ГЛАВА 3

Поля и вариационный принцип

Употребление превосходной степени прилагательных позволяет в сжатой форме выразить общий принцип, охватывающий широкий круг явлений. Так, например, утверждения, что прямая есть кратчайшая линия, соединяющая две точки, или что окружность есть кратчайшая линия, охватывающая плоский участок заданной площади, с обманчивой простотой описывают определенные геометрические объекты. Говоря, что электрический ток в сети, состоящей из сопротивлений, распределяется так, что наименьшая часть его энергии превращается в тепло, мы тем самым даем описание постоянного тока, охватывающее множество индивидуальных случаев, не прибегая к сложному математическому аппарату (последний, впрочем, неизбежно появляется при попытке применить этот общий принцип к тому или иному индивидуальному случаю). Утверждение, что некоторая физическая система эволюционирует так, что известная функция ее поведения принимает наименьшее (или наибольшее) значение, часто оказывается как исходной точкой теоретических исследований, так и конечным продуктом дистилляции соотношений, связывающих некоторые явления в какой-либо обширной области физики.

Математическая формулировка принципа, содержащего «прилагательное в превосходной степени», обычно состоит в том, что интеграл от некоторой функции, характерной для рассматриваемой системы, при происходящей в действительности эволюции системы принимает значение меньшее (или большее), чем при любой другой мыслимой эволюции, подчиняющейся известным, весьма общим условиям, характеризующим самое систему. Подинтегральную функцию обозначим L; она зависит от некоторого числа переменных, характеризующих систему (координат, амплитуд поля или других величин) и от производных этих переменных по переменным интеграции (т. е. от скоростей или градиентов полей и т. п.). Если переменные интеграции обозначены $x_1, \ldots, x_m$, переменные, характеризующие систему, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, их производные $\partial\varphi_r/\partial x_s = \varphi_{rs}$, то интеграл, который требуется минимизировать, можно записать в виде

$$\mathscr{L} = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_m}^{b_m} L\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, x\right) dx_1, \ldots, dx_m. \tag{3.1.1}$$

Отыскивая минимум этого интеграла, мы можем получить дифференциальные уравнения с частными производными, управляющие величинами φ как функциями от x, и еще целый ряд сведений. Такой метод отыскания величин φ называется *вариационным методом*.

В этой главе мы сначала укажем общий прием, с помощью которого вариационный метод приводит к уравнениям, определяющим искомые функции φ, затем в качестве хорошо разработанного примера, показывающего пользу применения этого метода, мы более детально рассмотрим

вариационные принципы классической динамики; далее мы перейдем к применению вариационного метода к исследованию различных полей, с которыми мы встретимся в этой книге.

3.1. Вариационный интеграл и уравнения Эйлера

Функция L в интеграле, которому мы стремимся придать минимальное (или максимальное) значение, называется *плотностью функции Лагранжа* рассматриваемой системы. Она представляет собой *функцию от функций* основных параметров системы. Так, в классической динамике основным параметром служит время, а в качестве функций выступают координаты и скорости элементов системы в различные моменты времени, по мере ее движения, обусловленного приложенными силами и начальными условиями. В случае поля основными параметрами являются координаты, определяющие точки, в которых измеряется поле, а их функциями являются компоненты поля и их градиенты; эти функции определяются расположением «источников» (или зарядов) в пространстве и граничными условиями.

Таким образом, требование, чтобы интеграл от L принимал наименьшее (или наибольшее) значение, означает, что функции, через которые выражена L (координаты и скорости или компоненты и градиенты), должны быть выбраны так, чтобы интеграл (3.1.1.) принимал наименьшее (наибольшее) возможное значение. Функции φ должны быть таковы, чтобы значение интеграла (3.1.1), зависящего от этих φ и их производных $\partial\varphi/\partial x$, было наименьшим из тех, которые он может принимать при заданных условиях, определяемых существом задачи.

Для решения этой вариационной задачи мы сведем ее прежде всего к системе уравнений, определяющей наилучший выбор функций φ.

