

где количество частиц, имеющих импульсы в промежутке между  $p$  и  $p+dp$ , рассчитанное на один кубический сантиметр, равно  $p^2 p dp = (M\Phi/n_l p^2 Q_m) dp$ . При некоторых простых формах функции  $q$  интегрирование может быть выполнено и таким образом может быть получено замкнутое аналитическое выражение для  $\Phi$ .

**Резюме.** Можно указать много других применений уравнения диффузии. Для его появления требуется только, чтобы некоторая величина (плотность, парциальное давление, количество теплоты и т. д.) удовлетворяла двум условиям: во-первых, она должна подчиняться уравнению неразрывности, то есть скорость изменения этой величины с течением времени должна быть равна дивергенции потока этой величины, взятой со знаком минус, во-вторых, поток этой величины должен быть пропорционален градиенту этой величины, взятому с обратным знаком. Другие случаи будут рассмотрены в гл. 12.

Так как уравнение содержит производную по времени лишь первого порядка, в то время как производные по координатам имеют второй порядок, решения уравнения диффузии необратимы во времени. Почти все другие уравнения, которые мы будем рассматривать, изображают обратимые в термодинамическом смысле явления, в то время как уравнение диффузии изображает возрастание энтропии (мы к этому вернемся в следующей главе). Все это, грубо говоря, равносильно утверждению, что явления, изображаемые уравнением диффузии, имеют статистический характер.

## 2.5. Электромагнитное поле

Понятие поля играет большую роль еще в одной важной отрасли физики, а именно в учении об электричестве. Некоторые элементарные частицы вещества обладают электрическими зарядами и большая часть их, если не все, имеют магнитные моменты. Электромагнитная теория разработана для описания их взаимодействий в целом (взаимодействия между отдельными частицами обычно включают квантовые явления, которые мы опишем в этой главе позже).

Как и в случае полей, встречавшихся раньше в этой главе, электрический заряд часто удобнее рассматривать как непрерывную жидкость, чем как множество заряженных частиц. Классическая электромагнитная теория имеет дело с полями, порождаемыми различными расположениями такой жидкости, а также и взаимодействиями этих полей с другими частями жидкости. Конечно, можно было бы изучать силы, с которыми одна часть жидкости (или одна частица) действует на другую часть (или частицу), вовсе не говоря о поле. Однако представляется значительно более простым и, быть может, также лучшим расчленить задачу на две части: первую — о «создании» электромагнитного поля при наличии того или иного распределения зарядов и токов, и вторую — о влиянии этого поля на распределение зарядов и токов.

**Электростатическое поле.** Воздействие одной заряженной частицы на другую вполне аналогично взаимодействию тяготения. Величина силы, действующей на каждую частицу, обратно пропорциональна квадрату их расстояния друг от друга и прямо пропорциональна произведению величин их зарядов; направление силы совпадает с направлением прямой линии, соединяющей частицы (пока частицы остаются в покое одна относительно другой). В случае тяготения сила, всегда притягивающая, и величина гравитационного заряда пропорциональна массе частицы;

между двумя электрическими зарядами действует сила отталкивания, если заряды имеют один и тот же знак, и сила притяжения, когда заряды противоположных знаков.

Сила, действующая на какую-либо частицу или часть заряда, будет, следовательно, пропорциональна величине ее собственного заряда. Таким образом, мы можем определить векторное поле, называемое *электростатическим* (или *гравитационным*) *полям*  $\mathbf{E}$ , которое в какой-либо точке является отношением силы, действующей на пробную частицу, помещенную в эту точку, к величине заряда этой частицы. Вектор  $\mathbf{E}$  называется *электрической* (или *гравитационной*) *напряженностью* поля в точке. Это поле, определяемое суммой сил, величины которых обратно пропорциональны квадратам расстояний от различных имеющихся зарядов, является полем, определенным некоторым числом точечных источников, рассмотренным на стр. 28. Мы показали в (1.2.10), что для полей такого типа поток через любую замкнутую поверхность изнутри наружу равен произведению  $4\pi$  на сумму зарядов всех частиц, расположенных внутри неё.

До тех пор пока мы рассматриваем лишь макроскопические эффекты, мы можем не обращать внимания на микроскопические неправильности поля, возникающие благодаря тому, что заряды сосредоточены на отдельных частицах, а не распределены непрерывно; нам надо рассматривать только поля, осредненные по элементарным кускам поверхности, имеющим площадь большую сравнительно с расстояниями между частицами, но малую по сравнению со всей поверхностью. Если это возможно, получение среднее поле эквивалентно полю, возникающему при непрерывном «сглаженном» распределении зарядов; в этом случае мы можем не беспокоиться по поводу точного положения каждой отдельной частицы. Мы можем «вблизи» точки  $x, y, z$  выбрать элемент объема  $dx dy dz$ , содержащий достаточно большое количество частиц. Величина полного заряда внутри этого объема равна средней плотности заряда «в точке»  $x, y, z$ , умноженной на  $dx dy dz$ . Эта величина пропорциональна потоку через поверхность рассматриваемого элемента, а этот поток, согласно равенству (1.4.5), равен произведению  $dx dy dz$  на дивергенцию поля  $\mathbf{E}$ .

Таким образом, рассматривая макроскопические явления, мы можем заменить множество заряженных частиц гладким распределением заряда с плотностью  $\rho(x, y, z, t)$ . Как показывает равенство (1.4.5), в случае, когда эта плотность не зависит от времени, получающееся статическое поле  $\mathbf{E}$  связано с  $\rho$  уравнением

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho.$$

Коэффициент пропорциональности  $\epsilon$  зависит от среды и называется *диэлектрической постоянной* среды. Если  $\epsilon$  меняется от точки к точке, то удобнее рассматривать связанное с  $\mathbf{E}$  векторное поле  $\mathbf{D}$ , называемое *полем электрической индукции*, причем

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (2.5.1)$$

Выразив  $\mathbf{D}$  через  $\rho$  и зная  $\epsilon$ , найдем  $\mathbf{E}$ , а потом определим и силу  $\rho \mathbf{E}$ , действующую на кубический сантиметр электрической жидкости.

Как было показано на стр. 59, вектор  $\mathbf{E}$  всегда может быть выражен через вихрь векторного и градиент скалярного потенциала. Но, так как дивергенция вихря равна нулю, векторный потенциал для  $\mathbf{E}$  не определяется уравнением (2.5.1) и поэтому не входит в выкладки в электростатике. Скалярный потенциал  $\varphi$  для  $\mathbf{E}$  должен удовлетворять следующему уравнению:

$$\operatorname{div} [\epsilon \operatorname{grad} \varphi] = \epsilon \nabla^2 \varphi + (\operatorname{grad} \epsilon) \cdot (\operatorname{grad} \varphi) = -4\pi\rho, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (2.5.2)$$

Если  $\varepsilon$  — постоянно, то это уравнение превращается в уравнение Пуассона для  $\varphi$  [см. (2.1.2)].

В случае тяготения величина  $\varepsilon$  везде постоянна и в уравнении для напряженности берется противоположный знак  $\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi\rho/\varepsilon$ , соответствующий тому, что сила всегда является силой притяжения, а не отталкивания. В этом случае существует скалярный потенциал, являющийся всюду решением уравнения Пуассона  $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho/\varepsilon$ .

**Магнитостатическое поле.** Ферромагнитные материалы, атомы которых имеют не нейтрализованные магнитные моменты, ведут себя так, как если бы они были заполнены магнитной жидкостью<sup>1)</sup>, подобной электрической жидкости, рассмотренной сейчас нами. Если поместить единичный положительный магнитный заряд, на него будет действовать сила, определяемая векторным полем  $\mathbf{H}$ , аналогичным электрическому полю  $\mathbf{E}$ . Диэлектрической постоянной  $\varepsilon$  здесь соответствует магнитная проницаемость  $\mu$ , а вектору электрической индукции  $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$  соответствует **магнитная индукция**  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ .

Тем не менее важным различием между электричеством и магнетизмом является отсутствие магнитных зарядов. Уравнение для поля магнитной индукции  $\mathbf{B}$  в отличие от уравнения (2.5.1) имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.5.3)$$

Конечно, можно было бы считать  $\mathbf{B}$  градиентом скалярного потенциала, обязательно удовлетворяющего уравнению Лапласа (2.3.6), однако удобнее воспользоваться тем фактом, что дивергенция вихря любого вектора равна нулю, и выразить  $\mathbf{B}$  с помощью векторного потенциала  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ .

В этих рассуждениях мы пока рассматривали магнитостатическое поле, не учитывая того факта, что магнитное поле оказывается связанным с потоком электрических зарядов, т. е. с электрическим током. Например, если вдоль прямолинейного провода, диаметром которого можно пренебречь, течет ток  $I$  (направление вектора совпадает с направлением тока вдоль провода), то магнитное поле вокруг провода дается равенством

$$\mathbf{H} = \frac{2I \times \mathbf{r}}{r^2},$$

где  $\mathbf{r}$  — есть вектор, перпендикулярный проводу и идущий от провода к точке, в которой измеряется  $\mathbf{H}$ .

