратковременная часть, в течение которой импульсы меняются благодаря мгновенному сближению с другой частицей, после чего частица снова возвращается к свободному полету; однако скорость ее отлична от первоначальной. Эти мгновенные встречи с другими частицами, в течение которых импульс каждой частицы существенно меняется, называются *столкновениями*. В случае прохождения нейтронов через твердое тело столкновение происходит между нейтроном и ядром одного из атомов твердого тела, но и при этом наши рассуждения остаются в силе.

Если достигнуто термодинамическое равновесие, то при этих столкновениях будет в среднем сохраняться энергия и, следовательно, столкновения можно считать упругими. Среднее количество изменений направления движения зависит от закона действия сил между частицей и «мишенью», которой может быть ядро атома в случае движения нейтронов или другой атом, подобный движущемуся, в случае газа. Простейшее предположение состоит в том, что закон действия силы аналогичен закону взаимодействия двух биллиардных шаров; сила равна нулю, если расстояние между центрами больше чем  $R$ , для расстояний же меньших чем  $R$  появляется значительная сила отталкивания; такое предположение близко к действительности в достаточно большом количестве случаев. Биллиардные шары, если они вообще сталкиваются,

отскакивают одинаково часто во всех направлениях, и аналогичное явление отмечается во многих реальных случаях, особенно когда относительные скорости не очень велики. Если масса «мишени» имеет тот же порядок величины, что и масса ударяющейся частицы, это равномерное распределение углов рассеяния при столкновении имеет место относительно системы координат, движущейся вместе с центром тяжести сталкивающейся пары, благодаря чему исследование становится несколько сложным.

Чтобы избежать трудностей, мы сначала изучим случаи, в которых мишень значительно более массивна, чем ударяющаяся частица, что, например, имеет место, когда частицами являются нейтроны, а мишениями — тяжелые ядра или частицами служат фотоны, а мишениями — частицы пыли в воздухе. В этих случаях мы будем считать, что мишени были и остаются неподвижными и что  $n_t$  из них случайным образом распределены внутри каждого кубического сантиметра. Каждую мишень можно представить себе как упругий шар радиуса  $R$ , а частицы — как материальные точки. Здесь мы можем пренебречь столкновениями между частицами и сосредоточить свое внимание на столкновениях между частицами и мишениями.

Первый вопрос, на который следует ответить, касается относительной частоты столкновений между частицами и расположенным случайным образом мишениями. Вероятность того, что столкновение происходит после того, как частица прошла расстояние  $x$ , но раньше, чем она прошла расстояние  $x+dx$ , пропорциональна числу, показывающему, какая часть площади тонкого пространственного слоя толщины  $dx$ , перпендикулярного к пути частицы, заполнена мишениями. Площадь *эффективного поперечного сечения* мишени равна  $Q_e = \pi R^2$ ; число мишеней, лежащих внутри слоя толщины  $dx$ , в основании которой лежит единичная площадка, равно  $n_t dx$ . Часть единичной площадки, прегражденная мишениями, выражается поэтому числом  $\pi R^2 n_t dx = Q_e n_t dx$ , и вероятность столкновения на участке пути подвижной частицы от  $x$  до  $x+dx$  равна этой величине, умноженной на вероятность  $P(x)$  того, что частица прошла расстояние  $x$  без столкновений. Таким образом, получаем дифференциальное уравнение для  $P(x)$

$$\frac{d}{dx} P(x) = -Q_e n_t P(x), \text{ или } P(x) = e^{-Q_e n_t x}; \quad (2.4.12)$$

здесь мы приняли (вполне обоснованно), что вероятность  $P(0)$  прохождения по крайней мере нулевого расстояния от момента последнего столкновения до ближайшего равна единице (это достоверный факт).

Таким образом, мы получили выражение вероятности того, что свободный пробег между двумя столкновениями имеет длину  $x$ , выразив эту вероятность через плотность  $n_t$  мишеней и площадь их *эффективного сечения*  $Q_e$  для столкновений между частицами и атомами-мишениями. Подробный подсчет силового поля между частицей и мишенью нужен, таким образом, только для определения значения  $Q_e$ , когда оно встречается при вычислении средних длин свободного пробега между столкновениями.

Средняя длина пути между столкновениями равна

$$\lambda = \int_0^\infty P(x) dx = \frac{1}{Q_e n_t}, \quad (2.4.13)$$

где длина  $\lambda$  называется *средним свободным пробегом* частицы среди множества мишеней.

В случае обыкновенного газа средний свободный пробег частицы является пробегом между столкновениями с другими подобными частицами, так как здесь мишенью являются также молекулы газа. В случае более плотной среды, например такой, как жидкость, средний свободный пробег имеет приблизительно ту же величину, что и среднее расстояние  $R$  между частицами; поэтому здесь частица никогда не будет долго свободна от влияния соседних частиц; но даже и здесь выражение для вероятности  $P(x)$  сохраняет силу. Можно сказать, что частицы жидкости соприкасаются с атомами того вещества (атомами-мишенью), через которое просачиваются, в среднем только после прохождения расстояния, равного среднему свободному пробегу.

Возможность столкновений оставляет нам другой путь, при котором функция распределения изменяется от точки к точке и с течением времени. Например, частицы из элемента импульсов  $dV_p$  с импульсом  $p$  в течение промежутка времени  $dt$  проходят расстояние  $dx = (p/m) dt$  и часть их, выражаемая числом  $(Q_e n_t p/m) dt$ , испытывает столкновения. Те, которые испытывают столкновения, изменяют направления своих импульсов и, следовательно, исчезают из элемента импульсов  $dV_p$ . Поэтому имеется скорость убывания функции  $f$ , происходящая из столкновений и определяющаяся равенством

$$df(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = -\frac{Q_e n_t p}{m} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dt. \quad (2.4.14)$$

Но здесь имеет место также и возрастание функции  $f$ , вызванное столкновениями, так как существуют также частицы, первоначально находившиеся в других элементах импульсов, которые после столкновений отбрасываются *внутрь*  $dV_p$ . Предположив (как мы это и делали

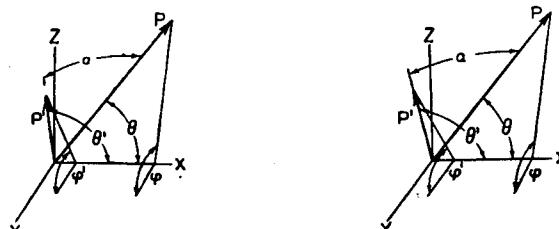


Рис. 2.18. Импульсы и углы диффундирующей частицы до и после столкновения с атомом-мишенью среды

до сих пор), что частицы рассеиваются во всех направлениях с одинаковыми вероятностями и что не происходит изменения скорости частиц при рассеянии любой группы частиц, подвергшихся столкновению, мы найдем, что часть всех частиц, выражаемая числом  $d\omega/4\pi$ , будет рассеиваться в направлениях движения, лежащих внутри телесного угла  $d\omega$ . Рассматривая рис. 2.18, мы видим, что если в элементе импульсов  $dV'_p = d\phi' \sin \theta' d\theta' (p')^2 dp'$  находилось  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) dV'_p$  частиц, то в элемент импульсов  $dV_p = d\phi \sin \theta d\theta p^2 dp$  за время  $dt$  попадут  $(Q_e n_t p / 4\pi m) \times \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) dV'_p d\phi' \sin \theta' d\theta' dt$  частиц ( $p$  равно  $p'$ , как мы предполагали до сих пор). Полное возрастание  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , вызванное рассеянием частиц в последний элемент импульсов, равно интегралу от этого количества, распространенному на все начальные направления движения, определенные углами  $\theta'$  и  $\phi'$ ,

$$df(r, \vartheta, \varphi, p, \theta, \phi, t) = \frac{Q_e n_t p}{4\pi m} \int \int f(r, \vartheta, \varphi, p, \theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' dt. \quad (2.4.15)$$

**Диффузия света, интегральное уравнение.** Простой, но поучительный пример применения этих уравнений относится к распространению света через пластинку матового стекла (или слой тумана); освещенность предполагается одинаковой во всех точках поверхности пластиинки (например, плоскости  $yz$ ), так что  $f$  не зависит от  $y$  и  $z$  и является функцией только  $x$ . Этот пример впервые изучал Милн в связи с потоком света в атмосфере звезд; он называется *проблемой Милна*. «Частицами» являются фотоны, имеющие одинаковые импульсы; в силу симметрии функция  $f$  зависит от угла  $\theta$  междуектором  $r$  и осью  $x$  и не зависит от  $\phi$ . Поэтому  $f$  можно записать, как  $f(x, \theta, t)$ . Если достигнуто устойчивое состояние, то скорости изменения  $f$ , как данные в (2.4.9) и вызванные зависимостью  $f$  от  $x$ , так и данные в (2.4.14) и (2.4.15) и обусловленные столкновениями, взаимно уничтожаются и получающееся уравнение для  $f$  имеет вид

$$\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} f(x, \theta) = -n_t Q_t f(x, \theta) + \frac{1}{2} n_t Q_e \int_0^\pi f(x, \theta') \sin \theta' d\theta'$$

(мы сократили уравнение на общий множитель  $p/m$ ). Решение этого интегро-дифференциального уравнения позволит нам определить любые требуемые свойства диффундирующего света. Мы здесь учли как возможность поглощения фотонов рассеивающей средой (частицами тумана или какой-либо другой средой), так и возможность рассеяния. Поэтому  $Q_t$  есть сумма эффективного сечения рассеяния  $Q_e$  и эффективного сечения поглощения  $Q_a$ . Само собой разумеется, что  $Q_a$  не входит в член, содержащий интеграл, так как этот член соответствует фотонам, отброшенным после столкновения в направлении, определяемом углом  $\theta$ , а поглощенные фотоны столкновений не испытывают.