Уравнения Эйлера. Но перед тем как сделать этот первый шаг, мы должны уточнить, что именно мы понимаем под «минимизацией интеграла» и «наилучшим выбором функций». Для этого предположим, что мы произвольным образом выбрали функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ параметров $x_1, \ldots, x_m$. Этот произвольный выбор определит, разумеется, функции $\varphi_{rs} = \partial\varphi_r/\partial x_s$ и тем самым однозначно определится значение $\mathscr{L}$ согласно формуле (3.1.1). Изменим теперь немного функции φ; пусть изменение функции φ_r выражается в виде $\varepsilon_r\eta_r$, где η_r — произвольная функция параметров, а ε_r — малая величина, не зависящая от параметров. Вместо $\varepsilon_r\eta_r$ часто пишут кратко $\delta\varphi_r$ и рассматривают $\delta\varphi$ как произвольно малую «вариацию» функции φ. Изменения φ повлекут за собой изменения компонент φ_{rs} градиентов. Те и другие связаны соотношениями $\partial(\varepsilon_r\eta_r)/\partial x_s = \varepsilon_r\eta_{rs}$. В вариационных обозначениях эти соотношения имеют вид $\delta\varphi_{rs} = \partial(\delta\varphi_r)/\partial x_s$.

Разложив L в ряд Тейлора, мы обнаружим, что главная часть (члены первого порядка малости) приращения интеграла $\mathscr{L}$, вызванного малыми вариациями функций φ, может быть представлена в виде

$$\delta\mathscr{L} = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_m}^{b_m} \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_r} \eta_r + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{rs}} \frac{\partial \eta_r}{\partial x_s} \right) dx_1 \ldots dx_m.$$

Допустим, что параметры выбраны так, что все пределы интегрирования постоянны и все η обращаются в нуль при $x_i = a_i$ и b_i. Это имеет место, в частности, тогда, когда значения a_i и b_i параметров соответствуют каким-то физическим границам, где на φ наложены некоторые граничные условия. Обычно именно так и бывает, поэтому мы вводим здесь

такое предположение; более общий случай, когда пределы интегрирования переменны, будет затронут ниже.

Проинтегрировав по частям $(\partial L/\partial\varphi_{rs})(\partial\eta_r/\partial x_s)$ по x_s, мы получим

$$\left[\frac{\partial L}{\partial\varphi_{rs}}\eta_r\right]_{a_s}^{b_s}-\int\limits_{a_s}^{b_s}\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{rs}}\eta_r\,dx_s.$$

В этом выражении первое слагаемое равно нулю, так как $\eta_r=0$ при $x_s=a_s$ и $x=b_s$. Таким образом, первая вариация $\delta\mathscr{L}$, т. е. главная часть приращения интеграла $\mathscr{L}$, равна

$$\delta\mathscr{L}=\int\limits_{a_1}^{b_1}\ldots\int\limits_{a_m}^{b_m}\sum_{r=1}^{n}\varepsilon_r\left[\frac{\partial L}{\partial\varphi_r}-\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{rs}}\right)\right]\eta_r\,dx_1\ldots dx_m. \qquad (3.1.2)$$

Если $\delta\mathscr{L}$ отлично от нуля, то $\mathscr{L}$ не может достигать при $\varepsilon_r=0$ ни максимума, ни минимума. Если же $\delta\mathscr{L}=0$ независимо от (малых) значений ε_r, то это означает, что при выбранных φ интеграл $\mathscr{L}$ как функция переменных ε_r имеет при $\varepsilon_r=0$ *либо минимум, либо максимум, либо минимакс*. Какая из этих возможностей действительно реализуется, обычно удается выяснить из физических соображений; если же это неясно, то можно вычислить следующий член ряда Тейлора для $\mathscr{L}$ (второго порядка относительно ε_r) и посмотреть, положителен он, отрицателен или равен нулю. Ради экономии места мы условимся впредь говорить «минимум» вместо «минимум или максимум или минимакс» и «минимизировать» вместо «отыскивать значение, соответствующее минимуму или максимуму или минимаксу».