Но это как раз поле, порожденное простым вихрем, рассмотренное на стр. 30. Принимая во внимание это, а также определение вихревого вектора, данное на стр. 49, получаем общую связь между  $\mathbf{B}$  и постоянным током. Если заряженная жидкость движется, то произведение скорости  $v$  заряда на его плотность  $\rho$  называется плотностью тока  $\mathbf{J}$ ; этот вектор определяет величину заряда, проходящего в секунду через один квадратный сантиметр, и имеет в каждой точке направление скорости заряда. Вектор  $\mathbf{J}$  связан с вихревым вектором поля  $\mathbf{H}$  простым уравнением

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J}. \quad (2.5.4)$$

(Между прочим, может оказаться, что имеется ток, но нет свободных зарядов; так будет, если ток получается в результате движения

<sup>1)</sup> Так как не существует магнитных зарядов, а можно рассматривать только магнитные моменты, то было бы более логично выводить уравнения для магнитного поля, рассматривая врачающий момент, действующий на магнитный диполь. Однако это не книга по электромагнетизму и нас можно извинить (как мы надеемся) за то, что мы экономим место, выводя наши уравнения по аналогии с электростатикой вместо того, чтобы затратить еще несколько страниц на более логичный вывод, который во всех подробностях дан в таких, например, книгах, как Дж. А. Стрэттон. Теория электромагнетизма, ГТТИ, 1948, или Frank. Introduction to Electricity and Optics.

в противоположных направлениях равных количеств положительных и отрицательных зарядов.)

Наоборот, в магнитном поле возникает сила, действующая на ток. Сила, действующая на один кубический сантиметр движущегося заряда в точке  $x, y, z$ , равна

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (2.5.5)$$

Для решения вопросов, связанных с установившимся состоянием, этих уравнений достаточно. Заряд вызывает появление электростатического поля ( $\mathbf{E}, \mathbf{D}$ ), ток вызывает появление магнитного поля ( $\mathbf{H}, \mathbf{B}$ ). В свою очередь электростатическое поле действует на заряд, а магнитное поле — на ток. Электрическое поле возникает под действием статических зарядов и само вызывает силы, действующие на заряды; магнитное поле возникает при наличии движущихся зарядов и само вызывает силы, действующие на движущиеся заряды. Может быть установлена довольно искусственная аналогия между скалярным потенциалом, определяющим электрическое поле, и скалярным волновым потенциалом для волны чистого расширения в упругой среде, а также между векторным потенциалом, определяющим магнитное поле, и векторным волновым потенциалом для волны сдвига. Однако здесь не может быть волнового движения, так как мы рассматриваем только стационарное состояние.

Для неограниченного пространства, содержащего конечное установленное распределение зарядов и токов и имеющего диэлектрическую постоянную  $\epsilon$ , везде одну и ту же, в соответствии с равенством (1.4.8) уравнение (2.5.2) имеет вид

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} \rho(x', y', z') dx' dy' dz', \quad (2.5.6)$$

где

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

и  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ ,  $\mathbf{D} = -\epsilon \operatorname{grad} \varphi$ .

Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  может быть выбран так, чтобы его дивергенция была равна нулю (ибо нас интересует только та часть вектора  $\mathbf{A}$ , которая имеет ненулевой вихрь). Так как  $\nabla^2 \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , то из уравнения (2.5.4) имеем

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi\mu \mathbf{J}, \quad (2.5.7)$$

а из уравнения (1.5.16) —

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mu \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} \mathbf{J}(x', y', z') dx' dy' dz', \quad (2.5.8)$$

где

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

**Зависимость от времени.** До сих пор мы рассматривали лишь установившееся состояние, когда  $\partial\rho/\partial t$  и  $\operatorname{div} \mathbf{J}$  равны нулю [ $\operatorname{div} \mathbf{J}$  должна быть равна нулю, если  $\partial\rho/\partial t$  равна нулю в силу уравнения неразрывности (2.3.1)]. Если же  $\rho$  и  $\mathbf{J}$  меняются с течением времени, уравнения (2.5.1) и (2.5.4) должны стать связанными друг с другом, так как уравнение неразрывности связывает между собой плотность заряда

и поток заряда. При этом надо связать единицы заряда, силы тока и напряженности поля в этих двух уравнениях. Если мы пользуемся системой единиц *MKS* (метр — килограмм — секунда), уравнения остаются прежними при  $\epsilon$ , равной для вакуума  $\epsilon_0 \approx \frac{1}{9} \cdot 10^{-9}$ , и при  $\mu$ , равной для вакуума  $\mu_0 \approx 10^{-7}$ . Мы предполагаем, однако, пользоваться смешанной системой Гаусса, измеряя заряды в статических кулонах, ток — в статических амперах, магнитное поле — в электромагнитных единицах ( $\mu$  для вакуума становится равной 1) и электростатическое поле — в электростатических единицах ( $\epsilon$  для вакуума будет равна 1). Тогда уравнение (2.5.4) для установленного состояния принимает вид

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} = -4\pi \mathbf{J}, \quad (2.5.9)$$

а уравнение (2.5.5) принимает вид  $\mathbf{F} = (1/c) \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ , где  $c = \sqrt{1/\mu_0 \epsilon_0} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек} = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$ .

Так как уравнение неразрывности  $\partial\rho/\partial t = -\operatorname{div} \mathbf{J}$  остается в силе, мы должны получить тождество, взяв дивергенцию от (2.5.9) и производную по времени от (2.5.1) и приравняв их друг к другу. Однако левые части полученных уравнений оказываются неодинаковыми, так как в одной из них содержится член  $\operatorname{div}(\partial \mathbf{D}/\partial t)$ . Это не удивительно, так как оба эти уравнения выведены для стационарных полей, благодаря чему член, содержащий производную  $\mathbf{D}$  по времени, должен был исчезнуть. Уравнение для магнитного поля, зависящего от времени, очевидно, должно иметь вид

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{J}, \quad (2.5.10)$$

что подтверждается и опытом. Это уравнение называется уравнением *магнитной индукции* или контурным законом Ампера для  $\mathbf{H}$ . Магнитное поле появляется не только при наличии электрического тока; изменение электрического поля также вызывает появление магнитного поля.

**Уравнения Максвелла.** Мы уже почти пришли к симметричной форме уравнений поля; мы имеем два уравнения, в которых содержатся дивергенции векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  [уравнения (2.5.1) и (2.5.3)], и одно уравнение, содержащее вихрь вектора  $\mathbf{H}$  [уравнение (2.5.10)]. Для получения симметричной формы уравнений нам недостает четвертого уравнения, содержащего  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ . Однако четвертое уравнение не может быть полностью симметричным уравнению (2.5.10), так как если не существует магнитного заряда, то тем более не существует и магнитного тока. Наиболее близко можно подойти к симметрии, составив уравнение, связывающее  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  и  $\partial \mathbf{B}/\partial t$ . Это уравнение также подтверждается опытом; оно называется законом *электрической индукции* Фарадея и связывает изменение магнитного поля с вихрем электрического поля. Экспериментальные данные показывают, что в правую часть этого уравнения нужно ввести множитель  $-1/c$ . Таким образом, можно выписать четыре симметричных уравнения, связывающих поля с токами:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{c} 4\pi \mathbf{J}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

называемые *уравнениями Максвелла*. Сила, действующая на кубический сантиметр движущегося заряда, равна

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.5.12)$$

Эти уравнения являются основными уравнениями, определяющими классическое электромагнитное поле, получающееся при «сглаживании» зарядов и плотности тока.

Уравнения для скалярного и векторного потенциала также изменятся, если эти потенциалы зависят и от времени. Мы по-прежнему полагаем  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , так как тогда равенство  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  автоматически выполняется. Подставив это в уравнение для  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ , получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \text{ или } \operatorname{rot} \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0.$$

Вектор, вихрь которого равен нулю, может быть получен из скалярной потенциальной функции, так что вектор  $[\mathbf{E} + (1/c)(\partial \mathbf{A} / \partial t)]$  будет градиентом некоторого скаляра. В случае установившегося состояния мы имели  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ , где  $\varphi$  — скалярный потенциал; в общем случае мы можем функцию  $\varphi$  определить равенством

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.5.13)$$

Подставив эти выражения для  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  в уравнение для  $\operatorname{rot} \mathbf{H}$  (и приняв, что  $\varepsilon$  и  $\mu$  — постоянные), получаем

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\frac{\varepsilon}{c} \left[ \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right] + \frac{1}{c} 4\pi \mathbf{J}$$

или

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} \left[ \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] - \frac{\mu}{c} 4\pi \mathbf{J}.$$

Это уравнение для  $\mathbf{A}$  является обобщением уравнения (2.5.7), если величина, заключенная в квадратные скобки, равна нулю. Так как до сих пор определена только та часть вектора  $\mathbf{A}$ , для которой вихрь отличен от нуля, то всегда возможно подобрать дивергенцию  $\mathbf{A}$  таким образом, чтобы

