случае первые два уравнения системы (3.1.6) примут вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{dy_a}{dx}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}-\lambda=0.$$

Выразив λ из второго уравнения и подставив его в первое, мы получим

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{dy_a}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

т. е. как раз уравнение (3.1.5). Таким образом, в этом простом случае метод множителей Лагранжа дает тот же результат, что и первый, непосредственный метод. Так будет и в других случаях. При этом если в разобранном простом случае метод множителей более громоздок, чем метод, основанный на применении уравнения (3.1.5), то в более сложных случаях он оказывается более простым.

В применении к задаче об отыскании минимума интеграла (3.1.1) метод множителей Лагранжа может быть сформулирован следующим образом: пусть $L(\varphi_r, \varphi_{rs}, x_s)$ $(s=1, 2, \ldots, m;\ r=1, 2, \ldots, n)$ — плотность функции Лагранжа, а уравнения связи имеют вид

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}\ldots\int\limits_{a_m}^{b_m} G_t\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, x\right)dx_1\ldots dx_m=C_t, \tag{3.1.7}$$

где C — постоянные $(t=1, 2, \ldots, k;\ k<m)$; берется вспомогательный интеграл

$$\mathscr{L}'=\int\limits_{a_1}^{b_1}\ldots\int\limits_{a_m}^{b_m} L'\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, x\right)dx_1\ldots dx_m,$$

где

$$L'=L(\varphi_r, \varphi_{rs}, x_s)+\sum_{t=1}^{k}\lambda_t G_t(\varphi_r, \varphi_{rs}, x_s) \tag{3.1.8}$$

и требуемые φ и значения λ отыскиваются из новых уравнений Эйлера

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial L'}{\partial\varphi_{rs}}=\frac{\partial L'}{\partial\varphi_r}, \tag{3.1.9}$$

к которым добавляются k уравнений (3.1.7). В этом случае метод множителей Лагранжа бесспорно является наиболее простым.

3.2. Принцип Гамильтона и классическая динамика

В классической динамике параметром является время t, а величинами φ в функции Лагранжа служат координаты q, определяющие в каждый момент времени конфигурацию системы. Если система имеет n степеней свободы, то можно выбрать n независимых координат $q_1, \ldots, q_n$, которые будут полностью определять конфигурацию системы; соответствующие скорости будут $\dot{q}_r=dq_r/dt$. Как бы ни были выбраны координаты q, кинетическая энергия инерциальной системы всегда представляет собой некоторую квадратичную форму относительно скоростей

$$T=\frac{1}{2}\sum_{r,\,s}a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s, \tag{3.2.1}$$

коэффициенты a которой могут зависеть от координат q. Если система *консервативна* (т. е. ее полная механическая энергия с течением времени остается постоянной), то внешняя сила, действующая на систему, может быть представлена как градиент некоторой скалярной потенциальной функции, т. е. обобщенные силы, соответствующие координатам q_r, выражаются в виде

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial q_r}. \tag{3.2.2}$$

Потенциальная энергия может явно зависеть от t, но она не является функцией скоростей $\dot{q}$.

В том случае, когда система консервативна, вариационный принцип, определяющий уравнения движения, называется *принципом Гамильтона* и в качестве функции Лагранжа берется *кинетический потенциал* (см. стр. 221) $T - V$. Получающееся уравнение

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V)\, dt = 0 \tag{3.2.3}$$

гласит, что под действием консервативных сил при любых допустимых начальных условиях система движется так, что разность кинетической и потенциальной энергий имеет минимальное (или в редких случаях максимальное) среднее по времени.

Уравнения Лагранжа. Уравнения Эйлера для координат в рассматриваемом случае:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial (T-V)}{\partial q_r}, \quad r = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.2.4}$$

называются *уравнениями Лагранжа* движения системы. Левые части этих уравнений представляют ускорения системы, а правые части — соответствующие силы, внешние (выведенные из потенциальной энергии V) плюс «кинетические силы» (такие, как центробежные), обусловленные самим движением системы. Когда эти силы не консервативны, то есть не существует потенциальной энергии, вариационный принцип приводит к уравнению

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_{r=1}^{n} F_r \delta q_r\right) dt = 0$$

и уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial T}{\partial q_r} + F_r. \tag{3.2.5}$$

Уравнения Лагранжа принадлежат к числу самых употребительных уравнений классической динамики.

Кинетическая и потенциальная энергии представляют собой скаляры, инвариантные относительно преобразований координат; следовательно, они могут быть выражены через любые обобщенные координаты, и в любой системе таких координат уравнения Лагранжа будут иметь одинаковую форму. В любом случае величина

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}(T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = p_r$$

называется r-м *импульсом*. Таким образом, уравнения Лагранжа можно представить в виде

$$\frac{dp_r}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_r}=\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial q_r} & \text{в случае консервативной системы,} \\ F_r & \text{в общем случае.}\end{cases}$$

Если в качестве q мы возьмем прямоугольные координаты, то T будет зависеть лишь от $\dot{q}$ и не будет зависеть от q, и уравнения Лагранжа сведутся к обычным уравнениям Ньютона

$$\frac{d}{dt}\,(\text{импульс})=\text{сила}.$$

Таким образом, принцип Гамильтона в простой инвариантной форме охватывает все уравнения классической динамики.