Если мы за единицу измерения расстояний примем средний свободный пробег, то  $x = \xi/n_t Q_t = \lambda \xi$  и наше уравнение примет вид

$$\cos \theta \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \theta) = -f(\xi, \theta) + \frac{1}{2} \pi \int_0^\pi f(\xi, \theta') \sin \theta' d\theta'. \quad (2.4.16)$$

где  $\kappa = Q_e/Q_t$  — отношение эффективного сечения рассеяния к полному. Член, стоящий в левой части уравнения, представляет зависимость  $f$  от движения частицы. Первый член правой части дает изменение  $f$ , вызванное поглощением и рассеянием; второй член правой части выражает изменение  $f$ , вызванное отражениями в первоначальное направление.

Изменяя нормировку  $f$ , мы можем добиться того, чтобы

$$c \int_0^\pi \cos \theta f(\xi, \theta) \sin \theta d\theta = J(\xi), \quad (2.4.17)$$

где правая часть есть средний поток световой энергии через единичную площадку за секунду в направлении положительной оси  $x$  в точке  $\xi$ . Постоянная  $c$  есть скорость света. Тогда интеграл

$$\int_0^\pi f(\xi, \theta) \sin \theta d\theta = \rho(\xi) \quad (2.4.18)$$

равен средней плотности световой энергии в точке  $\xi$ .

Предположим теперь, что пластиинка рассеивающего материала ограничена плоскостями  $x=0$  и  $x=x_0$  и что поток  $I(\theta)$  падает на поверх-

ность  $x=0$ , как показано на рис. 2.19. Функция  $I$  может меняться произвольным образом с изменением  $\theta$  в пределах от 0 до  $\pi/2$ , но она должна быть равна нулю при  $(\pi/2) \leq \theta \leq \pi$ , так как эти границы для  $\theta$  соответствуют потоку из пластиинки и не могут соответствовать падающему потоку. Это распределение потока, проникающего внутрь пластиинки, постепенно изменяется, по мере того как составляющие его фотонны ударяются о мишени и поглощаются или рассеиваются. Часть потока,

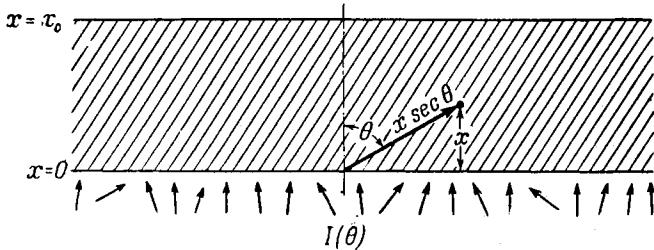


Рис. 2.19. Диффузия света в пластиинке из рассеивающего материала.

Задана интенсивность падающего света  $I(\theta)$

образующая с осью  $x$  угол  $\theta$ , при проникновении на расстояние  $x = \lambda \xi$  внутрь пластиинки проходит внутри ее вещества  $\xi \sec \theta$  средних свободных пробегов и в силу уравнения (2.4.12) сохраняется только  $e^{-\xi \sec \theta}$  ее первоначальной величины. Поэтому одна часть  $f(\xi, \theta)$  имеет выражение  $I(\theta) e^{-\xi \sec \theta}$ .

Другая часть соответствует фотонам, отразившимся по крайней мере один раз. Число фотонов, отраженных на расстоянии  $\xi'$  свободных пробегов от передней границы пластиинки, будет пропорционально плотности  $\rho(\xi')$ , определенной формулой (2.4.18), а число таких фотонов, достигших глубины  $\xi$  под углом  $\theta$ , будет пропорционально величине  $\rho(\xi') e^{-|\xi - \xi'| \sec \theta}$ , где  $\xi'$  меньше  $\xi$ , если  $\theta$  меньше  $\pi/2$ , и больше  $\xi$  при  $\theta$  большем чем  $\pi/2$  (рассеяние назад). Следовательно, есть основание ожидать, что решение уравнения (2.4.16), определяющее функцию распределения, имеет следующую общую форму:

$$f(\xi, \theta) = \begin{cases} I(\theta) e^{-\xi \sec \theta} + \frac{1}{2} \times \sec \theta \int_0^\xi e^{(\xi' - \xi) \sec \theta} \rho(\xi') d\xi', & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2} \times \sec \theta \int_{\xi'}^\xi e^{(\xi' - \xi) \sec \theta} \rho(\xi') d\xi', & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (2.4.19)$$

Это, конечно, еще не будет решением задачи, так как мы еще не вычислили плотности  $\rho$ . Однако  $\rho$  является более простой функцией, чем  $f$ , так как оно зависит только от  $\xi$  и не зависит от  $\theta$ .

Для того чтобы показать, что (2.4.19) правильно определяет вид функции  $f$ , преобразуем (2.4.16) следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \theta) + \sec \theta f(\xi, \theta) = \frac{1}{2} \times \rho(\xi) \sec \theta.$$

Предполагая, что  $\rho$  известно, мы найдем, что решение этого линейного неоднородного уравнения, подчиненное условию  $f(0, \theta) = I(\theta)$ , совпадает в точности с (2.4.19) (мы, конечно, учитываем различие между значениями  $\theta$ , меньшими  $\pi/2$ , и значениями  $\theta$ , большими  $\pi/2$ ). Чтобы найти уравнение для определения  $\rho$ , умножим уравнение (2.4.19) на  $\sin \theta d\theta$  и проинтегри-

руем его по  $\theta$

$$\rho(\xi) = \rho_0(\xi) + \frac{1}{2} \times \int_0^{\xi_0} E_1(|\xi - \xi'|) \rho(\xi') d\xi', \quad (2.4.20)$$

$$\rho_0(\xi) = \int_0^{\pi/2} e^{-\xi \sec \theta} I(0) \sin \theta d\theta,$$

$$E_1(|\xi - \xi'|) = \int_1^{\infty} e^{-|\xi - \xi'| y} \frac{dy}{y}, \quad y = \sec \theta.$$

Это интегральное уравнение стандартного типа, который будет подробно исследован дальше. Если  $\xi_0$  равно бесконечности, уравнение называется уравнением *типа Винера — Хонфа*. Уравнение устанавливает, что значение  $\rho$  в точке  $\xi$  зависит от значений  $\rho$  внутри интервала, равного среднему свободному пробегу, заключающего точку  $\xi$ .

**Диффузия света, дифференциальное уравнение.** Мы переходим теперь к выводу дифференциального уравнения для  $\rho$  и  $J$ , которое связано с уравнением диффузии, так что дальнейшее рассмотрение интегрального уравнения откладывается. Хотя, как оказывается, интегральное уравнение является точным, а дифференциальное — только приближенным, дифференциальное уравнение решается настолько проще, что целесообразно пользоваться его решениями, если только они пригодны.

Дифференциальное уравнение типа уравнения диффузии дает хорошее приближение всегда, когда относительное изменение  $\rho$  или  $J$  невелико на протяжении среднего свободного пробега. Это возможно, пока эффективное сечение поглощения  $Q_a$  мало сравнительно с эффективным сечением упругого рассеяния  $Q_e$  и пока не требуется слишком много подробностей относительно поведения  $\rho$  и  $J$  на расстоянии одного свободного пробега от границы, так как в этом случае функция распределения  $f$  почти не зависит от угла  $\theta$ , определяющего направление импульса, и регулирующий поток  $J$  значительно меньше, чем среднее квадратичные величины  $\rho$ .

Утверждение, что поток  $J$  мал, равносильно тому, что функция распределения может быть приближенно выражена так:

$$f(\xi, \theta) \approx \frac{1}{2} \rho(\xi) + \frac{3}{2} \cos \theta \frac{J(\xi)}{c}, \quad (2.4.21)$$

если только  $J/c$  значительно меньше, чем  $\rho$ . Согласно уравнениям (2.4.17) и (2.4.18), поток и плотность как раз равны величинам  $J$  и  $\rho$  в этом выражении. Это простейшая функция от  $\theta$ , для которой значения  $\rho$  и  $J$  могут быть независимыми.

Предположим, что мы составили уравнение, эквивалентное уравнению (2.4.16), содержащее, однако, производную по времени. За единицу времени примем среднее время свободного пробега для фотонов  $\lambda/c$ . В силу уравнений (2.4.9), (2.4.14) и (2.4.15) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} f(\xi, \theta, \tau) = & -\cos \theta \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \theta, \tau) - \frac{1}{2} \alpha p(\xi, \tau) + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [f(\xi, \theta', \tau) - f(\xi, \theta, \tau)] \sin \theta' d\theta', \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

где  $\xi = (n_t Q_t x)$ ,  $\tau = (n_t Q_t c t)$ ,  $p/m = c$ ,  $\alpha = Q_a/Q_t = 1 - \kappa$ . Подставляя сюда вместо  $f$  его приближенное выражение через  $\rho$  и  $J$  (2.4.21), получаем

довольно сложное интегро-дифференциальное уравнение. Однако последний член, содержащий интеграл по  $\theta'$ , может быть упрощен. В выражении  $[f(\xi, \theta', \tau) - f(\xi, \theta, \tau)]$  члены, содержащие  $\rho$ , взаимно уничтожаются и квадратная скобка превращается в  $\frac{3}{2} [\cos \theta' - \cos \theta] \cdot (1/c) J(\xi, \tau)$ ; интегрируя это, получим  $-(3/c) J(\xi, \tau) \cos \theta$ .