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2.5.14)$$

Подставляя  $\mathbf{E}$  и  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  из уравнений (2.5.13) и (2.5.14) в последнее уравнение Максвелла, определяющее  $\operatorname{div} \mathbf{D}$  (опять-таки предполагается, что  $\mu$  и  $\varepsilon$  — постоянны), мы получим уравнение для скалярного потенциала. Совместно с окончательным уравнением для  $\mathbf{A}$  имеем

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \rho}{\varepsilon}, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \mu \mathbf{J}}{c}, \quad (2.5.15)$$

что служит для определения скалярного и векторного потенциалов, если известны  $\rho$  и  $\mathbf{J}$ . Если  $\rho$  и  $\mathbf{J}$  равны нулю, эти уравнения превращаются в волновые уравнения с волновой скоростью, равной  $c/\sqrt{1/\varepsilon \mu}$  в гауссовых единицах (или  $\sqrt{1/\varepsilon \mu}$  в системе MKS). Когда  $\varepsilon$  и  $\mu$  обе равны единице (в вакууме), скорость волн равна скорости света  $3 \cdot 10^{10}$  см/сек; в действительности она и является скоростью света. Из этих уравнений мы видим, что соотношение (2.5.14) между  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  является следствием уравнения неразрывности для  $\rho$  и  $\mathbf{J}$ . По аналогии с волнами в упругой среде мы назовем волны, связанные с  $\varphi$ , продольными волнами, а волны, связанные с  $\mathbf{A}$ , — поперечными.

**Запаздывание и релаксация.** Рассуждая так же, как и при выводе интеграла (1.4.8) для решения уравнения Пуассона в неограниченном пространстве, мы можем показать, что решения уравнений для  $\varphi(x, y, z, t)$

и  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$  в неограниченном пространстве при конечном распределении  $\rho(x, y, z, t)$  и  $\mathbf{J}(x, y, z, t)$  имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi^o(x, y, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R\varepsilon} \rho\left(x', y', z', t - \frac{R}{c'}\right) dx' dy' dz', \\ \mathbf{A}^o(x, y, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{Rc} \mathbf{J}\left(x', y', z', t - \frac{R}{c'}\right) dx' dy' dz',\end{aligned}\quad (2.5.16)$$

где  $c'^2 = c^2/\varepsilon\mu$ , и, как и раньше,  $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$ .

Эти интегральные решения показывают, что заряд и ток в точке  $x', y', z'$  влияют на потенциалы в точке  $x, y, z$  с запозданием на промежуток времени  $R/c'$ . Действие потенциала *запаздывает* на промежуток времени, в течение которого волна, движущаяся со скоростью  $c' = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ , проходит расстояние между точками  $x', y', z'$  и  $x, y, z$ . Так как волновое уравнение симметрично относительно изменения направления отсчета времени, мы можем получить другие решения, заменив в подинтегральных выражениях  $t - (R/c')$  на  $t + (R/c')$ . Однако до настоящего времени такие «опережающие» потенциалы почти не применяются на практике.

Задавая потенциалы, мы «переопределяем» соответствующие поля или, что то же, одному полю может соответствовать более чем одно семейство потенциалов. Решения, определяемые равенствами (2.5.16), могут быть видоизменены добавлением к каждому из них различных функций, связанных только требованием выполнения равенства (2.5.14). Другими словами, мы можем взять любую функцию  $\chi$ , удовлетворяющую подходящим граничным условиям, и образовать новые решения уравнений (2.5.15), полагая

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^o - \operatorname{grad} \chi, \quad \varphi = \varphi^o + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (2.5.17)$$

Тогда  $\operatorname{div} \mathbf{A} + (\mu\varepsilon/c) (\partial \varphi / \partial t) = -\nabla^2 \chi + (\mu\varepsilon/c^2) (\partial^2 \chi / \partial t^2)$ , так что уравнения для новых  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  могут отличаться от уравнений (2.5.15). Однако электрическое и магнитное поля (которые поддаются измерению) не зависят от выбора  $\chi$ . При определении вихря вектора  $\mathbf{A}$  (для получения  $\mathbf{B}$ ), член, содержащий  $\operatorname{grad} \chi$ , исчезает, а при подсчете  $\mathbf{E}$  по уравнению (2.5.13) члены, содержащие  $\operatorname{grad} (\partial \chi / \partial t)$ , уничтожаются. Эта инвариантность реальных полей при таких изменениях потенциалов, которые оставляют в силе уравнение (2.5.14), называемая *калибровочной*, или *градиентной инвариантностью*, будет вновь рассмотрена позже<sup>1)</sup>.

Решения уравнений Максвелла в областях, не содержащих свободных зарядов, могут быть при помощи этих изменений упрощены. В этом случае само  $\varphi$  является решением волнового уравнения, так что мы можем подобрать  $\chi$  таким образом, чтобы  $\varphi$  оказалось равным нулю; тогда можно вовсе не рассматривать скалярного потенциала. Это обозначает в связи с уравнением (2.5.14), что  $\mathbf{A}$  будет иметь дивергенцию, равную нулю; необходимые уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - 4\pi\mu \frac{\mathbf{J}}{c}.\end{aligned}\quad (2.5.18)$$

Даже при наличии свободных зарядов мы можем выбрать  $\mathbf{A}$  так, чтобы  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Тогда на основании уравнений (2.5.14) и (2.5.15) скалярный потенциал должен быть решением уравнения Пуассона  $\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho/\varepsilon$ .

<sup>1)</sup> В обычном определении градиентной инвариантности выполнение условия (2.5.14) не требуется.—Прим. ред.

Внутри металлических проводников нет свободных зарядов, а плотность тока пропорциональна  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , где  $\sigma$  — удельная проводимость металла. В этом случае уравнение для векторного потенциала становится однородным

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + 4\pi\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - c^2 \nabla^2 \mathbf{A} = 0. \quad (2.5.19)$$

Это уравнение очень похоже на уравнение (2.3.20) затухающих волн сжатия в жидкости. Член, содержащий  $\partial \mathbf{A} / \partial t$ , вызывает появление в решении множителя затухания, зависящего либо от времени, либо от положения точки в пространстве, либо от того и другого вместе, как и в случае волн сжатия.

Например, если волна является гармонической с частотой  $\omega/2\pi$ , зависимость от положения точки в пространстве выражается уравнением

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} [\mu\epsilon\omega^2 + 4\pi i\mu\sigma] \mathbf{A} = 0,$$

если зависимость от времени дается множителем  $e^{-i\omega t}$ . Это, как и на стр. 137, представляет собой затухание волны в пространстве. С другой стороны, для стоячих волн, где  $\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$ , уравнение, определяющее зависимость от времени, принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{c^2 k^2}{\mu\epsilon} \mathbf{A} = 0$$

и соответствует колебаниям, затухающим с течением времени. Такие свободные колебания тока внутри проводника называются *релаксационными колебаниями*.

**Преобразование Лоренца.** В пространстве, где  $\mu$  и  $\epsilon$  обе равны единице, скорость распространения волн равна  $c$ , т. е. скорости света. В этом случае следует ожидать, что уравнения (2.5.11) и (2.5.15), связывающие поля и потенциалы с током и зарядами, имеют простую связь с преобразованием Лоренца, рассмотренным в § 1.7. Оператор ( $\mu = \epsilon = 1$ )

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

называемый *оператором Даламбера* (даламбертианом), очевидно [см. (1.7.6)] обладает инвариантностью формы относительно преобразования Лоренца (см. стр. 100). Говоря, что уравнения для  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  являются инвариантами преобразования Лоренца, мы подразумеваем, что они имеют ту же форму для каждого наблюдателя независимо от его относительной скорости (до тех пор, пока она постоянна). Это будет иметь место, если величина  $(J_x, J_y, J_z, i\rho c) = \mathbf{I}$  есть 4-вектор, преобразующийся по формулам (1.7.4). Наиболее простой способ проверить, что  $\mathbf{J}$  является 4-вектором, состоит в том, чтобы показать, что его «скалярное произведение» на какой-либо 4-вектор является инвариантом преобразования Лоренца. Известным четырехмерным векторным оператором является четырехмерный градиент с компонентами

$$\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} \right) = \square.$$

«Скалярное произведение» этих двух величин

$$\square \cdot \mathbf{I} = \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

равно нулю в силу уравнения неразрывности [уравнение (2.3.1) и стр. 199]. Нуль наверняка является инвариантом преобразования Лоренца, так что мы доказали, что  $\mathbf{I}$ , включающий в себя  $\mathbf{J}$  и  $i\varphi$ , является 4-вектором. Другими словами, выраженные в координатах

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = i\varphi,$$

компоненты

$$I_1 = \mathbf{J}_x, \quad I_2 = \mathbf{J}_y, \quad I_3 = \mathbf{J}_z, \quad I_4 = i\varphi$$

и

$$V_1 = A_x, \quad V_2 = A_y, \quad V_3 = A_z, \quad V_4 = i\varphi$$

являются компонентами двух 4-векторов. Уравнения

$$\square \cdot \mathbf{I} = \sum_n \frac{\partial I_n}{\partial x_n} = 0 \text{ и } \square \cdot \mathbf{V} = \sum_n \frac{\partial V_n}{\partial x_n} = 0,$$

инвариантные относительно преобразования Лоренца, являются как раз уравнением неразрывности и уравнением (2.5.14), связывающим  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ . Совокупность четырех уравнений для четырех компонент уравнения

$$\square^2 \mathbf{V} = -\frac{4\pi \mathbf{I}}{c}$$

представляет собой инвариантные относительно преобразования Лоренца уравнения (2.5.15), волновые уравнения потенциалов.