Энергия и функция Гамильтона. В том случае, когда система консервативна, функцией координат и импульсов, сохраняющей постоянное значение при движении системы, является полная энергия E системы — сумма кинетической и потенциальной энергий.

Эта последняя, выраженная через координаты q и импульсы p, называется функцией Гамильтона (гамильтонианом) системы и обозначается H. Так как функция Лагранжа L равна $T-V$, а полная энергия $E=T+V$, то $E=2T-L$. Поэтому уравнение, к которому приводит вариационный принцип, может быть записано в форме $\delta\int(2T-E)dt=0$, а отсюда можно получить уравнения, связывающие гамильтонову функцию со скоростями и ускорениями. Хотя при этом получатся лишь новые формы «старых» уравнений движения, но они оказываются особенно хорошо приспособленными для перевода на язык квантовой механики.

Прежде всего нужно представить величину $2T-E$, зависящую от q и $\dot{q}$, как функцию от q и p. Импульс p_r, как было отмечено выше, получается дифференцированием кинетической энергии T по $\dot{q}_r$. Выразив p_r через $\dot{q}_r$, мы легко исключим $\dot{q}$ из L и T. В силу (3.2.1)

$$p_r=\sum_{s=1}^{n}a_{rs}\dot{q}_s$$

и, следовательно,

$$2T=\sum_{r=1}^{n}p_r\dot{q}_r=L+H. \tag{3.2.6}$$

Это уравнение дает ответ на вопрос, который до сих пор мы себе не задавали: можно ли выразить H *только* через q и p, полностью исключив $\dot{q}$? В самом деле, взяв вытекающее из (3.2.6) равенство $H=\sum p\dot{q}-L$ (в котором L, будучи функцией от q и $\dot{q}$, в то же время не может быть в общем случае выражена только через q и p) и придав величинам q, p и $\dot{q}$ малые приращения, мы получим

$$dH=\sum p\,d\dot{q}+\sum\dot{q}\,dp-\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}d\dot{q}-\sum\frac{\partial L}{\partial q}dq.$$

Так как, по определению, $p=\partial L/\partial\dot{q}$, то

$$dH=\sum\dot{q}\,dp-\sum\frac{\partial L}{\partial q}dq.$$

Итак, полное приращение функции H выражается через приращения q и p, поэтому H *можно* выразить *только* через q и p (впрочем, если L зависит явно от t, то $\partial H/\partial t = -\partial L/\partial t$ и H оказывается функцией от q, p и t).

Если энергия выражена через p и q (и через t, если это необходимо), то ее называют функцией Гамильтона и обозначают H. Вариация интеграла $\int L\,dt$ принимает при этом вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (2T - H)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{n} \left(p_r \delta \dot{q}_r + \dot{q}_r \delta p_r - \frac{\partial H}{\partial q_r} \delta q_r - \frac{\partial H}{\partial p_r} \delta p_r \right) dt,$$

где δq и δp означают вариации значений q и p, принимаемых вдоль реальной траектории (эти вариации соответствуют ранее употреблявшимся величинам $\varepsilon\eta$). Интегрируя по частям слагаемые $p_r \delta \dot{q}_r = p_r (d\delta q_r/dt)$, мы расщепим вариацию подинтегральной функции на части, одна из которых вызвана вариацией координат q, а другая — вариацией импульсов p

$$\delta \int L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{n} \left[\left(-\dot{p}_r - \frac{\partial H}{\partial q_r} \right) \delta q_r + \left(\dot{q}_r - \frac{\partial H}{\partial p_r} \right) \delta p_r \right] dt = 0.$$

В силу предположения, что p можно варьировать независимо от q, каждое из выражений в круглых скобках в отдельности должно обращаться в нуль, и мы придем к другой форме уравнений движения

$$\dot{q}_r = \partial H/\partial p_r, \quad \dot{p}_r = -(\partial H/\partial q_r), \tag{3.2.7}$$

которые называются *каноническими гамильтоновыми уравнениями*. Они применялись несколько раз в предыдущей главе (см. стр. 222 и 233). Мы вновь применим их в этой главе позже.

Легко видеть, что тогда, когда гамильтонова функция не зависит от времени *явно*, она не изменяется с течением времени. Действительно, в этом случае

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dt},$$

а это выражение в силу уравнений (3.2.7) тождественно равно нулю и, следовательно, при движении системы H сохраняет постоянное значение (т. е. *полное* изменение H со временем для консервативных систем равно нулю). Иногда H явно зависит от времени, но и в этих случаях изменение q и p с течением времени не влияет на H и $dH/dt = \partial H/\partial t$, то есть полное изменение функции H происходит лишь за счет того, что t является одним из ее аргументов; заметим, между прочим, что, как мы уже видели, $\partial H/\partial t = -\partial L/\partial t$.