Полученное уравнение можно разделить на два уравнения, если умножить его на  $\sin \theta d\theta$  и проинтегрировать и, кроме того, умножить на  $\cos \theta \sin \theta d\theta$  и проинтегрировать. Эти интегрирования устраниют зависимость от  $\theta$  и приводят к двум уравнениям, связывающим  $\rho$  и  $J$ . Первое из них

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \approx -\frac{1}{c} \frac{\partial J}{\partial \xi} - \alpha \rho \quad (2.4.23)$$

является как раз уравнением неразрывности (2.4.1) для данного случая, выраженным в безразмерных переменных  $\tau$  и  $\xi$  и учитывающим потерю фотонов, вызванную поглощением (член  $\alpha \rho$ ). Если, кроме того, за среднее время свободного пробега в кубе, ребро которого равно среднему свободному пробегу, добавляются  $q$  фотонов, то величина  $q$  должна быть добавлена к правой части уравнения.

Второе уравнение

$$\frac{1}{c} \left[ \frac{\partial J}{\partial \tau} + J \right] \approx -\frac{1}{3} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}$$

связано с уравнением диффузии, содержащим градиент (2.4.3). Оно имеет дополнительный член  $\partial J / \partial \tau$ , дающий скорость изменения величины  $J$  за среднее время свободного пробега. Так как при диффузии происходят довольно медленные изменения, этот член незначителен по сравнению с  $J$ , так что со степенью точности, принятой здесь, второе уравнение имеет вид

$$J \approx -\frac{c}{3} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}. \quad (2.4.24)$$

Таким образом, при диффузии фотонов градиент плотности фотонов вызывает медленный поток в сторону более низкой плотности.

Комбинируя уравнения (2.4.23) и (2.4.24), получаем уравнение диффузии для плотности фотонов

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \approx \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} - \alpha \rho + q. \quad (2.4.25)$$

Постоянная диффузии при наших единицах длины и времени равна точно  $\sqrt{1/3}$  [см. уравнение (2.4.4)]. Если где-либо функция источника  $q$  велика, там  $\rho$  стремится быстро возрастать; если где-либо плотность сильно сконцентрирована ( $\partial^2 \rho / \partial \xi^2$  численно велико, но отрицательно), там  $\rho$  стремится быстро убывать. Так как сюда входит только первая производная по  $\tau$ , то решение не будет обратимым относительно времени, как это было бы для волнового уравнения.

Функция распределения с той же точностью выражается следующим равенством:

$$f(\xi, \theta) \approx \frac{1}{2} \rho(\xi) - \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \cos \theta \quad (2.4.26)$$

через решение уравнения (2.4.25). Это выражение пригодно, если только  $\partial \rho / \partial \xi$  мало по сравнению с  $\rho$ .

Для типичного решения уравнения (2.4.25) мы можем вернуться к решению, соответствующему установившемуся состоянию, в случае

пластинки из рассеивающего материала. Предположим, что поток, падающий на поверхность  $x=0$ , имеет интенсивность  $I$  и полностью направлен в положительную сторону оси  $x$ , т. е.  $I(\theta) = I\delta$ , где  $\delta = \delta(1 - \cos \theta)$  есть дельта-функция, рассмотренная на стр. 122. Мы также предполагаем, что пластина имеет бесконечную толщину ( $x_0 = \infty$ ). Та часть падающих фотонов, которая внутри пластины еще не сталкивалась с рассеивающими мишениями, очевидно, не может быть представлена приближенной формулой (2.4.26); однако мы можем эту часть рассмотреть отдельно [обозначим ее через  $f_i = (I/c)e^{-\xi\delta}$ ] и считать, что уравнение (2.4.25) применяется только к тем фотонам, которые испытывали по крайней мере одно столкновение. Для этой части решения падающие электроны появляются внутри пластины в точке, где они испытывают свое первое столкновение, как если бы внутри вещества был распределен источник мощности  $q = (1 - \alpha)Ie^{-\xi}/c$  (множитель  $1 - \alpha = \kappa$  появляется потому, что только отраженные, но не поглощенные электроны участвуют в диффузии). Диффузионная часть плотности  $\rho_d$  поэтому является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \rho_d}{\partial \xi^2} - 3\alpha \rho_d \approx -\frac{3}{c}(1 - \alpha)Ie^{-\xi},$$

которое получается из (2.4.25) в результате подстановки вместо  $q$  его величины и приравнивания производной по времени нулю (так как состояние установившееся).

Решение этого уравнения имеет вид

$$\rho_d \approx \frac{3I}{c} \frac{1-\alpha}{1-3\alpha} \left[ e^{-\sqrt{3\alpha}\xi} + (1-\sqrt{3\alpha})\Delta - e^{-\xi} \right], \quad (2.4.27)$$

где постоянная  $\Delta$  выбирается так, чтобы удовлетворить граничному условию при  $\xi = 0$ .

Так как  $\alpha$  — отношение поглощения к рассеянию при столкновениях — предполагается малым, то первая экспонента при возрастании  $\xi$  убывает медленнее второй; на значительном расстоянии внутри пластины плотность пропорциональна величине  $e^{-\sqrt{3\alpha}\xi}$ . Иначе говоря, глубина проникновения внутрь пластины зависит только от относительной частоты поглощения фотонов. Полная функция распределения имеет вид

$$f(\xi, \theta) \approx f_i + \frac{3I}{2c} \frac{1-\alpha}{1-3\alpha} \left\{ [1 + \sqrt{3\alpha} \cos \theta] e^{-\sqrt{3\alpha}\xi} + (1 - \sqrt{3\alpha})\Delta - (1 + \cos \theta) e^{-\xi} \right\}. \quad (2.4.28)$$

В интервале среднего свободного пробега от границы  $\xi = 0$  часть функции распределения, соответствующая диффузии, с точностью до первых степеней малых величин  $\xi$ ,  $\Delta$  и  $\alpha$  становится равной

$$\frac{3I}{2c} \cdot \frac{1-\alpha}{1+\sqrt{3\alpha}} [(\xi + \Delta) - (1 - \xi) \cos \theta]$$

и соответствующая часть плотности становится равной  $(3I/c) \times [(1 - \alpha)/(1 + \sqrt{3\alpha})](\xi + \Delta)$ . Из этих разложений видно, что любое решение уравнения (2.4.25) непригодно вблизи границы  $\xi = 0$ , если граничные условия требуют, чтобы  $\Delta$  было мало, так как в случае, когда  $\xi + \Delta$  невелико сравнительно с единицей, член, содержащий  $\cos \theta$ , не будет больше мал сравнительно с членом, не содержащим  $\theta$ , и то приближение, на котором был основан вывод уравнения (2.4.25), больше не имеет места.

**Граничные условия.** Для того чтобы видеть, какое значение должно иметь  $\Delta$  и какой вид примут  $f$  и  $\rho$  вблизи границы, мы должны вернуться

к точному уравнению для  $f$  и к интегральному уравнению (2.4.20) для  $\rho$ , так как равенства (2.4.26) и (2.4.28) для  $f$ , очевидно, неточны на граничной поверхности  $\xi = 0$ , где слева нет рассеивающего вещества. В этой точке единственной частью функции распределения при значениях  $\theta$ , меньших чем  $\pi/2$  (соответствующей фотонам, входящим в вещество из внешнего пространства), должен быть падающий поток. Диффузационная часть функции распределения должна быть для значений  $\theta$ , лежащих между нулем и  $\pi/2$ , равна нулю. Выражение (2.4.26), конечно, не может удовлетворить этому требованию, какие бы значения ни имели  $\rho$  и  $\partial\rho/\partial\xi$ . Можно только удовлетворить требованию в среднем, если положить среднее значение функции  $f(0, \theta) \cos \theta$  в промежутке  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , равным нулю. Это требование приводит к приближенным граничным условиям [см. также равенство (2.4.34)]

$$\int_0^{\pi/2} \rho \cos \theta \sin \theta d\theta - \int_0^{\pi/2} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 0 \text{ или}$$

$$\rho \approx \Delta \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \text{ при } \xi = 0, \quad \Delta \approx \frac{2}{3}; \quad (2.4.29)$$

это означает, что постоянную  $\Delta$ , входящую в уравнения (2.4.27) и (2.4.28), нужно считать равной  $2/3$ , чтобы удовлетворялись граничные условия,

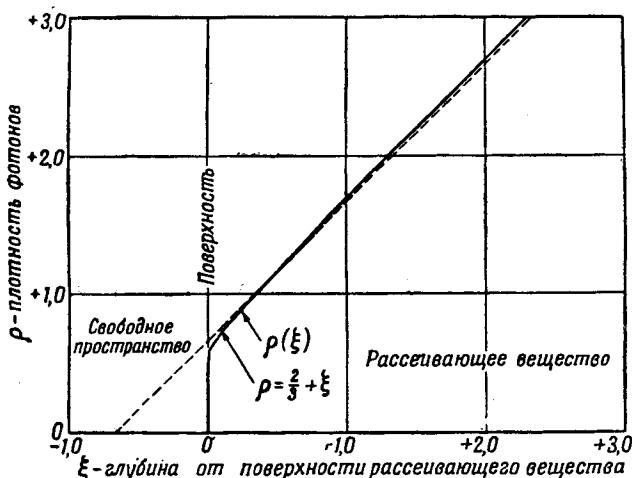


Рис. 2.20. Плотность диффундирующих частиц вблизи поверхности раздела.

Сплошной линией показано точное решение, пунктирной — приближенное, полученное из уравнения диффузии.

насколько это возможно при данной аппроксимации. Даже эта формула не будет слишком точной, так как  $\partial\rho/\partial\xi$  вблизи точки  $\xi = 0$  наверняка не будет малым по сравнению с  $\rho$ ; таким образом, любое использование уравнения диффузии для подсчета  $\rho$  вблизи границы является весьма сомнительным делом.

Только наше возвращение к интегральному уравнению (2.4.20) позволяет нам выяснить законность этих приближений. К сожалению, мы еще не в состоянии довести до конца решение уравнения (2.4.20), так что мы здесь только сошлемся на результаты; приемы решения интегральных уравнений этого типа будут рассмотрены в гл. 8 и 12.