Мы видим, что для того, чтобы $\mathscr{L}$ имело экстремальное значение (максимум или минимум), необходимо выбрать такие φ, при которых в (3.1.2) коэффициенты при всех ε_r обращаются в нуль. Итак, для определения функций φ получается следующая система уравнений:

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{rs}}=\frac{\partial L}{\partial\varphi_r},\quad r=1,\ldots,n, \qquad (3.1.3)$$

где $\varphi_{rs}=\partial\varphi_r/\partial x_s$. Эти уравнения, служащие для отыскания оптимальных φ, называются *уравнениями Эйлера*. В этой главе мы будем широко ими пользоваться.

В связи с полученными выводами следует сделать несколько общих замечаний. Прежде всего, если описанный вариационный принцип претендует на универсальную применимость, то $\mathscr{L}$ должно быть инвариантом, а плотность функции Лагранжа L, или частное от деления L на скалярный множитель, входящий в выражение элемента интегрирования, должны быть инвариантны относительно преобразований координат в пространстве параметров (переменных интегрирования). Этим обстоятельством мы воспользуемся в дальнейшем для отыскания других плотностей функций Лагранжа.

Другое замечание, еще более общего характера, состоит в том, что вариационный принцип скорее способствует унификации теории, нежели получению первых результатов в новом направлении. Обычно оказывается, что дифференциальные уравнения, описывающие то или иное явление, выводятся раньше, чем находится плотность функции Лагранжа L, посредством которой эти уравнения можно получить только что описанным методом. Это нисколько не умаляет роли плотности функции Лагранжа, так как весьма полезно выяснить, какую именно физическую величину

следует минимизировать для того, чтобы получить дифференциальные уравнения исследуемого явления, а сам вид вариационных уравнений часто подсказывает плодотворные аналогии и обобщения.

Уравнения связи. Во многих случаях интеграл Лагранжа, подлежащий минимизации, подчиняется еще одному или нескольким условиям, налагающим дальнейшие ограничения на независимые переменные и параметры. В таких случаях для получения ответа мы прибегаем к методу множителей Лагранжа. Как работают эти множители, лучше всего показать на примере.

Пусть требуется найти максимум функции $f(x, y)$. Если нет никаких дополнительных условий, то мы решаем систему уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0, \qquad (3.1.4)$$

которая определит пару (или пары) значений (x_0, y_0) переменных x и y, точку (или точки), где f имеет максимум, минимум или седловую точку (минимакс); соответствующее значение функции есть $f(x_0, y_0)$. Поскольку f представляет собой функцию двух независимых переменных, для отыскания стационарных точек (x_0, y_0) нужны два уравнения (3.1.4). Типичный пример изображен на рис. 3.1, где функция f описана своими линиями уровня.

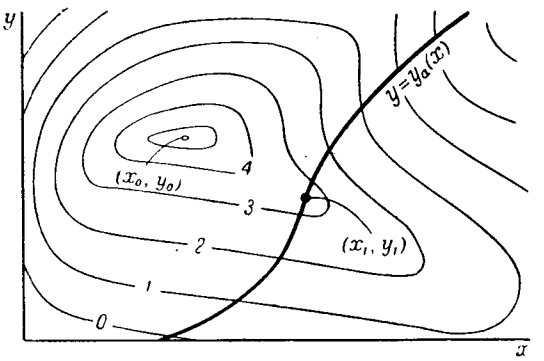

Рис. 3.1. Точка максимума (x_0, y_0) функции $f(x, y)$, представленной линиями уровня 0, 1, 2, ... Точка максимума (x_1, y_1) на линии $y=y_a(x)$.