Импеданс. В гл. 2 (стр. 128) мы ввели понятие механического импеданса как отношения гармонической движущей силы $F_0 e^{-i\omega t}$ к соответствующей скорости. Если система линейна, то это отношение не зависит от амплитуды колебаний и является функцией от ω и констант системы. Как мы увидим в следующей главе, введение импеданса дает возможность свести изучение реакции системы как функции времени к изучению импеданса как функции частоты. Последняя задача часто оказывается более простой.

Во всяком случае, канонические уравнения (3.2.7) позволяют нам подойти к понятию импеданса с новой точки зрения. Заметим сначала,

что если координате q_r соответствует внешняя сила F_r, то канонические уравнения примут вид

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r + \frac{\partial H}{\partial q_r} = F_r.$$

Мы видим, что каждому из уравнений Лагранжа второго порядка соответствует пара канонических уравнений первого порядка как раз такого вида, какой удобен для вычисления импеданса (если система такова, что для нее импеданс имеет смысл). Действительно, если r-й координате соответствуют внешняя сила F_r и скорость $\dot{q}_r$, то отношение F_r к $\dot{q}_r$ равно как раз

$$Z_r = \frac{\dot{p}_r + (\partial H/\partial q_r)}{(\partial H/\partial p_r)}.$$

С этой новой точки зрения мы можем представить себе, что мы изучаем основные свойства системы, «испытывая» ее воздействием сил, изменяющихся гармонически. Мы прилагаем такого рода силу поочередно к каждой координате и измеряем отношение этой силы к соответствующей скорости. Если эти отношения не зависят от амплитуды, то с их помощью можно восстановить систему. Обратно, если известна функция Лагранжа системы, мы можем для любой координаты вычислить импеданс. Положим $q_r = A_r e^{i\omega t}$ (в гл. 2 и много раз в дальнейшем мы изображаем с помощью множителя $e^{-i\omega t}$ простое гармоническое колебание; здесь и в гл. 4 мы будем рассматривать Z при *всех* значениях ω, положительных, отрицательных и мнимых, так что можно сначала вычислять Z и при положительных показателях). Из равенства $p_r = \partial L/\partial \dot{q}_r$ мы можем вычислить p_r как функцию от $\dot{q}_r$ и тем самым выразить p_r через $e^{i\omega t}$ и амплитуду A_r. Далее, мы можем выразить таким же образом $\partial H/\partial p_r$, $\partial H/\partial q_r$ и, следовательно, отношение Z_r. Если это последнее не зависит от A и от времени, то оно представляет собой импеданс.

Пусть потенциальная энергия системы достигает минимума, равного $V_{\min}$, при некоторых определенных значениях координат q. Приняв эту точку минимума за начало отсчета, мы получим, что при малых q, т. е. при малых отклонениях от точки минимума, потенциальная энергия выражается в виде *квадратичной функции* от q:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r,s} b_{rs} q_r q_s + V_{\min}, \tag{3.2.8}$$

т. е. мы получим выражение, сходное с (3.2.1). Иногда этот минимум — не абсолютный, а зависит от состояния «динамического равновесия». Например, может оказаться, что один из импульсов, скажем p_n, постоянен; тогда $\partial H/\partial q_n = 0$. В таком случае q_n может быть исключено из уравнений и постоянную p_n можно рассматривать как некоторую характеристику системы, определяемой меньшим числом координат. При этом в выражении потенциальной энергии могут появиться дополнительные члены, зависящие от p_n, «вызванные» движением с постоянным импульсом (их можно назвать *динамическими потенциальными энергиями*). Эта новая система может иметь точки равновесия там, где «динамические» силы уравновешиваются «истинными» силами, и тогда вблизи точек равновесия потенциальная энергия опять будет выражаться в виде (3.2.8), где некоторые из b зависят от постоянной p_n (которая уже не рассматривается как импульс).

Итак, при достаточно малых отклонениях системы от (динамического или иного) равновесия гамильтонова функция H представляет собой квадратичную функцию импульсов и координат. Приложенная сила F_r имеет выражение

$$\dot{p}_r + \frac{\partial H}{\partial q_r} = \sum_m (a_{rm}\ddot{q}_m + b_{rm}q_m).$$

Это можно проще записать в абстрактной векторной форме. Координату q_r назовем r-й компонентой вектора смещения $\mathbf{q}$, а F_r — r-й компонентой вектора силы $\mathbf{F}$. Тогда соотношения, связывающие векторы силы, смещения и ускорения, можно представить в виде

$$\mathbf{F} = \mathfrak{A}\cdot\ddot{\mathbf{q}} + \mathfrak{B}\cdot\mathbf{q},$$

где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — аффиноры, имеющие соответственно компоненты a_{mn} и b_{mn}. Если теперь вектор $\mathbf{F}$ является простым гармоническим с частотой $\omega/2\pi$, то $\mathbf{F} = \mathbf{F}^\circ e^{i\omega t}$, где $\mathbf{F}^\circ$ — постоянный вектор, и установившаяся скорость $\dot{\mathbf{q}}$ имеет вид $\mathbf{U}e^{i\omega t}$, где компоненты $\mathbf{U}_r$ вектора $\mathbf{U}$ — комплексные числа с модулями, равными амплитудам скоростей $\dot{q}_r$.