Электрическое и магнитное поля не являются 4-векторами. На основании уравнения (2.5.13) (и вспоминая, что при  $\epsilon = \mu = 1$  имеем  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ ) получаем

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \left[ \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right],$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = i \left[ \frac{\partial V_4}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_4} \right].$$

Но выражения, стоящие в квадратных скобках, являются компонентами кососимметричного тензора (или, лучше сказать, четырехмерного аффинора)  $\mathfrak{F}$  с компонентами

$$f_{mn} = \frac{\partial V_n}{\partial x_m} - \frac{\partial V_m}{\partial x_n}, \quad f_{11} = f_{22} = f_{33} = f_{44} = 0,$$

$$f_{12} = -f_{21} = H_z, \quad f_{13} = -f_{31} = -H_y, \quad f_{23} = -f_{32} = H_x,$$

$$f_{14} = -f_{41} = -iE_x, \quad f_{24} = -f_{42} = -iE_y, \quad f_{34} = -f_{43} = -iE_z.$$

Уравнения Максвелла можно теперь записать в форме, инвариантной относительно преобразования Лоренца. Компоненты уравнения  $\square \cdot \mathfrak{F} = (4\pi/c) \mathbf{I}$

$$\sum_n \frac{\partial f_{mn}}{\partial x_n} = \frac{4\pi}{c} I_m \quad (2.5.20)$$

соответствуют уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho \text{ при } m=4 \text{ и } \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad \text{при } m=1, 2, 3.$$

Уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{E} + (1/c) (\partial \mathbf{H} / \partial t) = 0$ , которые соответствуют выражениям  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  через потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  [уравнения (2.5.13) и  $\mathbf{H} = (1/\mu) \operatorname{rot} \mathbf{A}$ ], могут быть теперь записаны в форме уравнений

$$\frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_4} = 0,$$

$$\frac{\partial f_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_4} = 0, \quad \frac{\partial f_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_4} = 0,$$

которые, как можно доказать, являются также инвариантами преобразования Лоренца [поскольку для случая трехмерного пространства равенство (1.5.3) показывает, что величины  $c_{23} - c_{32} = b_1$  и т. д. являются компонентами трехмерного вектора, то для четырехмерного пространства величины  $c_{123} + c_{231} + c_{312} = b_4$  и т. д. являются компонентами псевдовектора].

В качестве примера применения к полям преобразования Лоренца мы начнем с координат  $x'_1$  и т. д., потенциалов  $A'_1$  и т. д. и полей  $E'_1$  и т. д. для наблюдателя  $B$ , неподвижного относительно штрихованных координат. Для наблюдателя  $A$ , движущегося относительно  $B$  со скоростью  $u = c \operatorname{th} \alpha$  вдоль оси  $x$ , координаты, ток, заряд и потенциалы принимают вид [см. уравнения (1.7.2) и (1.7.4)]

$$\begin{aligned} x &= x' \operatorname{ch} \alpha + ct' \operatorname{sh} \alpha, \quad y = y', \quad z = z', \\ ct &= x' \operatorname{sh} \alpha + ct' \operatorname{ch} \alpha, \\ J_x &= J'_x \operatorname{ch} \alpha + cp' \operatorname{sh} \alpha, \quad J_y = J'_y, \quad J_z = J'_z, \\ cp &= J'_x \operatorname{sh} \alpha + cp' \operatorname{ch} \alpha, \\ A_x &= A'_x \operatorname{ch} \alpha + \varphi' \operatorname{sh} \alpha, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z, \\ \varphi &= A'_x \operatorname{sh} \alpha + \varphi' \operatorname{ch} \alpha, \\ \operatorname{th} \alpha &= \frac{u}{c}, \quad \operatorname{sh} \alpha = \frac{u}{\sqrt{c^2 - u^2}}, \quad \operatorname{ch} \alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}}. \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

Мы должны были ожидать, что новая компонента тока по оси  $x$  содержит член с  $p'$ , так как заряд теперь движется; но трудно было ожидать, что новая плотность заряда содержит слагаемое, зависящее от компоненты тока по оси  $x$ .

Поля, являясь компонентами тензора, подчиняются соответствующим правилам преобразования

$$E_x = i f_{14} = i \sum_{mn} \gamma_{1m} \gamma_{4n} f'_{mn} = i \operatorname{ch}^2 \alpha f_{14} + i \operatorname{sh}^2 \alpha f_{41} = i f'_{14} = E'_x \text{ и т. д.},$$

так что

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, \quad E_y = E'_y \operatorname{ch} \alpha + H'_z \operatorname{sh} \alpha, \quad E_z = E'_z \operatorname{ch} \alpha - H'_y \operatorname{sh} \alpha, \\ H_x &= H'_x, \quad H_y = H'_y \operatorname{ch} \alpha - E'_z \operatorname{sh} \alpha, \quad H_z = H'_z \operatorname{ch} \alpha + E'_y \operatorname{sh} \alpha. \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

Мы видим, что электрическое и магнитное поля при движении перемещиваются; оно впрочем и не удивительно, так как мы видели раньше, что неподвижный заряд порождает только электрическое поле, заряд же движущийся порождает также и магнитное поле.

**Калибровочное преобразование.** Хотя в наших формальных рассуждениях и удобнее считать, что векторный и скалярный потенциалы являются компонентами 4-вектора, однако они, вообще говоря, меняются при преобразовании Лоренца не таким простым способом. Конечно, электрическое и магнитное поля должны преобразовываться, как элементы четырехмерного аффинора  $f_{nm}$ , так как они являются физически измеримыми величинами и должны удовлетворять уравнениям Максвелла, согласующимся с преобразованием Лоренца. Но при рассмотрении потенциалов, как было указано на стр. 201, имеется известная свобода выбора. Если мы свяжем потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  обычным уравнением  $\operatorname{div} \mathbf{A} + (1/c)(\partial \varphi / \partial t) = 0$ , то потенциал  $(\mathbf{A}, i\varphi)$  окажется 4-вектором. Но если мы произведем *калибровочное преобразование* вида  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \operatorname{grad} \chi$ ,  $\varphi' = \varphi + (1/c)(\partial \chi / \partial t)$ , где  $\chi$  является решением волнового уравнения, то новые потенциалы  $(\mathbf{A}', i\varphi')$  уже не обязательно образуют 4-вектор, хотя поля, полученные с их помощью, совпадают с полями, полученными до преобразования.

Инвариантность полей при *калибровочном* преобразовании потенциалов дает нам возможность выбора либо такой формы для потенциалов, которая при преобразовании Лоренца ведет себя, как 4-вектор, но может оказаться не особенно простой для вычисления, либо такой формы, которая легко вычисляется в частной системе Лоренца, но поведение которой при преобразовании Лоренца труднее изучить.

Например, если для частной системы Лоренца мы выберем калибровку так, чтобы  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ , то мы сможем более полно, чем при любом другом выборе калибровки, провести разделение между «продольными» и «поперечными» полями (для этой системы Лоренца). Уравнения для новых  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  (которые мы будем обозначать через  $\mathbf{A}^\circ$  и  $\varphi^\circ$ ) можно получить, повторив вычисления, сделанные между выводами уравнений (2.5.13) и (2.5.15); при новом предположении  $\operatorname{div} \mathbf{A}^\circ = 0$ . Уравнение для скалярного потенциала упрощается; оно принимает вид

$$\nabla^2 \varphi^\circ = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.5.23)$$

то есть становится уравнением Пуассона, которое всегда играет основную роль в случаях установившегося состояния. Однако в данном случае мы не требуем, чтобы  $\rho$  было независимым от времени; скалярный потенциал  $\varphi^\circ$  должен изменяться без запаздывания в зависимости от изменения  $\rho$ , так как здесь нет члена  $(1/c^2)(\partial^2\varphi/\partial t^2)$ , вызывающего запаздывание (это само по себе делает ясным, что  $\varphi^\circ$  не может быть временной компонентой четырехмерного вектора). Так как уравнение Пуассона обычно решить легче, чем неоднородное волновое уравнение, то уравнение (2.5.23) решается проще, чем первое из уравнений (2.5.15). Получающийся потенциал  $\varphi^\circ$  обусловлен свободным зарядом  $\rho$ .