Все это станет более ясным, если мы сравним результаты для более простого случая звездных атмосфер, рассмотренного Милном. Здесь

Фотоны возникают значительно ниже поверхности слоя, диффундируют вверх через внешние рассеивающие слои и излучаются через поверхность во внешнее пространство. Толщина этих верхних слоев во много раз преосходит средний свободный пробег, так что мы снова можем предположить, что  $x_0$  весьма велико. Однако при этом здесь нет потока, падающего сверху на внешнюю сторону поверхности  $x=0$ , так что интегральное уравнение имеет вид

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty E_1(|\xi - \xi'|) \rho(\xi') d\xi'; \quad (2.4.30)$$

это уравнение называется *уравнением Милна*. Функция  $E_1$  определена формулой (2.4.20). Для простоты мы здесь предположили, что  $\alpha \rightarrow 1$ , иными словами, что поглощения в веществе нет, а имеется только рассеяние.

Решение приближенного уравнения диффузии (2.4.25) в предположении, что  $\alpha$  и  $q$  равны нулю, удовлетворяющее граничным условиям (2.4.29), имеет вид

$$\rho \approx A(\xi + \Delta), \quad \Delta \approx \frac{2}{3}. \quad (2.4.31)$$

Для функции распределения по углам потока, излучаемого поверхностью во внешнее пространство, получаем приближенное выражение

$$f \approx \Delta - \cos \theta, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \quad (2.4.32)$$

Решение интегрального уравнения (2.4.30) приводит к следующему выражению для функции плотности:

$$\begin{aligned} \rho \approx A \{ \xi + 0,7104 [1 - 0,3429 E_2(\xi) + \\ + 0,3159 E_3(\xi)] \}; \\ E_n(z) = \int_1^\infty u^{-n} e^{-uz} du, \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

погрешность которого не превосходит 0,3% на всем промежутке изменения  $\xi$ . Так как и  $E_2$ , и  $E_3$  быстро стремятся к нулю при возрастании  $\xi$ , мы видим, что при  $\xi$ , превышающем 1 (глубже, чем один свободный пробег под поверхностью), приближенное решение, данное в (2.4.31), вполне пригодно; только  $\Delta$  должно быть равно 0,7104 вместо 2/3. На расстоянии от поверхности, меньшем чем средний свободный пробег, действительная плотность падает ниже приближенного решения на некоторую величину, как показывает рис. 2.20.

Точное решение для углового распределения потока, исходящего от поверхности, имеет выражение слишком сложное для того, чтобы его стоило выписать здесь. Оно изображено на рис. 2.21 и сравнивается здесь с распределением, полученным по приближенной формуле (2.4.32). Соответствие, как видим, не слишком плохое.

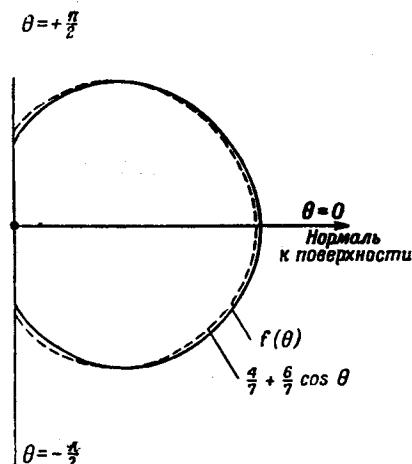


Рис. 2.21. Полярная диаграмма интенсивности частиц, испускаемых с поверхности рассеивающей среды при различных углах испускания  $\theta$ .

Сплошной линией показано точное решение, пунктирной — приближенное, получченное из уравнения диффузии.

Во всяком случае, мы видим, что решение уравнения диффузии дает лучшее приближение к точному решению, чем мы были вправе ожидать, если мы потребуем, чтобы оно удовлетворяло следующим граничным условиям на каждой свободной границе:

$$\text{плотность на поверхности} \approx 0,7104 \text{ значения производной от плотности по внутренней нормали к поверхности} \quad (2.4.34)$$

Здесь при дифференцировании расстояние измеряется в средних свободных пробегах. Только во внешней части рассеивающего вещества на расстоянии меньшем, чем величина свободного пробега от поверхности, действительная плотность значительно отличается от вычисленной на основе этих соглашений. Внутри вещества решение уравнения диффузии, удовлетворяющее этому граничному условию, дает вполне хорошие результаты, и даже угловое распределение излучения, идущего от поверхности, достаточно хорошо изображается с помощью приближенной формулы (2.4.32).

Интересно отметить, что многие полезные расчеты, относящиеся к диффузии нейтронов через твердые тела, могут быть также проведены с помощью уравнения диффузии и граничных условий (2.4.34).

**Влияние неизотропного рассеяния.** Рассмотрим теперь случай, когда диффундирующие частицы рассеиваются не во всех направлениях равномерно; временно предположим, однако, что в процессе рассеяния энергия не теряется. Вероятность того что частица отскакивает внутрь элемента телесного угла  $d\omega$ , вместо того чтобы не зависеть от угла и быть равной  $(Q_e/4\pi)d\omega$ , теперь будет иметь выражение  $\sigma(\alpha)d\omega$ , где  $\alpha$  — угол рассеяния внутрь элемента телесного угла  $d\omega$ . Как показано на рис. 2.18, частица вначале имела импульс  $p'$ , а после столкновения имеет импульс  $p$ . Соотношение между  $\sigma$  и эффективным сечением для упругого рассеяния имеет вид

$$Q_e = \int_0^{2\pi} d\Omega \int_0^\pi \sigma(\alpha) \sin \alpha d\alpha; \quad d\omega = \sin \alpha d\alpha d\Omega. \quad (2.4.35)$$

Существует также связанное с  $Q_e$  эффективное сечение  $Q_m$ , называемое эффективным сечением передачи импульса, которое выражается через  $\sigma$  с помощью интеграла

$$Q_m = \int_0^{2\pi} d\Omega \int_0^\pi \sigma(\alpha) (1 - \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha. \quad (2.4.36)$$

Если рассеяние одинаково во всех направлениях (т. е. если  $\sigma$  постоянная), то  $Q_m = Q_e$ . Если больше частиц отскакивают назад ( $\alpha > 90^\circ$ ), чем вперед ( $\alpha < 90^\circ$ ), то  $Q_m$  больше, чем  $Q_e$ ; в противоположном случае — наоборот. Обе величины  $Q_m$  и  $Q_e$ , а также  $Q_a$  — эффективное сечение поглощения частиц зависят от импульса налетающей частицы.

Мы по-прежнему предполагаем, что величина импульса частицы не изменяется при столкновении и что внешние силы не действуют на частицы. Мы допустим, что в каждой точке пространства направление потока  $J$  совпадает с направлением градиента функции распределения  $f$ . Это предположение до некоторой степени предопределяет решение, но это несущественно, так как можно доказать, что это предположение на самом деле осуществляется. Однако сделать предположение, а потом убедиться в его справедливости настолько облегчает дело, что мы, может быть, можем извинить на этот раз подобную перестановку в рассуждениях. Вместе с требованием о том, чтобы часть  $f$ , зависящая от угла,

была очень мала (что необходимо для того, чтобы уравнение диффузии имело силу), все это соответствует предположению, что [см. (2.4.21)]

$$f(\mathbf{r}, p, t) \approx \frac{1}{4\pi m} \rho(\mathbf{r}, p, t) + \frac{3}{4\pi p^2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, p, t), \quad (2.4.37)$$

где  $\rho$  и  $\mathbf{J}$  определены уравнениями (2.4.6) и (2.4.7) и направление  $\mathbf{J}$  совпадает с направлением  $\text{grad } \rho$ , который на рис. 2.18 направлен вдоль полярной оси (так что  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{J} = p J \cos \theta$ ). Отметим, что  $\rho$  и  $\mathbf{J}$  все еще есть функциями величины импульса  $p$ , поэтому они являются плотностью и потоком частиц данной скорости. Чтобы получить средние величины, рассмотренные на стр. 172, мы проводим осреднение по импульсам

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty p^2 \rho(\mathbf{r}, p, t) dp, \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty p^2 \mathbf{J}(\mathbf{r}, p, t) dp;$$

мы можем также определить и другие средние значения

$$p_{\text{ср.}} = \int_0^\infty p^3 \rho(\mathbf{r}, p, t) dp, \quad E_{\text{ср.}} = \frac{1}{2m} \int_0^\infty p^4 \rho(\mathbf{r}, p, t) dp. \quad (2.4.38)$$

Скорость изменения функции  $f$ , обусловленная свойствами неразрывности, дается по-прежнему уравнением (2.4.9). Скорость убывания  $f$ , вызванная поглощением, равна  $(n_t Q_a p / m) f$ . Скорость изменения  $f$  вследствие упругого рассеяния на основании уравнений (2.4.14) и (2.4.15) равна

$$-\frac{3n_t J}{4\pi m} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi \sigma(\omega) [\cos \theta - \cos \theta'] \sin \theta' d\theta'.$$

Здесь мы выбрали за направление  $J$  направление полярной оси, показанной на рис. 2.18. Однако лучше полярную ось направить вдоль окончательного импульса; в этом случае  $\cos \theta'$  надо заменить на  $\cos \theta \cos \alpha + \sin \alpha \cos (\beta - \phi)$ , где  $\theta$  и  $\phi$  постоянны, а  $\alpha$  и  $\beta$  — углы рассеяния, по которым выполняется интегрирование. Учитывая уравнение (2.4.36) и соответствующее видоизменение уравнения (2.4.22) ( $\sigma$  зависит от угла рассеяния  $\alpha$ , но не от угла  $\beta$  ориентации относительно полярной оси), мы окончательно получаем дифференциальное уравнение для  $\rho$  и  $\mathbf{J}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{3m}{p^2} \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \approx -\frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \text{grad } \rho - \frac{3}{p^2} \mathbf{p} \cdot \text{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{J}) - \frac{n_t}{m} Q_a p \rho - \frac{3}{p} n_t Q_a \mathbf{p} \cdot \mathbf{J} - \frac{3}{p} n_t Q_m \mathbf{p} \cdot \mathbf{J}. \quad (2.4.39)$$