В этом случае предыдущее соотношение может быть записано в виде

$$\mathbf{F}^\circ = \mathfrak{Z}\cdot\mathbf{U}, \tag{3.2.9}$$

где

$$\mathfrak{Z}(\omega) = i\omega\mathfrak{A} - \frac{i}{\omega}\mathfrak{B}$$

называется *аффинором импеданса* системы вблизи рассматриваемой точки равновесия. Итак, понятие импеданса всегда имеет смысл достаточно близко от точек равновесия (если таковые имеются). Диагональный элемент Z_{mm} называется ***входным импедансом***, соответствующим m-й координате, а элемент Z_{mn} $(m \neq n)$ — ***переносным импедансом***, соответствующим паре координат с номерами m и n. Всегда можно (см. стр. 64) преобразовать $\mathfrak{Z}$ к главным осям, т. е. перейти к *нормальным координатам* q_r°, в которых все переносные импедансы равны нулю, а диагональные элементы $Z_r^\circ(\omega)$ представляют собой *главные значения* импеданса. Такое преобразование может быть различным при различных ω. Через $\mathfrak{Z}$ и $\mathbf{F}^\circ$ можно выразить также смещения $\mathbf{q} = \mathbf{A}e^{i\omega t}$

$$\mathbf{F} = i\omega\mathfrak{Z}\cdot\mathbf{A} = (-\omega^2\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\cdot\mathbf{A},$$

где $|A_m|$ — амплитуда смещения по координате q_m.

Переход к нормальным координатам представляет собой частный случай *поворота* осей в абстрактном векторном пространстве. Новые координаты $\mathbf{q}'$ связаны со старыми $\mathbf{q}$ формулами

$$q_r' = \sum_{m=1}^{n} \gamma_{rm}q_m,$$

где $\sum_{m=1}^{n} \gamma_{rm}\gamma_{sm} = \delta_{rs}$. Другими словами, матрица (абстрактный векторный оператор) с элементами γ_{mn} — унитарная. Сами числа γ_{rm} играют роль направляющих косинусов (см. стр. 32). В случае преобразования поворота они не зависят от q_r. Как было показано на стр. 66, сумма диа-

гональных элементов $\mathfrak{Z}$ остается инвариантной при поворотах, т. е.

$$|\mathfrak{Z}| = \sum_{m=1}^{n} Z_{mm} = \sum_{m=1}^{n} Z_m^\circ;$$

подобной же инвариантностью обладает и определитель

$$\Delta_Z = |Z_{mn}| = Z_1^\circ(\omega)\, Z^\circ(\omega) \ldots Z_n^\circ(\omega).$$

Полезно еще вычислить аффинор $\mathfrak{Y}$, обратный по отношению к $\mathfrak{Z}$, т. е. такой, для которого

$$\mathbf{U} = \mathfrak{Y}\cdot\mathbf{F}^\circ, \quad \mathbf{A} = (1/i\omega)\,\mathfrak{Y}\cdot\mathbf{F}^\circ, \quad \mathfrak{Y}\cdot\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{Y} = \mathfrak{J},$$

где $\mathfrak{J}$ — тождественный оператор (идемфактор). Согласно сказанному на стр. 63, компоненты Y_{mn} и Z_{mn} связаны соотношениями

$$Y_{mr} = Z'_{mr}/\Delta_Z,$$

где Z'_{mr} — алгебраическое дополнение элемента Z_{mr} в определителе Δ_Z. Далее очевидно, что $\mathfrak{Y}$ имеет те же главные оси, что $\mathfrak{Z}$, и главные значения аффинора $\mathfrak{Y}$ равны

$$Y_m^\circ = 1/Z_m^\circ.$$

$\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}^{-1}$ называется *аффинором полной проводимости* (*адмитанса*) системы.