Если уравнение (2.5.23), выражающее  $\varphi^\circ$  через свободный заряд, решено, то может быть решено и уравнение для соответствующего  $\mathbf{A}^\circ$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}^\circ + \frac{\mu_0}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^\circ}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{J} - \frac{\epsilon_0\mu}{c} \operatorname{grad} \left( \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial t} \right), \quad (2.5.24)$$

если считать в нем  $\varphi^\circ$  уже известным. Полученное решение обусловлено только поперечным током, или током несвободных зарядов, так как  $\mathbf{J}$  может быть расщеплено на два слагаемых (см. стр. 59): одно  $\mathbf{J}_t$  с дивергенцией, равной нулю, может быть представлено как вихрь некоторого вектора, другое  $\mathbf{J}_l$  с вихрем, равным нулю, может быть записано как градиент некоторого скаляра

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_t + \mathbf{J}_l, \quad \mathbf{J}_l = \operatorname{grad} Q, \quad \mathbf{J}_t = \operatorname{rot} \mathbf{C}.$$

Но в силу уравнения неразрывности, связывающего  $\mathbf{J}$  и  $\rho$ , имеем  $\operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div} \mathbf{J}_l = -(\partial \rho / \partial t)$ , уравнение, связывающее продольную часть  $\mathbf{J}$  со скоростью изменения свободного заряда. Сравнив это уравнение с про-дифференцированным по времени уравнением (2.5.23) (и вспомнив, что  $\nabla^2 = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ ), найдем, что

$$l = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial t}.$$

Поэтому уравнение (2.5.24) можно переписать в форме, зависящей только от поперечного тока  $\mathbf{J}_t$ , который не связан со скоростью изменения свободного заряда

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{A}^\circ) + \frac{\mu_0}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^\circ}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{J}_t.$$

Поэтому, если свободного заряда  $\rho$  нет и весь ток — поперечный,  $\varphi^\circ$  может быть сделано равным нулю и поля могут быть подсчитаны

с помощью одного только векторного потенциала  $\mathbf{A}^o$ . Если же имеется свободный заряд,  $\phi^o$  вычисляется в зависимости от него, однако на  $\mathbf{A}^o$  этот заряд не влияет. (Заметим, что эта калибровка не является лоренцево-инвариантной.)

**Поле движущегося заряда.** В качестве примера приложения общих преобразований, рассмотренных выше, найдем поле, порожденное точечным зарядом, движущимся вдоль оси  $x$  со скоростью  $u = c \operatorname{th} \alpha$ . Мы можем найти это поле, подсчитав запаздывающие потенциалы из уравнений (2.5.16); можно также найти статическое поле от неподвижного заряда, а затем перейти к движущейся системе с помощью приведенного только что преобразования Лоренца. Второй путь, как мы вскоре увидим, проще.

Рассмотрим сначала неподвижный точечный заряд  $Q$ , находящийся в начале координат штрихованной системы. Тогда потенциалы и поля в точке  $(x', y', z')$  будут

$$\varphi' = \frac{Q}{r'}, \quad \mathbf{A}' = 0, \quad \mathbf{E}' = \frac{Q}{(r')^3} \mathbf{r}', \quad \mathbf{H}' = 0,$$

где  $\mathbf{r}' = ix' + jy' + kz'$ . Это поле, образованное простым источником, рассмотрено на стр. 27.

Перейдем теперь к системе нештрихованных координат, двигающейся со скоростью  $u = c \operatorname{th} \alpha$  в направлении оси  $x$ . В момент времени  $t$  заряд находится на расстоянии  $ut$  по оси  $x$  от начала координат. Связь между штрихованными и нештрихованными координатами дается уравнениями (2.5.21) или равенствами

$$x' = x \operatorname{ch} \alpha - ct \operatorname{sh} \alpha, \quad y' = y, \quad z' = z$$

$$ct' = -x \operatorname{sh} \alpha + ct \operatorname{ch} \alpha,$$

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}, \quad \operatorname{sh} \alpha = \frac{u/c}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}.$$

Величина  $r'$  также должна быть выражена в нештрихованных координатах

$$(r')^2 = (x - ut)^2 \operatorname{ch}^2 \alpha + y^2 + z^2 = \frac{s^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = s^2 \operatorname{ch}^2 \alpha,$$

$$\text{где } s^2 = (x - ut)^2 + (y^2 + z^2) \left[ 1 - \frac{u^2}{c^2} \right].$$

Принимая во внимание уравнения (2.5.21), мы видим, что потенциалы для движущегося заряда можно взять в форме [пользуясь калибровкой (2.5.14)]

$$\varphi = \varphi' \operatorname{ch} \alpha = \frac{Q}{s}, \quad \mathbf{A} = i\varphi' \operatorname{sh} \alpha = \frac{Q}{sc} \mathbf{u}, \quad (2.5.25).$$

где  $\mathbf{u} = iu$  есть вектор, представляющий постоянную скорость заряда в нештрихованной системе координат. Воспользовавшись уравнениями (2.5.22) или продифференцировав соответствующим образом потенциалы, мы получим электрическое и магнитное поля движущегося заряда

$$\mathbf{E} = Q \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\mathbf{r}}{s^3}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{E}, \quad (2.5.26),$$

где  $\mathbf{r} = (x - ut)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  — вектор, идущий от заряда к точке  $x, y, z$ , в которой производятся измерения; положение заряда рассматривается в момент измерения  $t$ .

Надо заметить, что в случае, когда величиной  $u^2$  можно пренебречь по сравнению с  $c^2$ ,  $s$  становится равным  $r$  и получаются известные выражения для полей медленно движущегося заряда

$$\mathbf{E} \simeq Q \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{H} \simeq \frac{Q}{c} \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Точные выражения, данные в (2.5.26), приводят к некоторым искажениям вследствие того, что они содержат релятивистскую поправку, зависящую от максимальной, не равной бесконечности относительной скорости  $c$ . Например, эквипотенциальные поверхности для  $\varphi$  не являются сферами, а представляют собой сплющеные сфероиды, малые оси которых по направлению совпадают с направлением движения заряда; отношение малой и большой осей этих сфероидов равно  $\sqrt{1 - (u^2/c^2)}$ . В предельном случае, при высшей скорости частицы ( $u \rightarrow c$ ), поле сжимается в тонкий диск, перпендикулярный к  $\mathbf{u}$ , в центре которого находится заряд  $Q$ ; практически мы имеем здесь дело с плоским волновым импульсом.

Можно предположить, что эти потенциалы и поля должны быть *запаздывающими*, то есть что они должны быть выражены через обычные потенциалы, соответствующие некоторому более раннему положению заряда. Наивное рассмотрение уравнений (2.5.16) подсказывает нам, что  $\varphi$  должно быть равно  $Q$ , деленному на  $r_r$ , где  $r_r$  — расстояние между точкой  $x, y, z$  и положением заряда в момент времени на  $r_r/c$  более ранний, чем  $t$  — момент измерения потенциала в точке  $x, y, z$ . Изучение рис. 2.22 показывает, что величина  $s$ , содержащаяся в выражениях потенциалов, не равна  $r_r$  — длине отрезка  $PQ_r$ , но равна длине отрезка  $PR$ , где  $QR$  перпендикулярно к  $PR$ . В самом деле,  $s$  равно

$$r_r + \frac{u}{c} X_r = r_r - \frac{1}{c} \mathbf{r}_r \cdot \mathbf{u} = r_r \left[ 1 - \frac{1}{c} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{u} \right],$$

где  $\mathbf{a}_r$  — единичный вектор, направленный от точки  $Q_r$  к точке  $P$ . Поэтому потенциалы могут быть выражены через расстояния и направления, соответствующие положению заряда в момент  $t - (r_r/c)$ , что и понимается под запаздывающим потенциалом. Если мы сможем выяснить, как при вычислении  $\varphi$  из уравнения (2.5.16) появляется неожиданный множитель  $[1 - (1/c) \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{u}]$ , мы полностью согласуем друг с другом два метода вычисления потенциалов (и, как это обычно бывает при таком согласовании, немного больше познакомимся с математической физикой).

Причина трудности заключается в отмеченном на стр. 150 различии двух способов описания движения жидкости. Уравнения (2.5.16) для запаздывающих потенциалов содержат под знаком интеграла множители, определяющие заряд и плотность тока в системе координат, неподвижной относительно наблюдателя. Однако в случае движущейся частицы распределение плотности заряда остается постоянным, если оно выражено в системе координат, неподвижной относительно частицы (т. е. движущейся относительно наблюдателя). Пренебрегая преобразованием координат, которое должно быть сделано раньше интегрирования, мы в результате теряем необходимый множитель  $[1 - (1/c) \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{u}]$ .