**Приближение первого порядка. Уравнение диффузии.** Как мы отмечали при выводе уравнения (2.4.24), членом, содержащим  $\partial \mathbf{J} / \partial t$ , можно пренебречь, когда мы имеем дело со сравнительно малыми скоростями изменения  $\mathbf{J}$  при диффузии. Некоторые из оставшихся членов меняют знак при изменении направления  $\mathbf{p}$  на противоположное, другие члены при этом знака не меняют; все члены, содержащие  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{J}$  ( $\text{grad } \rho$  имеет то же направление, что и  $\mathbf{J}$ ), меняют знак, но член, содержащий  $\mathbf{p} \cdot \text{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})$ , знака не меняет, так же как и члены, содержащие  $\rho$ . Поэтому, в силу симметрии, мы можем разделить уравнение (2.4.39) на два уравнения, которые служат для выражения  $\rho$  и  $\mathbf{J}$  через  $\mathbf{r}(x, y, z)$ ,  $\mathbf{p}$  и  $t$ .

Первое из этих двух уравнений может быть записано так:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, p, t) \approx -\frac{p}{3n_t Q_m} \text{grad } \rho(\mathbf{r}, p, t), \quad Q = Q_m + Q_a, \quad (2.4.40)$$

что, конечно, подтверждает наше предположение о том, что направления  $\mathbf{J}$  и  $\text{grad } \rho$  одинаковы. Величина  $1/n_t Q$  является средним свободным пробегом частицы, когда учтены и поглощение и упругие столкновения. Отметим, что в этом более тщательном анализе эффективное сечение передачи импульса  $Q_m$  [см. (2.4.36)] играет большую роль, чем упругое эффективное сечение  $Q_e$ . Уравнение (2.4.40) тесно связано с уравнением (2.4.3) для средней диффузии. Величины  $Q$ ,  $\rho$  и  $\mathbf{J}$  в этом уравнении являются функциями величины импульса  $p$  (т. е. скорости частиц), и для приведения к (2.4.3) надо произвести осреднение по  $p$ . Поэтому для частиц, имеющих импульс  $p$ , постоянная диффузии пропорциональна корню квадратному из произведения  $p$  на средний свободный пробег. Уравнение, связывающее среднюю плотность и средний поток, имеет вид

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{3m} p_{\text{ср.}} \lambda_{\text{ср.}} \text{grad} [\rho(\mathbf{r}, t)], \quad \lambda_{\text{ср.}} = \frac{1}{p_{\text{ср.}}} \int_0^\infty \frac{p^3}{n_t Q} \rho(\mathbf{r}, p, t) dp,$$

что эквивалентно уравнению (2.4.3). Поэтому, как мы увидим ниже, величина  $\sqrt{p_{\text{ср.}} \lambda_{\text{ср.}} / 3m}$  равна постоянной диффузии для среднего распределения.

Рассмотрим теперь ту часть уравнения (2.4.39), члены которой не меняют знака при изменении направления  $\mathbf{p}$  на противоположное. Все эти члены, за исключением одного, не зависят от угла  $\theta$ , определяющего направление  $\mathbf{p}$ , однако член, содержащий  $\mathbf{p} \cdot \text{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})$  является функцией  $\theta$ . Это, конечно, указывает на то, что предположение, содержащееся в уравнении (2.4.37) относительно формы функции распределения  $f$ , было только приближенным. Можно приблизенно удовлетворить соотношению, если произвести осреднение по всем направлениям  $\mathbf{p}$ . Такой процесс осреднения не вносит изменения в члены вида  $m(\partial \rho / \partial t)$  или  $n_t Q_a p \rho$ , но такие члены, как  $\mathbf{p} \cdot \text{grad} \rho$ , будут иметь среднее значение, равное нулю. Единственный сложный член можно преобразовать, применяя уравнение (2.4.40) и проводя разложение по компонентам вектора  $\mathbf{p}$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{p^2} \mathbf{p} \cdot \text{grad} [\mathbf{p} \cdot \mathbf{J}] &= \frac{1}{pn_t Qm} \mathbf{p} \cdot \text{grad} [\mathbf{p} \cdot \text{grad} \rho] = \\ &= \frac{1}{pn_t Qm} \left\{ p_x \left[ p_x \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + p_y \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} + p_z \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial z} \right] + \right. \\ &\quad + p_y \left[ p_z \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} + p_y \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + p_z \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial z} \right] + \\ &\quad \left. + p_z \left[ p_x \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} + p_y \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial y} + p_z \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Если осреднить эти члены по всем направлениям вектора  $\mathbf{p}$ , то слагаемые, содержащие смешанные множители типа  $p_x p_y$ ,  $p_x p_z$  и т. д., обращаются в нуль, в то время как  $p_x^2$ ,  $p_y^2$ ,  $p_z^2$  будут иметь средние значения, равные  $\frac{1}{3} p^2$ , так что все выражение примет простой вид  $(p/3n_t Qm) \nabla^2 \rho$ .

Второе уравнение, получающееся из (2.4.39), принимает поэтому вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, p, t) \approx \frac{p}{3n_t Qm} \nabla^2 \rho(\mathbf{r}, p, t) - n_t Q_a \frac{p}{m} \rho(\mathbf{r}, p, t) + q \quad (2.4.41)$$

и служит для определения плотности частиц, имеющих импульс величины  $p$ . Функция  $q$  есть *функция источника*, дающая количество частиц, имеющих импульс  $p$  и «возникающих» в течение секунды в кубическом сантиметре в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ .

Теперь нетрудно получить уравнение диффузии для средней плотности. С помощью средних значений, определенных в (2.4.38), и пользуясь величинами

$$a^2 = \frac{1}{3m} p_{\text{ср}} \lambda_{\text{ср}}, \quad q = \int_0^\infty p^2 q(p) dp, \quad x = \frac{n_t}{m \rho(\mathbf{r}, t)} \int_0^\infty Q_a p^3 \rho(\mathbf{r}, p, t) dp,$$

получим окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) \approx a^2 \nabla^2 \rho(\mathbf{r}, t) - x \rho(\mathbf{r}, t) + q; \quad (2.4.42)$$

это — уравнение диффузии с двумя дополнительными членами, соответствующими уничтожению и возникновению частиц. Как мы видели, это уравнение пригодно только в тех случаях, где  $mJ/p_{\text{ср}}$  много меньше чем  $\rho$  (или по крайней мере мы не можем быть уверены в его пригодности, если  $mJ/p_{\text{ср}}$  не будет очень мало сравнительно с  $\rho$ ). Границные условия на граничной поверхности, вне которой нет рассеивающих мишеней, даются уравнением (2.4.34).

**Единичные решения.** По аналогии с нашими рассуждениями относительно волнового уравнения и уравнения Пуассона мы ищем решение уравнения (2.4.42), представляющее возникновение единственной частицы в момент времени  $t=0$  в начале координат [ $q = \delta(t) \delta(x) \delta(y) \delta(z)$ ]. Решение должно быть сильно сконцентрировано около начала координат при малых значениях  $t$  и с течением времени должно все больше и больше распространяться. Можно попытаться выразить решение для случая неограниченного пространства через функцию ошибок в пространстве [ $\rho = B(t) e^{-r^2 D(t)}$ , где  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ], и в конце концов можно показать, что требуемым решением уравнения (2.4.42) является (предполагая, что  $x$  — постоянная)

$$\rho = G(x, y, z; t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ (4\pi a^2 t)^{-3/2} e^{-(r^2/4a^2 t) - (xt)}, & t > 0. \end{cases} \quad (2.4.43)$$

Показательная функция непригодна для отрицательных значений  $t$ ; если  $t$  положительно, но бесконечно мало, то  $\rho$  является дельта-функцией вблизи начала (как это и должно быть), но когда  $t$  возрастает дальше от значения  $t=0$ , плотность выравнивается все больше и больше (на самом деле в соответствии с нашими замечаниями на стр. 181 уравнение диффузии, а следовательно, и его решение не пригодно до тех пор, пока после появления частицы не пройдет промежуток времени несколько больший, чем среднее время свободного пробега  $1/n_t Q_{\text{ср}} v_{\text{ср}}$ ). Если имеется поглощение ( $x$  не равно нулю), решение в целом экспоненциально убывает, так что интеграл от  $G$ , взятый по всему пространству (т. е. вероятность того, что частица еще не поглощена), равен  $e^{-|x|t}$ .

Если частицы возникают во всей области на протяжении некоторого промежутка времени, так что они в количестве  $q(x_0, y_0, z_0; t) dx_0 dy_0 dz_0 dt$  порождаются в элементарном объеме  $dx_0 dy_0 dz_0$ , расположенному в точке  $x_0, y_0, z_0$ , за промежуток времени между моментами  $t$  и  $t+dt$ , тогда то же самое рассуждение, которое привело нас к формуле (2.1.8), показывает, что получающаяся плотность частиц в неограниченном пространстве в точке  $x, y, z$  в момент времени  $t$  равна

$$\rho = \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 q(x_0, y_0, z_0; \tau) G(x - x_0, y - y_0, z - z_0; t - \tau). \quad (2.4.44)$$

Это решение, а также и другие будут очень подробно рассмотрены в этой книге дальше.