Если определитель Δ_Z равен нулю, то $\mathfrak{Y}$, конечно, не может быть вычислен. Это происходит тогда, когда значение угловой скорости ω обращает в нуль одно из главных значений Z_m° импеданса. Вспомнив, как именно $\mathfrak{Z}$ зависит от ω, мы заметим, что определитель

$$(-i\omega)^n \Delta_Z = |\omega^2 a_{mr} - b_{mr}| = (-i\omega)^n Z_1^0(\omega)\, Z_2^0(\omega) \ldots Z_n^0(\omega)$$

представляет собой многочлен n-й степени относительно ω^2; последний обращается в нуль при n определенных значениях ω^2 (некоторые из них могут совпадать). Так как порядок нумерации главных осей произволен, то можно считать, что $Z_r^0(\omega)$ обращается в нуль при $\omega = \pm\omega_r$, где ω_1^2, $\omega_2^2, \ldots, \omega_n^2$ расположены в порядке возрастания. Отсюда будет следовать, что главные значения импеданса могут быть представлены в виде

$$Z_r^0(\omega) = i\omega M_r - (i/\omega)\, K_r = \frac{i}{\omega} M_r (\omega^2 - \omega_r^2) = \frac{1}{Y_r^0(\omega)}, \tag{3.2.10}$$

где M_r и $K_r = \omega_r^2 M_r$ — постоянные, определяемые значениями a_{mr} и b_{mr}. Таким образом, мы видим, что главные значения импеданса консервативной системы чисто мнимые и представляют собой нечетные функции от ω, то есть $Z(-\omega) = -Z(\omega)$.

При $\omega = \pm\omega_r$ амплитуда колебаний, соответствующих r-й нормальной координате, оказывается бесконечной (за исключением случая, когда $F_r^0 = 0$) и установившегося решения не существует. Частоты $\omega_r/2\pi$, соответствующие корням ω_r определителя Δ_Z, называются *резонансными частотами* системы.

Заметим, между прочим, что постоянные M_r и K_r, так же как ω_r^2, положительны, так как в противном случае потенциальная энергия не достигла бы абсолютного минимума при $q = 0$.

Канонические преобразования. Уравнения (3.2.7) отличаются заманчивой простотой. Прежде всего, вместо уравнений Лагранжа (3.2.4) второго порядка мы имеем пары уравнений первого порядка, которые для отыскания p и q должны решаться совместно. Это распадение переменных, описывающих состояние системы, на две самостоятельных группы p и q

выражает отличительную особенность классической динамики: силе пропорционально *ускорение*, то есть вторая производная; поэтому, *как* начальное положение, *так и* начальная скорость могут быть выбраны произвольно. Величины q являются обобщенными компонентами положения, а величины p связаны с соответствующими скоростями таким образом, что соотношения между q и p выступают в симметричной форме.

Канонические уравнения (3.2.7) являются теми основными уравнениями, которые связывают p и q для заданной системы и в то же время определяют поведение самой системы. Выбор гамильтоновой функции H переменных p и q определяет семейство пар p и q, связанных уравнениями (3.2.7), при данной гамильтоновой функции H величины p и q называются *канонически сопряженными переменными* для функции H (или просто *сопряженными переменными*).

Одна и та же, система, разумеется, может быть описана различными координатами (и сопряженными импульсами). Так же как теория поля стала яснее после исследования того, как влияют на компоненты поля преобразования координат, так и здесь рассмотрение эффекта перехода от одних сопряженных переменных p и q к другим помогает уяснить дело. Для этого можно было бы, идя окольным путем, заменить q новыми координатами Q, способными описать конфигурацию рассматриваемой системы, выразить функцию Лагранжа L через Q и $\dot{Q}$, найдя по уравнениям $P_r = \partial L/\partial \dot{Q}_r$ сопряженные импульсы P и, наконец, составить новую функцию Гамильтона $K = \Sigma P\dot{Q} - L$, выраженную через новые сопряженные переменные P и Q. Но можно указать прием одновременного преобразования сопряженных пар p, q в новые пары P, Q, оставляющего инвариантным форму уравнений (3.2.7). Такие преобразования называются *каноническими преобразованиями*.

Канонические преобразования связаны с семейством преобразований, которые математики называют *преобразованиями прикосновения* (контактными преобразованиями). Это — преобразования *линейных элементов* (т. е. *положения и направления*), а не точек. А так как мы хотим преобразовывать как координаты q, определяющие положение системы, так и импульсы p, связанные с направлением движения системы, то связь между теми и другими преобразованиями очевидна. В основу преобразования прикосновения кладется некоторая функция S старых и новых координат.

В качестве примера рассмотрим двумерный случай (см. рис. 3.2), когда S есть функция от x, y и x', y'. Каждой точке P пространства (x, y) (т. е. каждой паре фиксированных значений x и y) ставится в соответствие кривая C в пространстве (x', y'), изображаемая уравнением

$$S(x, y; x', y') = \text{const}\ ^{1)};$$

обратно, каждой точке плоскости (x', y') таким же образом ставится в соответствие некоторая кривая в плоскости (x, y). Если точка в плоскости (x, y) описывает какую-нибудь кривую K, то соответствующее семейство кривых в плоскости (x', y') может иметь *огибающую* E, которую мы сопоставляем с кривой K. Таким образом, точкам плоскости (x, y) поставлены в соответствие кривые в плоскости (x', y'), а кривым в плоскости (x, y) — огибающие семейств кривых в плоскости (x', y'). Поэтому каждому линейному элементу (т. е. точке плюс направление) в плоскости (x, y) ставится в соответствие некоторый линейный элемент в плоскости (x', y').