Это показано на второй части рис. 2.22, где мы увеличили рисунок настолько, чтобы показать размеры частицы и распределение заряда. Отсюда видно, что как бы мала ни была частица, ее движение должно быть

принято во внимание при выполнении интегрирования. Для той части заряда, которая удалена от наблюдателя на расстояние  $r_r$ , мы берем положение частицы в момент  $t - (r_r/c)$ , для части же заряда, удаленной на расстояние  $r_r + dr_r$ , мы берем положение в момент  $t - (r_r/c) - (dr_r/c)$ , учитывая смещение  $dr_r/c$  назад вдоль оси  $x$ . С помощью несложного рассуждения можно убедиться в том, что при интегрировании величина заряда  $dq$ , находящегося внутри элемента объема  $dA dr_r$ , равна не  $\rho dA dr_r$ ,

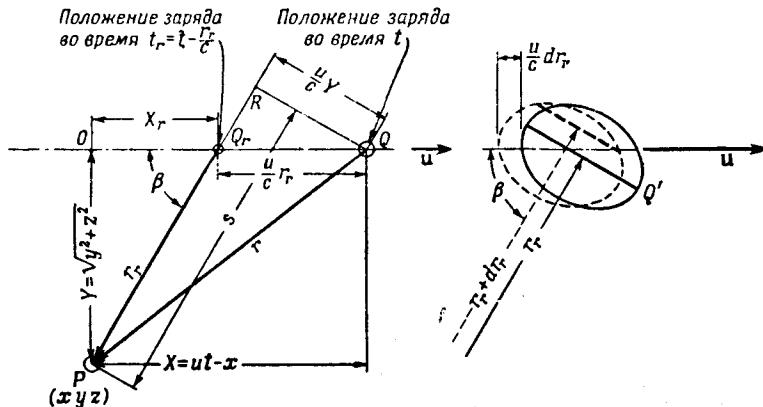


Рис. 2.22. Расстояния и углы, встречающиеся при вычислении запаздывающих потенциалов для заряда  $Q$ , движущегося со скоростью  $u$  по отношению к наблюдателю, находящемуся в точке  $P$ .

как было бы, если бы заряд не двигался, а  $[1 + (u/c) \cos \beta] \rho dA dr_r$ . Поэтому  $\rho dA dr_r$  равно  $dq [1 + (u/c) \cos \beta]^{-1}$  и, если размеры частицы достаточно малы, интеграл (2.5.16) становится равным

$$\frac{\int dq}{r_r [1 + (u/c) \cos \beta]} = \frac{Q}{r_r [1 - (1/c) \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{u}]} = \frac{Q}{s},$$

что в точности совпадает со значением, полученным нами в уравнении (2.5.25) с помощью преобразования Лоренца статического потенциального поля.

Таким образом, мы видим, что потенциал, вызванный в момент  $t$  движущимся зарядом, отличается от потенциала, соответствующего этому заряду в более раннем положении, множителем, связывающим скорость частицы в этом более раннем положении со скоростью светового сигнала, идущего от частицы к наблюдателю, т. е. множителем  $[1 - (\mathbf{u}/c) \cdot \mathbf{a}_r]$ . Это более раннее положение частицы может быть определено, если мы представим себе, что частица посылает световые сигналы к наблюдателю; положение, использованное в уравнениях (2.5.25) и (2.5.26), является тем, из которого посланный световой сигнал достигает наблюдателя точно в момент  $t$ .

Междуд прочим, уравнения (2.5.25) для потенциалов сохраняют свою силу даже в том случае, когда скорость частицы  $u$  изменяется с течением времени, если мы будем считать, что  $s$  равно  $r_r [1 - (\mathbf{u}/c) \cdot \mathbf{a}_r]$ <sup>1</sup>). Выражения для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  при наличии ускорения заряда будут, конечно, отличаться от тех, которые даны в уравнениях (2.5.26), так как  $u$

<sup>1)</sup> Потенциалы произвольно движущегося точечного заряда, записанные в форме (2.5.25), с заменой  $s$  на  $r_r (1 - \frac{\mathbf{u}}{c} \cdot \mathbf{a}_r)$ , называются потенциалами Льена — Вихерта. — Прим. ред.

теперь зависит от времени и это должно быть учтено при дифференцировании.

**Сила и энергия.** Трехмерный вектор  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{E} + (1/c) \mathbf{J} \times \mathbf{B}$  определяет силу, действующую на кубический сантиметр тока и заряда. Этот вектор является пространственной частью 4-вектора, «временная компонента» которого пропорциональна работе на кубический сантиметр, производимой полем в секунду при наличии тока, т. е. величине  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ . Рассмотрение уравнений (2.5.20) показывает, что величина  $\mathbf{k}$  с компонентами

$$k_m = \frac{1}{c} \sum_{n=1}^4 f_{mn} I_n, \quad m = 1, 2, 3, 4, \quad (2.5.27)$$

и является этим 4-вектором; пространственные компоненты  $\mathbf{k}$  равны трем компонентам вектора  $\mathbf{F}$ , а временная компонента  $k_4 = i (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}/c)$ .

Интеграл от  $ck_4/i$  по объему, лежащему внутри некоторой замкнутой поверхности, равен полной величине работы поля за единицу времени, затраченной внутри этого объема на перемещение заряда; эта величина должна быть равна скорости уменьшения внутренней энергии  $U$ , которой поле обладало в данном объеме, минус мощность, излучающаяся через поверхность, ограничивающую объем. Воспользовавшись уравнениями (2.5.11) и предполагая, что  $\epsilon$  и  $\mu$  не зависят от времени, получим

$$\begin{aligned} \iiint \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV &= \frac{c}{4\pi} \iiint \mathbf{E} \cdot \left[ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] dV = \\ &= \frac{c}{4\pi} \iiint \left[ \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} \right] dV = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV - \frac{c}{4\pi} \iiint \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint U dV - \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}, \end{aligned}$$

где

$$U = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad \text{и} \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (2.5.28)$$

Как и ожидалось, мы здесь имеем скорость изменения интеграла по объему минус интеграл потока. Величина  $U$ , фигурирующая в скорости изменения интеграла по объему, должна быть плотностью энергии поля, а вектор  $\mathbf{S}$ , содержащийся в выражении интеграла потока, должен быть плотностью потока энергии поля. Вектор  $\mathbf{S}$  называется *вектором Пойнтинга*.

Возвращаясь к уравнению (2.5.27) для 4-вектора  $\mathbf{k}$  силы-мощности (полагая снова  $\epsilon = \mu = 1$ ) и подставляя в него вместо  $I_m$  их выражения через производные функций  $f_{mn}$ , получаем

$$k_m = \frac{1}{4\pi} \sum_{r,s} f_{mr} \frac{\partial f_{rs}}{\partial x_s}.$$

Представляет некоторый интерес показать, что 4-вектор  $\mathbf{k}$  может быть получен свертыванием тензора «напряжения-энергии»  $\mathfrak{T}$ , где

$$T_{ms} = -\frac{1}{4\pi} \sum_r f_{mr} f_{sr} + \frac{1}{16\pi} \sum_{r,n} (f_{rn})^2 \delta_{ms}. \quad (2.5.29)$$

Свернутая форма имеет вид

$$\sum_s \frac{\partial}{\partial x_s} T_{ms} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{r,s} f_{mr} \frac{\partial f_{sr}}{\partial x_s} - \frac{1}{4\pi} \sum_{r,s} \frac{\partial f_{mr}}{\partial x_s} f_{sr} + \frac{1}{8\pi} \sum_{r,n} f_{rn} \frac{\partial f_{rn}}{\partial x_m}.$$

Первая сумма равна как раз  $k_m$ , так как  $f_{sr} = -f_{rs}$ . В третьей сумме мы воспользуемся соотношениями  $\frac{\partial f_{rn}}{\partial x_m} = -\frac{\partial f_{mr}}{\partial x_n} - \frac{\partial f_{nm}}{\partial x_r}$ , приведенными на стр. 203. Получаем, мечая обозначения индексов суммирования,

$$-\frac{1}{8\pi} \sum_{r,n} f_{rn} \left( \frac{\partial f_{mr}}{\partial x_n} + \frac{\partial f_{nm}}{\partial x_r} \right) = \frac{1}{8\pi} \sum_{r,s} \frac{\partial f_{mr}}{\partial x_s} f_{sr} + \frac{1}{8\pi} \sum_{k,n} f_{kn} \frac{\partial f_{mn}}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi} \sum_{r,s} \frac{\partial f_{mr}}{\partial x_s} f_{sr},$$

что полностью уничтожает вторую сумму. Итак,

$$k_m = \sum_s \frac{\partial}{\partial x_s} T_{ms},$$

где

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{8\pi} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) \quad \text{и т. д.}, \\ T_{12} &= \frac{1}{4\pi} (E_x E_y + H_x H_y) = T_{21} \quad \text{и т. д.}, \\ T_{14} &= \frac{i}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_x = \frac{i}{c} S_x = T_{41} \quad \text{и т. д.}, \\ T_{44} &= \frac{1}{8\pi} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) = U. \end{aligned} \tag{2.5.30}$$

Тензор  $\mathfrak{T}$  называется *тензором напряжения-энергии Максвелла*. Он аналогичен тензору напряжения-энергии, определенному в уравнении (1.7.8). Пространственные компоненты могут рассматриваться как своего рода электромагнитные напряжения; пространственно-временные компоненты, пропорциональные потоку энергии, можно рассматривать как величины, пропорциональные импульсу поля; член  $T_{44}$  определяет плотность энергии поля, аналогичную рассмотренной раньше плотности массы среды.