Когда достигается установившееся состояние и  $\rho$  больше не зависит от времени, соответствующее поле является решением уравнения Гельмгольца (см. стр. 125), так как уравнение (2.4.42) тогда принимает вид

$$a^2 \nabla^2 \rho - k\rho = -q.$$

В этом случае знак члена, содержащего  $\rho$ , противоположен знаку соответствующего члена в уравнении Гельмгольца, полученного из волнового уравнения и приведенного на стр. 125.

**Потеря энергии при столкновении.** До сих пор мы предполагали, что атомы вещества (мишени), через которое диффундируют частицы жидкости, жестко закреплены в пространстве, так что столкновения вполне упругие и потери энергии в веществе не происходит. Это, конечно, является идеализацией истинного состояния, которая лишь в немногих случаях мало отличается от действительности (как в случае рассеяния фотонов, рассмотренном раньше). Во много большем числе случаев, представляющих интерес, атомы-мишени также движутся и не являются бесконечно более тяжелыми по сравнению с диффундирующими частицами, так что эти частицы при столкновениях могут терять (а также и приобретать) кинетическую энергию. Исследование наиболее общего случая возможно, но утомительно, оно отвлекло бы нас в сторону от нашей цели дальше, чем это желательно. Мы в наших рассуждениях продвинемся здесь лишь настолько, чтобы показать, какие новые эффекты возникают при потере части энергии при столкновениях.

Предположим, что атомы-мишени имеют массу  $M$ , которая значительно больше массы  $m$  частиц жидкости, а также, что частицы жидкости имеют в среднем намного большую кинетическую энергию, чем атомы-мишени. В этом случае атомы-мишени можно считать неподвижными в момент ударов частиц, а также предположить, что только малая часть кинетической энергии теряется при каждом отдельном столкновении.

Элементарный анализ баланса импульсов и кинетической энергии показывает, что если начальный импульс частицы равен  $p'$  а ее окончательный импульс после ее отклонения на угол  $\alpha$  (см. рис. 2.18) равен  $p$ , то с точностью до членов первого порядка относительно малой величины  $m/M$  имеем:

$$p \simeq p' \left[ 1 - \frac{m}{M} (1 - \cos \alpha) \right], \quad p' \simeq p \left[ 1 + \frac{m}{M} (1 - \cos \alpha) \right]. \quad (2.4.45)$$

В силу уравнений (2.4.35) и (2.4.36) мы можем сказать, что с точностью до членов первого порядка относительно малой величины  $m/M$  для частицы с первоначальным импульсом  $p'$

<p>средняя потеря кинетической энергии при упругом столкновении равна произведению <math>2mQ_m/MQ_e</math> на ее первоначальную кинетическую энергию;</p> <p>средняя потеря величины импульса при упругом столкновении равна произведению <math>mQ_m/MQ_e</math> на ее первоначальный импульс <math>p'</math>;</p> <p>среднее уменьшение передней компоненты импульса при упругом столкновении равно произведению <math>Q_m/Q_e</math> на ее первоначальный передний импульс <math>p'</math>,</p>	<p>} (2.4.46)</p>
---	-------------------

где среднее число упругих столкновений частиц, имеющих импульс  $p$ , равно  $n_e Q_e p / m$  в секунду. Третье утверждение означает, что среднее значение компоненты окончательного импульса по направлению первоначального движения  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' / p')$  равно  $[1 - (Q_m / Q_e)] p'$ . Между прочим, эти утверждения поясняют, почему  $Q_m$  мы называем эффективным сечением передачи импульса.

Вернемся теперь к рассмотрению уравнений (2.4.14) и (2.4.15), дающих скорость изменения функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , вызванного упругими столкновениями. Скорость убывания  $f$ , вызванного рассеянием частиц из элемента импульсов  $dV_p = p^2 dp d\varphi \sin \theta d\theta$  (см. рис. 2.18), равна, как и прежде,

$$\begin{aligned} \frac{Q_e n_t p}{m} f(\mathbf{r}, p, \theta, \varphi, t) dV_p &= \\ &= \frac{n_t p^3}{m} dp \sin \theta d\theta d\varphi \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\pi \sigma(p, \alpha) \sin \alpha d\alpha f(\mathbf{r}, p, \theta, \varphi, t). \end{aligned}$$

Скорость возрастания  $f$ , обусловленного частицами, отброшенными *внутрь* элемента  $dV_p$  из элемента импульсов  $dV'_p = (p')^2 dp' d\varphi' \sin \theta' d\theta'$ , равна

$$\frac{n_t}{m} \sin \theta d\theta d\varphi \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\pi [(p')^3 \sigma(p', \alpha) f(\mathbf{r}, p', \theta', \varphi', t) dp'] \sin \alpha d\alpha.$$

Но согласно уравнению (2.4.45)  $p'$  отличается от  $p$  на малую величину  $(pm/M)(1 - \cos \alpha)$ . Выражение, стоящее в квадратных скобках, может быть разложено в ряд Тейлора по степеням  $(pm/M)$ , что даст в качестве первого приближения

$$p^3 dp \left\{ \sigma(p, \alpha) f(\mathbf{r}, p, \theta', \varphi', t) + \frac{m}{Mp^3} (1 - \cos \alpha) \frac{\partial}{\partial p} [p^4 \sigma(p, \alpha) f(\mathbf{r}, p, \theta', \varphi', t)] \right\}.$$

Мы допустили, что распределение частиц почти изотропно и что движение переноса мало по сравнению с случайным движением частиц в соответствии с уравнением (2.4.37), где  $mJ/p$  мало сравнительно с  $p$ . Мы допустили также, что вектор  $\mathbf{J}$  параллелен полярной оси  $\theta$  и  $\varphi$ . При этих предположениях оба выражения могут быть объединены и упрощены и мы получаем результирующую скорость изменения  $f$ , вызванного приростом и потерей частиц при рассеянии

$$\begin{aligned} \frac{n_t p^3}{4\pi m} dp \sin \theta d\theta d\varphi \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\pi &\left\{ \frac{3}{p} \sigma(p, \alpha) [\cos \theta' - \cos \theta] J(\mathbf{r}, p, t) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{Mp^3} (1 - \cos \alpha) \frac{\partial}{\partial p} [p^4 \sigma(p, \alpha) p(\mathbf{r}, p, t)] \right\} \sin \alpha d\alpha = \\ &= \frac{n_t p}{4\pi m} dV_p \left[ -\frac{3}{p^2} Q_m \mathbf{p} \cdot \mathbf{J} + \frac{1}{Mp^3} \frac{\partial}{\partial p} (p^4 Q_m p) \right]. \quad (2.4.47) \end{aligned}$$

Первый член этого выражения был выведен раньше [см. равенства (2.4.38) и следующие]; второй член — новый, он представляет изменение функции  $f$ , вызванное потерей энергии при столкновении.

Другая часть скорости изменения, которая должна быть принята во внимание, дается в уравнении (2.4.9), соответствующем уравнению неразрывности. Изменение имеет вид

$$-\frac{dV_p}{4\pi m^2} \mathbf{p} \cdot \text{grad } p - \frac{3}{4\pi p^2 m} dV_p \mathbf{p} \cdot \text{grad} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{J}), \quad (2.4.48)$$

если подставить приближенное выражение  $f$ , данное в уравнении (2.4.37).

**Действие внешней силы.** Учитывая влияние на функцию  $f$  потери энергии при столкновениях, необходимо также принять во внимание возможность приобретения энергии частицами благодаря наличию внешнего силового поля. Если, например, частицами являются электроны, движущиеся через газ, то электрическое поле может вызвать движение переноса и изменить функцию распределения  $f$ . Мы предположим, что действует постоянная сила  $\mathbf{F}$ , параллельная потоку  $\mathbf{J}$ . (Мы не будем рассматривать случай, когда имеется внешняя сила и одновременно  $\text{grad } \rho$  отличен от нуля, поэтому в нашем исследовании в этом параграфе  $\mathbf{J}$  направлено либо параллельно  $\mathbf{F}$ , либо параллельно  $\text{grad } \rho$ , смотря по тому, какой из этих векторов отличен от нуля.)

Если приложить силу  $\mathbf{F}$ , импульс каждой частицы изменится; частицы, имевшие импульс  $\mathbf{p}$  в момент времени  $t$ , будут иметь импульс  $\mathbf{p} + \mathbf{F} dt$  в момент  $t + dt$ . Рассуждая подобно тому, как мы это делали при выводе уравнения неразрывности (2.4.9), мы должны принять, что плотность следует за ускоряемыми частицами, т. е.  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \mathbf{F} dt, t + dt) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ ; таким образом, скорость изменения величины  $f dV_p$ , вызванная внешним полем, равна

$$\begin{aligned} - \left[ F_x \frac{\partial f}{\partial p_x} + F_y \frac{\partial f}{\partial p_y} + F_z \frac{\partial f}{\partial p_z} \right] dV_p &= \\ = - F \left[ \cos \theta \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{p} (1 - \cos^2 \theta) \frac{\partial f}{\partial \cos \theta} \right] dV_p &= \\ = - \frac{F}{4\pi} \left[ \frac{\cos \theta}{m} \frac{\partial p}{\partial p} + 3 \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{J}{p} \right) + \frac{3J}{p^2} (1 - \cos^2 \theta) \right] dV_p. & (2.4.49) \end{aligned}$$

Наконец, комбинируя выражения (2.4.47) – (2.4.49) и добавляя член  $-n_t Q_a p \rho / m$ , соответствующий поглощению частиц, получаем выражение, дающее скорость изменения  $\rho$  и  $J$ , вызванного столкновениями, ускорением переноса и поглощением

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{3m}{p} \cos \theta \frac{\partial J}{\partial t} &\simeq -\frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \text{grad } \rho - \frac{3}{p^2} \mathbf{p} \cdot \text{grad} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{J}) - \\ - F \cos \theta \frac{\partial p}{\partial p} - 3mF \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{J}{p} \right) - \frac{3mFJ}{p^2} (1 - \cos^2 \theta) - \\ - 3n_t Q_m J \cos \theta + \frac{n_t}{M p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^4 Q_m \rho) - \frac{1}{m} n_t Q_a p \rho - 3n_t Q_a J \cos \theta. & (2.4.50) \end{aligned}$$

Это уравнение может быть разделено на два, если воспользоваться симметрией относительно  $\theta$  (или относительно направления  $\mathbf{p}$ ); решение полученных уравнений позволит определить  $\rho(\mathbf{r}, p, t)$  и  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, p, t)$ . Далее будут рассмотрены два примера, оба в условиях установившегося состояния, в случаях, когда члены, соответствующие потере энергии, играют существенную роль при решении.