---

[1]) Эта константа в дальнейших рассуждениях фиксирована. — *Прим. ред.*

Возьмем в плоскости (x, y) две точки (x, y) и $(x+dx, y+dy)$, определяющие линейный элемент, и постараемся получить соответствующий ему линейный элемент в плоскости (x', y'). Кривые в плоскости (x', y'), отвечающие точкам (x, y) и $(x+dx, y+dy)$, имеют уравнения

$$S(x, y;\ x', y') = C,$$

$$S(x+dx,\ y+dy;\ x', y') = S(x, y;\ x', y') + \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy = C$$

(последнее с точностью до бесконечно малых второго порядка). Если

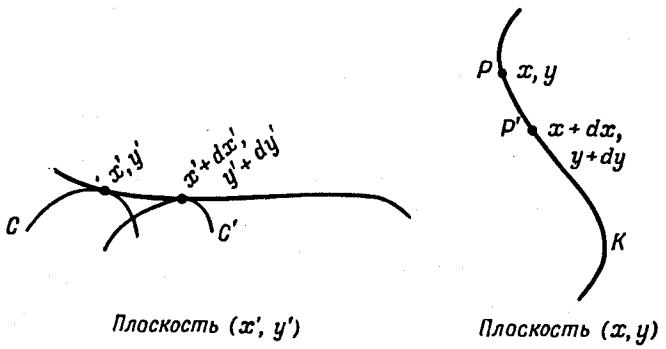

Рис. 3.2. Преобразование прикосновения в двумерном случае.

положить $dx = \dot{x}\,ds$ и $dy = \dot{y}\,ds$, где $\dot{y}/\dot{x}$ — угловой коэффициент заданного линейного элемента, то мы придем к системе уравнений

$$S(x, y;\ x', y') = C, \quad \dot{x}\frac{\partial S}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial S}{\partial y} = 0,$$

решив которую, мы получим точку (x', y'), соответствующую точке (x, y). Направление огибающей в точке (x', y') мы получим, взяв в первом из уравнений дифференциалы по штрихованным аргументам

$$\frac{\partial S}{\partial x'}dx' + \frac{\partial S}{\partial y'}dy' = 0$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial x'}\dot{x}' + \frac{\partial S}{\partial y'}\dot{y}' = 0,$$

где $dx' = \dot{x}'ds$, $dy' = \dot{y}'\,ds$. Симметрия полученных уравнений относительно производных свидетельствует о симметрии преобразования по отношению к обеим плоскостям.

Поясним сказанное на простом примере. Пусть $S = (x-x')^2 + (y-y')^2$ — функция, определяющая преобразование, и $C = R^2$. Точке $x = a$, $y = b$ отвечает в плоскости (x', y') окружность радиуса R с центром в (a, b). Если мы рассмотрим линейный элемент, определенный точками (a, b) и $(a+dx, b)$, то при этом $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 0$, и мы получим систему уравнений

$$(x'-a)^2 + (y'-b)^2 = R^2, \quad 2(x'-a) = 0.$$

Огибающей окружностей радиуса R с центрами на прямой $y' = b$ служит пара прямых $y' = b \pm R$. Поэтому преобразованный элемент будет определяться (бесконечно близкими) точками $(a, b \pm R)$ и $(a+dx, b \pm R)$.

Заметим, что этот пример указывает на тесную связь между преобразованиями прикосновения и принципом Гюйгенса.

В случае динамической системы с гамильтоновой функцией H, не зависящей явно от времени, как мы вскоре покажем, выражение $\sum p\,dq - \sum P\,dQ$ как функция от p и q (или от P и Q и т. д.) представляет собой полный дифференциал, если переход от p, q к P, Q осуществляется с помощью канонического преобразования. При этом функция S может быть получена интегрированием выражения

$$dS = \sum p_r\,dq_r - \sum P_r\,dQ_r.$$

Как функция от P и Q, S будет функцией, определяющей преобразование прикосновения.

При таком преобразовании сохраняется вариационный принцип Гамильтона и, следовательно, не изменяется вид канонических уравнений (3.2.7); действительно, добавив в уравнении, определяющем dS, выражение $(K-H)\,dt$ (равное нулю, так как K есть новая гамильтонова функция) и проинтегрировав по времени, мы получим

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum p\dot{q} - H\right)dt = \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum P\dot{Q} - K\right)dt + \int_{t_0}^{t_1} dS.$$

Если концевые точки t_0 и t_1 фиксированы, то интеграл от dS не будет меняться при деформации пути интегрирования, поэтому $\delta\int\left(\sum P\dot{Q} - K\right)dt$ будет равно нулю, коль скоро $\delta\int\left(\sum p\dot{q} - H\right)dt = 0$.