**Поверхности проводников и диэлектриков.** Двухтипа граничных условий часто встречаются в вопросах электромагнетизма; граничные условия, связывающие поля на поверхности, разделяющей два диэлектрика, где диэлектрическая постоянная  $\epsilon$  (или магнитная проницаемость  $\mu$ ) резко меняет свое значение и граничные условия на свободных поверхностях металлического проводника. В случае границы между двумя диэлектриками обычно можно пренебречь проводимостью среды и предположить, что нет ни свободных зарядов, ни тока. Граничные условия, связывающие нормальные и тангенциальные составляющие электрического поля по обе стороны от границы, могут быть получены из уравнений Максвелла (2.5.11).

Выберем, как показано на рис. 2.23, элементарный контур и подсчитаем циркуляцию  $\mathbf{E}$  по этому контуру. При малом  $l$  этот интеграл (приближенно) равен  $l \omega |\operatorname{rot} \mathbf{E}|$ . Если  $\omega$  мало по сравнению с  $l$ , циркуляция вдоль указанного контура равна  $l (E^\circ - E_t^i)$ , где  $E^\circ, E_t^i$  — тангенциальные компоненты полей по обе стороны границы. В случае стационарного состояния  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  должен быть равен нулю, так что  $E_t^i$  и  $E_t^i$  должны равняться между собой.

Поток поля  $\mathbf{D}$ , взятый по показанной на рис. 2.23 поверхности, равен  $A (D_n^\circ - D_n^i)$ , если  $\delta$  исчезающе мало (здесь  $D_n^\circ$  и  $D_n^i$  — нормальные компоненты поля  $\mathbf{D}$ ); согласно определению, этот интеграл пропорционален  $\operatorname{div} \mathbf{D}$ . При отсутствии свободных зарядов  $\operatorname{div} \mathbf{D}$  равна нулю, так что нормальные компоненты поля  $\mathbf{D}$  меняются непрерывно при пересечении границы.

Подобно этому для границы, при пересечении которой меняется проницаемость  $\mu$ , в случае установившегося состояния будут непрерывны нормальные компоненты поля  $B$  и тангенциальные компоненты поля  $H$ . Нетрудно вывести соответствующие граничные условия и для потенциалов.

Металлический проводник имеет большую электропроводность  $\sigma$ , и, следовательно, малое время релаксации (см. стр. 202). Во многих случаях, включающих и случай полей с периодами колебаний, большиими, чем время релаксации, можно предположить, что проводимость металлического проводника равна бесконечности, а время релаксации его равно нулю. Свободный заряд может находиться только на поверхности такого проводника, причем распределение этого заряда как раз таково, чтобы уничтожить внешнее электрическое поле, так как внутри идеального проводника электрическое поле не может существовать.

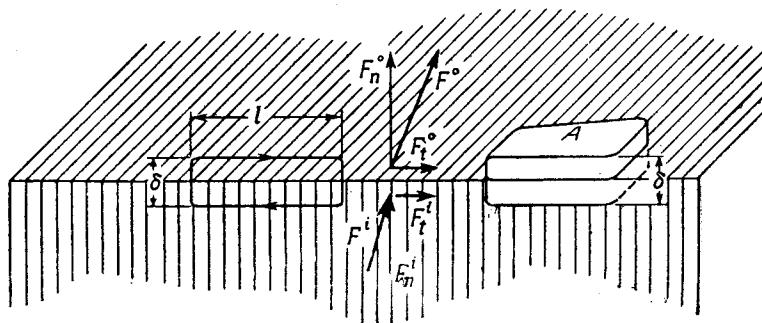


Рис. 2.23. Элементарные контуры и площадки для нахождения связи внутренних и внешних полей у граничных поверхностей.

Прежде всего на внешней стороне поверхности проводника тангенциальная составляющая электрического поля  $E_t^o$  должна быть равна нулю; векторы электрического поля всюду в точках поверхности нормальны к ней. Воспользовавшись элементарной площадкой, показанной на рис. 2.23, мы видим, что поток поля  $D$  будет равен  $AD^o$ , так как  $D^o$  нормально к поверхности, а  $D^i$  равно нулю. Для того чтобы это имело место, нужно, чтобы на поверхности проводника имелся заряд с поверхностной плотностью  $\rho = D^o / 4\pi$  [для того чтобы удовлетворялось уравнение (2.5.1)]. Так как векторы электрического поля всюду в точках поверхности проводника нормальны к этой поверхности, то эта поверхность должна быть экипотенциальной  $\phi = \text{const}$  (по крайней мере в случае установившегося состояния).

Поведение магнитного поля вблизи проводника лучше рассмотреть на примере.

**Передача волн и импеданс.** В качестве примера решения уравнений Максвелла рассмотрим в предварительном порядке поле внутри концентрической линии передачи, состоящей из двух длинных коаксиальных цилиндров, являющихся проводниками; пространство между цилиндрами заполнено одиородной средой с постоянными диэлектрической постоянной  $\epsilon$ , магнитной проницаемостью  $\mu$  и проводимостью  $\sigma$  (см. рис. 2.24). Предположим, что внешний радиус внутреннего цилиндра равен  $a$ , внутренний радиус внешнего цилиндра равен  $b$ ; обозначим через  $z$  расстояние по оси от одного из концов линии и через  $r$  — расстояние точки от оси.

Можно предположить, что в пространстве между проводниками нет свободных зарядов, так что нужно пользоваться только векторным потенциалом и можно применять уравнения (2.5.18) и (2.5.19). Электрическое поле должно быть нормальным к поверхностям обоих проводников, и, следовательно, векторы поля направлены по радиусам при  $r=a$  и при  $r=b$ . Для достижения этого проще всего предположить, что поле  $\mathbf{E}$  везде радиально; последнее проще всего получается, если предположить, что векторы векторного потенциала  $\mathbf{A}$  везде направлены по радиусам. В то же время  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  должна быть равна нулю; если  $\mathbf{A}$  радиально ( $\mathbf{A}=A\mathbf{a}_r$ ), то  $\operatorname{div} \mathbf{A}=(1/r)(\partial/\partial r)(rA)$ , как указано на стр. 116. Чтобы дивергенция  $\mathbf{A}$  была равна нулю, нужно, чтобы модуль вектора  $\mathbf{A}$  был равен произведению  $1/r$  на функцию от  $z$ ,  $\varphi$  и  $t$  (так как тогда  $rA$  не

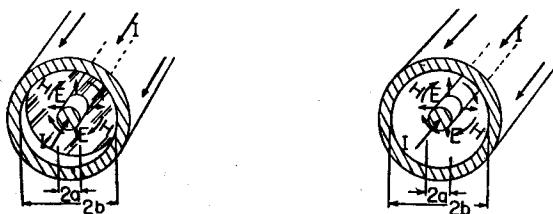


Рис. 2.24. Поля и токи в случае концентрической линии передачи (бронированный провод).

зависит от  $r$  и производная этого произведения по  $r$  равна нулю). В прошлом случае мы предположим, что  $A$  не зависит от  $\varphi$

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}_r}{r} \psi(z, t). \quad (2.5.31)$$

Ссылаясь опять на стр. 117, мы видим, что лапласиан от  $\mathbf{A}$  имеет вид

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{a}_r \left[ \nabla^2 \left( \frac{\psi}{r} \right) - \left( \frac{\psi}{r^3} \right) \right] = \frac{\mathbf{a}_r}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2},$$

так что уравнение (2.5.19) дает для части  $\psi$  амплитуды векторного потенциала, зависящей от  $z$  и  $t$ , следующее простое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{4\pi \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (2.5.32)$$

Уравнение этого вида встречалось в наших рассуждениях при изучении движения струны на стр. 135. Решения этого уравнения определяют волны, затухающие либо с течением времени, либо в зависимости от расстояния.

Предположим теперь, что линия передачи подвергается в конце  $z=0$  воздействию с частотой  $\omega/2\pi$ . В этом случае зависимость от времени будет простой гармонической, т. е.  $\psi$  будет иметь множитель  $e^{-i\omega t}$ , а затухание будет происходить при перемещении в пространстве вдоль оси  $z$ . Подставляя в (2.5.32)  $\psi=e^{-i\omega t}\psi_1(z)$ , получаем

$$\frac{d^2 \psi_1}{dz^2} + \left[ \frac{\mu \epsilon \omega^2}{c^2} + \frac{4\pi i \mu \sigma \omega}{c^2} \right] \psi_1 = 0.$$

Решение в этом случае выражается через показательные функции

$$\psi_1 = \beta e^{-xz+i(w/c)(nz-ct)} + \gamma e^{xz-i(w/c)(nz-ct)}, \quad (2.5.33)$$

где

$$x = \frac{\omega}{c} V \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{16\pi^2 \sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - \frac{1}{2}} \simeq \frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad \sigma \ll \epsilon \omega$$

и

$$n = \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{16\pi^2 \sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + \frac{1}{2}} \simeq \sqrt{\epsilon \mu}, \quad \sigma \ll \epsilon \omega.$$

Первый член представляет собой синусоидальную волну, распространяющуюся в направлении положительных  $z$  со скоростью  $c/n$ , с затуханием, пропорциональным  $x$ . Второй член определяет синусоидальную волну, движущуюся в направлении отрицательных  $z$  с теми же скоростью и затуханием. Это наиболее общее решение с колебаниями частоты  $\omega/2\pi$ , зависящее от времени по синусоидальному закону. Если волна порождается в конце  $z=0$ , то остается только первое слагаемое и  $\gamma=0$ .