Теперь предположим, что ищется максимум функции $f(x, y)$ на линии, заданной *уравнением связи* $y=y_a(x)$. Эта линия, вообще говоря, не проходит через точку (x_0, y_0), поэтому искомая точка (или точки) (x_1, y_1) может не совпасть с (x_0, y_0) (см. рис. 3.1). Эти (x_1, y_1) можно найти, подставив в f выражение y через x из уравнения связи. Получив таким образом функцию f вдоль линии как функцию *одного* переменного x, мы вычисляем ее производную и решаем уравнение

$$\frac{d}{dx} f(x, y_a(x)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d}{dx}[y_a(x)] = 0. \qquad (3.1.5)$$

Искомая точка максимума будет определяться одним из корней x_1 уравнения (3.1.5) и соответствующим значением $y_1 = y_a(x_1)$.

Однако эта же задача может быть решена другим методом, на первый взгляд более сложным и совершенно отличным от того, который приводит к уравнению (3.1.5). Пусть $g(x, y)=0$ — уравнение связи. Введем еще третье неизвестное λ и попробуем минимизировать новую функцию $f+\lambda g$ при соблюдении условия $g=0$. При этом нам придется решать систему уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0, \quad g(x, y)=0, \qquad (3.1.6)$$

отыскивая одновременно значения x, y и λ.

Непосредственно не очевидно, что найденные из (3.1.6) x и y совпадают со значениями x, $y_a(x)$, найденными с помощью уравнения (3.1.5). Связь между ними станет яснее, если уравнение связи $g(x, y)=0$ можно представить в виде $y_a(x)-y=0$, как предполагалось выше. В этом

случае первые два уравнения системы (3.1.6) примут вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{dy_a}{dx}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}-\lambda=0.$$

Выразив λ из второго уравнения и подставив его в первое, мы получим

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{dy_a}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

т. е. как раз уравнение (3.1.5). Таким образом, в этом простом случае метод множителей Лагранжа дает тот же результат, что и первый, непосредственный метод. Так будет и в других случаях. При этом если в разобранном простом случае метод множителей более громоздок, чем метод, основанный на применении уравнения (3.1.5), то в более сложных случаях он оказывается более простым.

В применении к задаче об отыскании минимума интеграла (3.1.1) метод множителей Лагранжа может быть сформулирован следующим образом: пусть $L(\varphi_r, \varphi_{rs}, x_s)$ $(s=1, 2, \ldots, m;\ r=1, 2, \ldots, n)$ — плотность функции Лагранжа, а уравнения связи имеют вид

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}\ldots\int\limits_{a_m}^{b_m} G_t\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, x\right)dx_1\ldots dx_m=C_t, \tag{3.1.7}$$

где C — постоянные $(t=1, 2, \ldots, k;\ k<m)$; берется вспомогательный интеграл

$$\mathscr{L}'=\int\limits_{a_1}^{b_1}\ldots\int\limits_{a_m}^{b_m} L'\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, x\right)dx_1\ldots dx_m,$$

где

$$L'=L(\varphi_r, \varphi_{rs}, x_s)+\sum_{t=1}^{k}\lambda_t G_t(\varphi_r, \varphi_{rs}, x_s) \tag{3.1.8}$$

и требуемые φ и значения λ отыскиваются из новых уравнений Эйлера

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial L'}{\partial\varphi_{rs}}=\frac{\partial L'}{\partial\varphi_r}, \tag{3.1.9}$$

к которым добавляются k уравнений (3.1.7). В этом случае метод множителей Лагранжа бесспорно является наиболее простым.

3.2. Принцип Гамильтона и классическая динамика

В классической динамике параметром является время t, а величинами φ в функции Лагранжа служат координаты q, определяющие в каждый момент времени конфигурацию системы. Если система имеет n степеней свободы, то можно выбрать n независимых координат $q_1, \ldots, q_n$, которые будут полностью определять конфигурацию системы; соответствующие скорости будут $\dot{q}_r=dq_r/dt$. Как бы ни были выбраны координаты q, кинетическая энергия инерциальной системы всегда представляет собой некоторую квадратичную форму относительно скоростей

$$T=\frac{1}{2}\sum_{r,\,s}a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s, \tag{3.2.1}$$