Итак, преобразование, определяемое полученной функцией S, представляет собой каноническое преобразование, и величины P, Q и K связаны уравнениями

$$\dot{Q}_r = \partial K/\partial P_r, \quad \dot{P}_r = -(\partial K/\partial Q_r),$$

т. е. каноническими уравнениями (3.2.7).

Даже тогда, когда H (а следовательно, и K) явно зависит от времени, функцию S можно получить, интегрируя уравнение

$$\sum p_r\dot{q}_r - H - \sum P_r\dot{Q}_r + K = dS/dt,$$

или то же уравнение, записанное в дифференциалах,

$$\sum p_r\,dq_r - \sum P_r\,dQ_r + (K-H)\,dt = dS,$$

где dS — полный дифференциал. Так как в любом случае

$$dS = \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial S}{\partial q_r}\,dq_r + \frac{\partial S}{\partial Q_r}\,dQ_r\right) + \frac{\partial S}{\partial t}\,dt,$$

то, приравняв коэффициенты при дифференциалах, мы получим выражения импульсов через координаты, участвующие в преобразовании

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial q_r}, \quad P_r = -\frac{\partial S}{\partial Q_r}, \quad K - H = \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{3.2.11}$$

Скобки Пуассона. Изучение инвариантов канонических преобразований охватывает большую часть основных понятий классической динамики. Одним из таких инвариантов является энергия H (если только H не зависит от t явно). Целый класс инвариантов наиболее удобно выразить

посредством *скобок Пуассона*. Так называется для произвольных двух функций u и v от p и q выражение [см. формулу (2.6.4)]

$$(u, v) = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial p_r} \frac{\partial v}{\partial q_r} - \frac{\partial u}{\partial q_r} \frac{\partial v}{\partial p_r} \right).$$

Скобки Пуассона обладают рядом интересных алгебраических свойств, по форме напоминающих свойства производных. Так, если c — постоянная, не зависящая от p и q, то

$$(u, c) = 0;$$

далее, выполняются соотношения

$$(u, v + w) = (u, v) + (u, w), \quad (u + v, w) = (u, w) + (v, w),$$

$$(uv, w) = u(v, w) + v(u, w) \text{ и т. д.}$$

Скобки Пуассона антисимметричны, т. е. $(u, v) = -(v, u)$. Причина пользы этих скобок заключается в том, что они инвариантны относительно канонических преобразований. Если q, p и Q, P связаны друг с другом так, что выражение $\sum p\,dq - \sum P\,dQ$ является полным дифференциалом, то для любой пары функций u и v переменных p, q (или P, Q)

$$(u, v) = -\sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_r} \frac{\partial v}{\partial p_r} - \frac{\partial u}{\partial p_r} \frac{\partial v}{\partial q_r} \right) = -\sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial Q_r} \frac{\partial v}{\partial P_r} - \frac{\partial u}{\partial P_r} \frac{\partial v}{\partial Q_r} \right).$$

Таким образом, если уравнения динамики записаны посредством скобок Пуассона, то они инвариантны относительно канонических преобразований. Так, канонические уравнения движения (3.2.7) можно записать в виде

$$\dot{q}_r = (H, q_r), \quad \dot{p}_r = (H, p_r).$$

В самом деле, из канонических уравнений и самого определения скобок Пуассона вытекает, что для любой функции u переменных p и q

$$\frac{du}{dt} = (H, u), \quad \frac{\partial u}{\partial q_r} = (p_r, u), \quad \frac{\partial u}{\partial p_r} = (u, q_r).$$

Скобками Пуассона можно также пользоваться для выяснения того, является ли некоторое заданное преобразование преобразованием прикосновения. Система n координат q и сопряженных импульсов связана с другой системой n координат Q и сопряженными импульсами некоторым преобразованием прикосновения тогда и только тогда, когда

$$(Q_r, Q_s) = 0, \quad (P_r, P_s) = 0, \quad (P_r, Q_s) = \delta_{rs},$$

где $\delta_{rs} = 0$ или 1 соответственно при $r \neq s$ и при $r = s$.

Интеграл действия. Заметим, что функция S, определяющая преобразование, имеет размерность действия и что если рассматривать S как функцию от q при фиксированных Q, то вектор $\mathbf{p}$, будучи градиентом функции S, ортогонален поверхности $S = \text{const}$. Другими словами, выбор значений переменных Q и функции K определяет семейство поверхностей действия $S = \text{const}$ и семейство траекторий системы, ортогональных этим поверхностям. С некоторой точки зрения Q можно рассматривать как начальные данные, а последующее поведение системы — как «развитие» преобразования прикосновения с течением времени.