Поля в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{i\beta\omega}{cr} \mathbf{a}_r e^{-xz+i(\omega/c)(nz-ct)} = \left( \frac{i\omega}{c} \right) \mathbf{A}, \\ \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{a}_\varphi \frac{i\beta}{r} \left( \frac{\omega n}{c} + ix \right) e^{-xz+i(\omega/c)(nz-ct)} = \left( n + \frac{ixc}{\omega} \right) \mathbf{a}_z \times \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.5.34)$$

Электрическое поле направлено по радиусам, как это и требовалось первоначально. Разность потенциалов между внутренним и внешним проводниками равна

$$V = \int_a^b E dr = \frac{i\beta\omega}{c} \ln \frac{b}{a} e^{-xz+i(\omega/c)(nz-ct)};$$

если напряжение в конце  $z=0$  имеет вид  $V_0 e^{-i\omega t}$ , то будем иметь  $\beta = [V_0 c / i\omega \ln(b/a)]$  и напряжение между проводниками в точке  $z$  будет равно

$$V(z) = V_0 e^{-xz+i(\omega/c)(nz-ct)}.$$

На поверхностях обоих проводников сосредоточивается заряд с поверхностной плотностью  $D/4\pi = \epsilon E/4\pi$ . Полный заряд, находящийся на поверхности внутреннего проводника, составляет на единицу длины  $(2\pi a) (\epsilon E/4\pi)$  или

$$\frac{\epsilon V_0}{2 \ln(b/a)} e^{-xz+i(\omega/c)(nz-ct)} = \frac{\epsilon V(z)}{2 \ln(b/a)};$$

таков же, конечно, и заряд на единицу длины внутренней поверхности наружного проводника. Очевидно, емкость концентрической линии, рассчитанная в той же системе единиц, составляет  $\epsilon/2 \ln(b/a)$  на единицу длины.

Магнитными силовыми линиями являются концентрические окружности, что указывает на то, что ток идет вдоль внутреннего проводника. Его силу можно подсчитать с помощью правила циркуляции  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi I$ , получающегося из уравнений (2.5.4) или (1.2.12). Произведя вычисления, получим

$$I(z) = \frac{V_0}{2 \ln(b/a)} \left( n + \frac{ixc}{\omega} \right) e^{-xz+i(\omega/c)(nz-ct)}.$$

Сила тока затухает с возрастанием  $z$ , так как происходит утечка части тока через частично проводящий материал, находящийся между идеально проводящими цилиндрами. Если бы среда была полностью не проводя-

шай ( $\sigma = 0$ ), тогда волна не затухала бы ( $x$  было бы равно нулю) и ток  $I$  имел бы ту же фазу, что и напряжение  $V$ .

Отношение напряжения в любой точке к силе тока

$$Z = \frac{2 \ln(b/a)}{n + i(xc/\omega)} \quad (2.5.35)$$

называется *характеристическим импедансом* линии передачи. Если среда полностью не проводит электричества ( $\kappa = 0$ ), этот импеданс будет действительным (чистое «омическое» сопротивление).

Параллелизм между этим определением и рассуждениями стр. 128 относительно волн на струне совершенно ясен. Можно, конечно, получить импеданс линии передачи и при наличии отраженной волны, как это было сделано для струны; можно также составить интегралы Фурье для переходной характеристики линии.

Между прочим, следует отметить, что так как  $V$  пропорционально  $E$ , а  $I$  пропорционально  $H$ , то импеданс, подсчитанный выше, пропорционален отношению между  $E$  и  $H$ . Во многих случаях электромагнитного излучения, когда нельзя подсчитать  $V$  или  $I$ , все же возможно найти отношение между  $E$  и  $H$  в каждой точке. Это отношение часто называют *импедансом* среды или волны. Например, для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$  в открытом пространстве ( $\varepsilon = \mu = 1$ ), векторный потенциал имеет вид  $A_0 e^{i(\omega/c)(x-ct)}$ , где  $A_0$  — вектор, перпендикулярный к оси  $x$ . Поля имеют вид

$$\mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} (A_0) e^{i(\omega/c)(x-ct)}, \quad \mathbf{H} = i \frac{\omega}{c} (\mathbf{i} \times A_0) e^{i(\omega/c)(x-ct)} = \mathbf{i} \times \mathbf{E}. \quad (2.5.36)$$

В этом случае импеданс равен единице (в той же системе единиц). Если  $\varepsilon$  и  $\mu$  не равны единице, импеданс равен  $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ .

**Уравнения Прока.** Все уравнения теории электромагнетизма эквивалентны лоренц-инвариантному требованию, состоящему в том, чтобы оператор Даламбера от потенциалов, являющийся 4-вектором, был пропорционален 4-вектору, представляющему заряд и плотность тока. Это — обобщение на случай 4-векторов неоднородного волнового уравнения для струны

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f(x, t),$$

которое было рассмотрено в § 2.1. Проводя дальнюю аналогию, можно сказать, что электромагнитные потенциалы имеют инерцию и своего рода «восстанавливающую силу», так же как и простая струна, находящаяся под действием натяжения; это свойство заставляет поле в какой-либо точке стремиться к тому, чтобы сделаться средним по отношению к значениям поля в окружающих точках. Ток здесь аналогичен приложенной силе  $f$ .

Мы видели в § 2.1, что, если струна заключена в упругую оболочку, так что каждый участок струны стремится вернуться к положению равновесия, в волновом уравнении должен быть добавлен дополнительный член, пропорциональный  $\psi$ . Можно и для векторных потенциалов составить подобное уравнение с дополнительным членом, пропорциональным потенциалам

$$\square^2 \mathbf{V} - \alpha^2 \mathbf{V} = \nabla^2 \mathbf{V} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} - \alpha^2 \mathbf{V} = -\frac{4\pi \mathbf{I}}{c}, \quad (2.5.37)$$

$$\mathbf{I} = (J_x, J_y, J_z, i c \rho), \quad \mathbf{V} = (A_x, A_y, A_z, i \varphi),$$

которое аналогично уравнению, полученному из (2.1.27) прибавлением неоднородного члена, содержащего силовую функцию. Уравнение для скалярного поля без свободного члена называется уравнением Клейна-Гордона; оно пригодно для описания поведения скалярного мезонного поля. Аналогичное уравнение для четырехмерного векторного потенциала называется *уравнением Прока*; его можно применить к описанию поведения частицы, имеющей единичный спин (если такая частица существует!). Соответствующие уравнения для полей в случае  $\mu = \epsilon = 1$  (свободное пространство), если ток равен нулю, имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \alpha^2 \mathbf{A}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = -\alpha^2 c \varphi, \\ \mathbf{H} &= \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{A} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.5.38)$$

[при другой калибровке см. стр. 205 и уравнение (3.4.21)].

Наличие этого дополнительного члена заметно влияет на решение, как это имело место и в случае струны. Поля быстро стремятся к нулю везде, кроме ближайших окрестностей заряда или тока. Например, потенциал вокруг точечного заряда равен  $Qe^{-\mu r}/r$  и стремится к нулю много быстрее, чем обычный потенциал  $Q/r$ . Подобная потенциальная функция<sup>1)</sup> рассматривалась при изучении связи между нуклонами (протонами или нейтронами) в атомном ядре. Поэтому уравнения Прока, а также и уравнение Клейна — Гордона (для скалярного случая) могут быть использованы в теории ядра.

## 2.6. Квантовая механика

На протяжении всей этой главы мы указывали случаи, когда «сглаженное», непрерывное поле может заменить распределение масс и зарядов, имеющее на самом деле дискретный характер. Пока мы интересовались макроскопическими явлениями, мы могли вместо беспорядочного распределения частиц рассматривать регулярную функцию положения, значение которой пропорционально средней плотности частиц. Однако, введя электромагнитное поле, мы приходим к существенно новой связи между непрерывными полями и дискретными частицами, к связи, которая является основой современной квантовой теории.

Существует два основных различия между прежними взаимосвязями полей и частиц и новыми, квантовыми связями между ними. Прежде всего, величина классического поля пропорциональна средней плотности частиц или, что обычно то же самое, вероятности наличия частицы. В квантовой же теории *квадрат* модуля поля пропорционален вероятности наличия частицы. Это различие более существенно, чем могло бы показаться с первого взгляда. Оно обозначает, например, что классические поля всегда выражаются *действительными числами*, так как они должны равняться плотностям или вероятностям, являющимся *действительными числами*. Правда, во многих случаях и для классических полей мы будем выполнять наши вычисления, пользуясь комплексными числами, но всегда при этом будет ставиться условие, что только

<sup>1)</sup> Потенциал Юкава. — *Прим. ред.*