**Равномерный перенос, вызванный силовым полем.** В качестве первого примера рассмотрим равномерно распределенные частицы, движущиеся через среду под влиянием постоянной силы  $\mathbf{F}$ . Таково, например, движение электронов в газе под действием электрического поля. Здесь  $\text{grad } \rho$  равен нулю и вектор переноса  $\mathbf{J}$  должен быть параллелен  $\mathbf{F}$ . Для установившегося состояния  $\partial f / \partial t$  равно нулю; предположим, кроме того, что  $Q_a$  равно нулю. Остающиеся члены уравнения (2.4.50) умножим на  $\sin \theta d\theta$  или на  $\cos \theta \sin \theta d\theta$  и проинтегрируем по  $\theta$ ; получим два уравнения:

$$F \frac{\partial}{\partial p} (pJ) = \frac{n_t}{M m} \frac{\partial}{\partial p} (p^4 Q_m \rho), \quad \frac{\partial \rho}{\partial p} = -\frac{3n_t Q_m}{F} J. \quad (2.4.51)$$

Первое уравнение после интегрирования дает

$$F p^2 J(p) = \frac{n_t}{M m} p^5 Q_m \rho(p) - K p.$$

Постоянная интегрирования  $K$  оказывается равной нулю, в чем можно убедиться с помощью следующего рассуждения: интегрируя последнее уравнение (при  $K=0$ ) еще раз относительно  $p$ , получим уравнение баланса энергии [см. (2.4.38)]

$$FJ = \int_0^\infty \frac{P^2}{2m} \cdot \frac{2mQ_m}{MQ_e} \cdot \frac{n_t Q_e p}{m} \rho(p) p^2 dp.$$

Левая часть как раз равна энергии, полученной от силового поля  $F$  за одну секунду в одном кубическом сантиметре благодаря потоку плотности  $J$  переноса частиц. Выражение  $(p^2/2m)$   $(2mQ_m/MQ_e)$ , стоящее в правой части, как показывает уравнение (2.4.46), дает среднюю кинетическую энергию, потерянную при столкновении и соответствующую импульсу  $p$ ;  $n_t Q_e p / m$  есть число столкновений частицы за секунду и  $\rho(p) p^2 dp$  есть число частиц в кубическом сантиметре, имеющих импульсы, лежащие между  $p$  и  $p+dp$ ; таким образом, интеграл как раз равен полной энергии, теряемой благодаря столкновениям одним кубическим сантиметром за одну секунду. Если устойчивое состояние достигнуто, то количество энергии, потерянной при столкновениях, должно быть равно количеству энергии, приобретенной от силового поля, и потому наше уравнение удовлетворяется. Следовательно,  $K$  должно быть равным нулю.

Теперь можно вернуться ко второму из уравнений (2.4.51) и найти зависимость  $\rho$  от  $p$ . Так как  $J(p) = (n_t Q_m / m M F) p^3 \rho(p)$ , то, интегрируя, получим

$$\rho(p) = A \exp \left[ -\frac{3m}{M} \int_0^p \left( \frac{n_t Q_m p}{m F} \right)^2 p dp \right], \quad (2.4.52)$$

где  $A$  выбрано так, чтобы интеграл в (2.4.38) был равен  $\rho$ , средней плотности частиц. Если  $Q_m$  не зависит от плотности, то

$$\rho(p) = A e^{-h^4 p^4}, \quad h^4 = \frac{3m}{M} \left( \frac{n_t Q_m}{2 F m} \right)^2, \quad A = 3,2642 \rho h^3.$$

С помощью этой функции распределения мы можем выразить среднюю кинетическую энергию  $\varepsilon_{cp}$ , частиц и среднюю скорость переноса  $v_{cp}$ , вызванные влиянием поля, через энергию  $\varepsilon_e = F/n_t Q_m$  и скорость  $v_e = \sqrt{2F/m n_t Q_m}$ , которые приобрела бы частица при движении под действием поля из состояния покоя за величину среднего свободного пробега. Эти величины равны

$$\varepsilon_{cp} = 0,4270 \left( \frac{M}{m} \right)^{1/2} \varepsilon_e, \quad v_{cp} = 0,6345 \left( \frac{m}{M} \right)^{1/4} v_e.$$

Эти равенства верны только, если  $Q_m$  не зависит от  $p$ . Отсюда видно, что средняя энергия тем больше, чем тяжелее атомы по сравнению с частицами, так как при увеличении  $M/m$  частицы могут терять при столкновениях меньше энергии. С другой стороны, средняя скорость переноса убывает при возрастании  $M/m$ .

Этот пример мало связан с уравнением диффузии, но он показывает, как уравнения, определяющие функцию распределения  $f$ , могут быть приспособлены в различных случаях к очень обширному многообразию условий и явлений. Он показывает, например, что распределение скоро-

стей электронов, движущихся в газе под влиянием электрического поля, не является распределением Максвелла, вызванным тепловым перемещением; здесь содержится четвертая степень скорости (вместо квадрата) в показателе. Это, конечно, верно до тех пор, пока средняя кинетическая энергия электронов много выше средней кинетической тепловой энергии атомов газа, через который переносятся электроны. В противном случае нельзя было бы считать, что атомы газа находятся в состоянии относительного покоя и распределение электронов должно было изменяться на основе максвелловского закона распределения скоростей.

**Уменьшение скорости частиц при столкновениях.** Уравнение диффузии появляется в следующем (и последнем) примере, который интересен при изучении замедления нейтронов в «замедлителе». Мы рассмотрим здесь зависящие от  $x, y, z$  решения уравнения (2.4.50), когда  $\mathbf{F}$  равно нулю и когда принимается во внимание замедляющее действие столкновений.

Предположим, что частицы появляются в некоторой части пространства все с одним и тем же начальным импульсом  $p_0$ ; они сталкиваются с атомами и постепенно замедляются и в то же время разбрасываются. Так как здесь процесс установившийся, новые частицы непрерывно появляются и заменяют те, скорость которых уменьшилась; функция распределения не зависит от времени, но зависит от импульса  $p$  и от пространственных координат. Как мы увидим,  $\mathbf{J}$  в этом случае параллелен градиенту  $p$ .

Импульс может быть принят за меру среднего «возраста» отдельной частицы, так как эта частица появляется, имея импульс  $p_0$ . Когда этот возраст увеличивается, распределение в пространстве изменяется; поэтому можно надеяться найти уравнение, связывающее зависимость  $f$  от точки пространства с зависимостью ее от возраста частиц тем же способом, каким уравнение диффузии связывает зависимость  $f$  от точки пространства с ее зависимостью от времени для случая неустановившегося состояния.

Среднее уменьшение импульса  $p$  при столкновении, как показывает (2.4.46), определяется равенством

$$\frac{dp}{d\tau} \simeq -\frac{mQ_m}{MQ} p,$$

где  $\tau$  есть среднее число столкновений, которым подверглась частица; следовательно, мы имеем соотношение между  $v$  и  $\tau$

$$\tau - \tau_0 = \int_{p_0}^p \frac{MQ}{mQ_m} \frac{dp}{p}. \quad (2.4.53)$$

Величина  $\tau - \tau_0$  называется *возрастом* частицы в распределении; она заменяет время, когда мы рассматриваем случай установившегося состояния при наличии замедления.

Возвращаясь снова к уравнению (2.4.50), мы опускаем члены, содержащие силу и производную по времени, но включаем члены, характеризующие потерю энергии и поглощение. Член, зависящий от источника  $q$ , аналогичный соответствующему члену в (2.4.41), не включается, так как он введен в «начальном условии» при  $\tau = \tau_0$ . Если мы умножим на  $\cos \theta$  и проинтегрируем по всем направлениям  $\theta$ , мы получим, как и раньше [см. (2.4.40)],

$$\mathbf{J} = -\frac{p}{3nQm} \operatorname{grad} p, \quad Q = Q_m + Q_a.$$

На этот раз уравнение получается точным, так как теперь мы имеем дело с установившимся состоянием, так что производная по времени от  $\mathbf{J}$  равна нулю, в то время как раньше она была очень малой и мы ею пренебрегали.

Подставляя это обратно в (2.4.50) и осредняя по всем направлениям, мы получим [по поводу члена, содержащего  $\text{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})$  см. стр. 186]

$$-\frac{mn_t}{Mp^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^4 Q_m \rho) = \frac{p^3}{3n_t Q} \nabla^2 p - n_t Q_a p \rho.$$

Полагая  $\psi = (n_t Q_m p^4 \rho / M)$  и подставляя вместо  $p$  его выражение через  $\tau$  из (2.4.53), получим окончательно уравнение для  $\psi$ , имеющее вид уравнения диффузии

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{1}{3n_t^2 Q^3} \nabla^2 \psi - \alpha \psi, \quad \alpha = \frac{Q_a}{Q}, \quad (2.4.54)$$

где вместо времени мы имеем  $(\tau - \tau_0)$  — возраст частиц, имеющих импульс  $p$ . Физический смысл величины  $\psi$  вскоре станет ясным.

Решения этого уравнения полностью аналогичны решениям обычного уравнения диффузии. Например, если частицы с импульсом  $p_0$  первоначально появляются в сконцентрированной области пространства, то распределение более медленных частиц будет более равномерным; эта равномерность будет тем больше, чем больше  $\tau$  (т. е. чем меньше  $p/p_0$ ). Если только установившееся состояние достигнуто, мы можем сделать перепись всех частиц, находящихся в данный момент времени в данном кубическом сантиметре, чтобы определить количество тех из них, импульсы которых попадают в данный промежуток (или, вернее, для которых  $\tau$  лежит в данном интервале  $d\tau$ ). Из полученной плотности относительно  $\tau$  можно найти функцию  $\psi$  в точке как функцию  $\tau$ ; наоборот, если  $\psi$  известна, мы можем предсказать результаты переписи.

Чтобы определить «начальное значение»  $\psi_0$ , т. е. значение функции  $\psi$  при  $\tau = \tau_0$ , мы должны установить связь между количеством частиц на кубический сантиметр, появляющихся за секунду в данной точке, и полной потерей импульсов за секунду в одном кубическом сантиметре, т. е. произведением числа частиц в одном кубическом сантиметре на величину потери частицей импульса за секунду. Потеря импульса при столкновении, согласно утверждению (2.4.46), равна в среднем  $mpQ_m/MQ_e$ . Число столкновений в секунду, приходящихся на одну частицу, равно  $n_t Q_e p/m$ , так что полная величина потери импульса одной частицей в секунду равна  $dp/dt = n_t Q_m p^2/M$ . Так как число частиц в одном кубическом сантиметре, имеющих импульс в данном промежутке импульсов  $dp$ , равно, согласно (2.4.38),  $p^2 \rho dp$ , то полная потеря импульса в одном кубическом сантиметре за промежуток времени  $dt$  равна  $p^2 \rho (dp/dt) dt = = n_t Q_m p^4 \rho dt/M$ . Следовательно, величина  $n_t Q_m p^4 \rho / M = \psi(\tau)$  равна полному числу частиц, имеющих в данное время импульсы, превышающие  $p$ , но таких, что через секунду их импульсы становятся меньше чем  $p$ . Это полная скорость уменьшения импульсов.

Например, если в каждом кубическом сантиметре ограниченной части пространства каждую секунду появляется  $n_0$  частиц, то  $\psi_0$  будет равно  $n_0$  всюду в этой ограниченной области (предполагается, что частицы появляются изотропно, т. е. все направления  $p_0$  равновероятны). Если границы области полностью отражают частицы, то  $\psi$  при всех значениях  $\tau$  не будет зависеть от пространственных координат и решение уравнения

ния (2.4.54) будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \psi &= n_0 e^{-(Q_a/Q)(\tau - \tau_0)} \quad \text{при } \tau > \tau_0, \\ \text{или } \psi &= n_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{mQ_a/MQ_m}, \quad \text{если } \frac{Q_m}{Q} \text{ не зависит от } p \end{aligned} \right\} \quad (2.4.55)$$

и количество частиц, импульсы которых лежат между  $p$  и  $p + dp$ , равно

$$p^2 \rho dp = \frac{M\psi}{n_t Q_m p^2} dp = \frac{n_0 M}{n_t Q_m p^2} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{mQ_a/MQ_m} dp$$

при  $p < p_0$ . Последняя форма решения пригодна лишь в случае, когда  $Q_m/Q$  не зависит от  $p$ . Если отсутствует поглощение ( $Q_a = 0$ ), то  $\psi$  не зависит от  $\tau$  и  $\rho$  будет обратно пропорциональным величине  $p^4 Q_m$ . Это и должно иметь место, так как при отсутствии поглощения быстрота  $\psi$  уменьшения импульсов должна быть одна и та же для всех скоростей. Это решение, конечно, влечет за собой существование бесконечно большого числа частиц с бесконечно малыми скоростями. Если бы наше исследование потери энергии при столкновениях сохраняло силу в пределе при обращении скорости в нуль, то такое бесконечное количество должно было бы существовать, чтобы достичь установившегося состояния. В действительности, конечно, атомы среды не остаются полностью в покое, и поэтому для достаточно малых скоростей частиц приведенное выше рассуждение, предполагающее, что частицы всегда теряют энергию, становится неприменимым. Поэтому равенство (2.4.55) непригодно для частиц, имеющих кинетическую энергию той же величины или меньшую, чем средняя энергия атомов.

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда в точке  $x_0, y_0, z_0$  неограниченного пространства появляется (изотропно) в секунду одна частица с импульсом  $p_0$ . Тогда  $\psi$  при  $\tau = \tau_0$  будет равно дельта-функции  $\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$ ; используя те самые методы, которые привели нас к формуле (2.4.43), получим  $\psi = G(x - x_0, y - y_0, z - z_0 | \tau - \tau_0)$ , где

$$G(x, y, z | \tau - \tau_0) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \tau < \tau_0, \\ \left[ \frac{3n_t^2 Q^2}{4\pi(\tau - \tau_0)} \right]^{3/2} \exp \left[ -\frac{3n_t^2 Q^2 r^2}{4(\tau - \tau_0)} - \frac{Q_a}{Q} (\tau - \tau_0) \right], & \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (2.4.56)$$

$$\tau = \int_p^\infty \frac{MQ}{mQ_m} \cdot \frac{dp}{p}, \quad \rho(r, p) = \frac{M\psi}{n_t Q_m p^4}.$$

Наконец, мы можем решить задачу, если на кубический сантиметр в точке  $x_0, y_0, z_0$  неограниченного пространства в секунду появляется изотропно  $q(x_0, y_0, z_0 | p_0) dp_0$  частиц, импульсы которых лежат между  $p_0$  и  $p_0 + dp_0$ . Количество частиц, появляющихся в секунду между пределами «возраста»  $\tau_0$  и  $\tau_0 + d\tau_0$ , будет тогда равно  $(p_0 m Q_m / MQ) q(x_0, y_0, z_0 | \tau_0) d\tau_0$ , где  $p_0$  связано с  $\tau_0$  так же, как  $p$  и  $\tau$  связаны в уравнении (2.4.56). Получающееся установившееся распределение в пространстве частиц с различными импульсами  $p$  можно вывести из выражения для  $\psi$

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z | \tau) &= \frac{mQ_m}{MQ} \int_{-\infty}^{\tau} p_0 d\tau_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \times \\ &\times q(x_0, y_0, z_0 | \tau_0) G(x - x_0, y - y_0, z - z_0 | \tau - \tau_0), \end{aligned} \quad (2.4.57)$$

где количество частиц, имеющих импульсы в промежутке между  $p$  и  $p+dp$ , рассчитанное на один кубический сантиметр, равно  $p^2 p dp = (M\Phi/n_l p^2 Q_m) dp$ . При некоторых простых формах функции  $q$  интегрирование может быть выполнено и таким образом может быть получено замкнутое аналитическое выражение для  $\Phi$ .

**Резюме.** Можно указать много других применений уравнения диффузии. Для его появления требуется только, чтобы некоторая величина (плотность, парциальное давление, количество теплоты и т. д.) удовлетворяла двум условиям: во-первых, она должна подчиняться уравнению неразрывности, то есть скорость изменения этой величины с течением времени должна быть равна дивергенции потока этой величины, взятой со знаком минус, во-вторых, поток этой величины должен быть пропорционален градиенту этой величины, взятому с обратным знаком. Другие случаи будут рассмотрены в гл. 12.

Так как уравнение содержит производную по времени лишь первого порядка, в то время как производные по координатам имеют второй порядок, решения уравнения диффузии необратимы во времени. Почти все другие уравнения, которые мы будем рассматривать, изображают обратимые в термодинамическом смысле явления, в то время как уравнение диффузии изображает возрастание энтропии (мы к этому вернемся в следующей главе). Все это, грубо говоря, равносильно утверждению, что явления, изображаемые уравнением диффузии, имеют статистический характер.

## 2.5. Электромагнитное поле

Понятие поля играет большую роль еще в одной важной отрасли физики, а именно в учении об электричестве. Некоторые элементарные частицы вещества обладают электрическими зарядами и большая часть их, если не все, имеют магнитные моменты. Электромагнитная теория разработана для описания их взаимодействий в целом (взаимодействия между отдельными частицами обычно включают квантовые явления, которые мы опишем в этой главе позже).

Как и в случае полей, встречавшихся раньше в этой главе, электрический заряд часто удобнее рассматривать как непрерывную жидкость, чем как множество заряженных частиц. Классическая электромагнитная теория имеет дело с полями, порождаемыми различными расположениями такой жидкости, а также и взаимодействиями этих полей с другими частями жидкости. Конечно, можно было бы изучать силы, с которыми одна часть жидкости (или одна частица) действует на другую часть (или частицу), вовсе не говоря о поле. Однако представляется значительно более простым и, быть может, также лучшим расчленить задачу на две части: первую — о «создании» электромагнитного поля при наличии того или иного распределения зарядов и токов, и вторую — о влиянии этого поля на распределение зарядов и токов.

**Электростатическое поле.** Воздействие одной заряженной частицы на другую вполне аналогично взаимодействию тяготения. Величина силы, действующей на каждую частицу, обратно пропорциональна квадрату их расстояния друг от друга и прямо пропорциональна произведению величин их зарядов; направление силы совпадает с направлением прямой линии, соединяющей частицы (пока частицы остаются в покое одна относительно другой). В случае тяготения сила, всегда притягивающая, и величина гравитационного заряда пропорциональна массе частицы;