Дифференциальное уравнение, определяющее функцию действия S как функцию начальных и конечных значений координат, можно получить, записав условие, состоящее в том, что гамильтонова функция остается постоянной $H(p, q) = E$, и введя в него $\partial S/\partial q_r$ вместо каждого p_r согласно уравнениям (3.2.11). В результате мы получим дифференциальное уравнение

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = E, \tag{3.2.12}$$

называемое *уравнением Гамильтона — Якоби*. Его решение представляет собой функцию n переменных q, величины E и n постоянных интегрирования, которые мы можем обозначить $Q_2, \ldots, Q_n, \alpha$ (последними мы можем при этом так распорядиться, чтобы α было просто аддитивным постоянным). Если мы положим $E = Q_1$, то остальные Q сможем рассматривать как новые координаты системы. Согласно (3.2.11), сопряженными импульсами будут $P_r = -\partial S/\partial Q_r$ и преобразованные координаты и импульсы будут удовлетворять каноническим уравнениям

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial Q_1} = -\frac{\partial H}{\partial E} = -1, \quad \dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial Q_r} = 0 \qquad (r = 2, \ldots, n),$$

так как при этом $K = H$ и H не зависит от постоянных Q_r, служащих начальными данными. Таким образом, уравнения движения можно будет записать в виде

$$\frac{\partial S}{\partial E} = t + c_1, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_r} = c_r \qquad (r = 2, \ldots, n),$$

где c — другая система постоянных (соответствующих, наряду с Q, начальным данным). Следует отметить, что P_1 связано с величиной q_t (см. стр. 243).

Интересна и важна связь уравнения Гамильтона — Якоби с уравнением Шредингера (2.6.28) $\mathscr{H}[(\hbar/i)(\partial/\partial q), q]\,\psi = E\psi$ для волновой функции ψ в квантовой механике, но на этом мы не можем останавливаться. Нужно, впрочем, заметить следующее: если положить $\psi = e^{(i/\hbar)S}$, то тогда, когда S настолько больше $\hbar$, что $(i/\hbar)(\partial^2 S/\partial q^2)$ пренебрежимо мало по сравнению с $(i/\hbar)^2(\partial S/\partial q)^2$, уравнение Шредингера приводится к уравнению Гамильтона — Якоби. В пределе, при больших значениях действия и энергии, поверхности постоянной фазы волновой функции ψ превращаются в поверхности постоянного действия S для соответствующей классической системы. Волновая механика переходит в «геометрическую механику» так же, как волновая оптика переходит в геометрическую оптику при исчезающе малых длинах волн.

Мы изложили здесь значительную часть классической динамики, не разбавленную примерами. Прежде чем перейти собственно к предмету настоящей главы, т. е. к приложению вариационного принципа к теории полей, мы укрепим наши позиции, рассмотрев несколько примеров.

Двумерный осциллятор. Полезным примером может служить движение массы, помещенной на конце упругого стержня, который может изгибаться в двух направлениях. При малых колебаниях движение массы происходит в плоскости, и в качестве координат q_1 и q_2 массы можно взять прямоугольные координаты, выбрав в качестве направлений для осей координат главные направления сил упругости, так что сила в направлении q_1 будет пропорциональна только q_1, и аналогично для q_2. При этом кинетическая энергия массы будет равна $\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$. Если упругость одинакова по обоим направлениям, то потенциальная энергия полу-

чит выражение $\frac{1}{2} m\omega^2 (q_1^2 + q_2^2)$. Уравнения Лагранжа (3.2.4) совпадут с уравнениями Ньютона

$$\ddot{q}_1 = -\omega^2 q_1, \quad \ddot{q}_2 = -\omega^2 q_2,$$

и их решениями будут q_1 и q_2, зависящие от t синусоидально с частотой $\omega/2\pi$.

Сопряженные импульсы суть, разумеется, $p_1 = m\dot{q}_1$, $p_2 = m\dot{q}_2$, так что функцией Гамильтона явится

$$H(p, q) = (1/2m)\,[p_1^2 + p_2^2 + m^2\omega^2 (q_1^2 + q_2^2)]. \tag{3.2.13}$$

Хотя решения уже получены из уравнений Лагранжа, но для того, чтобы проиллюстрировать основные понятия и величины, введенные выше, мы попытаемся решить задачу при помощи преобразования прикосновения. Было бы удобно, если бы новые импульсы оказались постоянны, а для этого достаточно получить новую гамильтонову функцию K, не зависящую от Q_1 и Q_2.

Проще всего положить K пропорциональной $P_1 + P_2$, так как при этом $\dot{P} = -\partial K/\partial Q = 0$. В силу уравнений $\dot{Q} = \partial K/\partial P$, Q будут пропорциональны времени t. Это приводит к следующему преобразованию:

$$q = A\sin(\omega t), \quad p = m\omega A\cos(\omega t), \quad Q \propto \omega t \text{ и } P \propto A^2\ ^{1)},$$

то есть

$$Q_1 = \operatorname{arctg}(m\omega q_1/p_1), \quad Q_2 = \operatorname{arctg}(m\omega q_2/p_2),$$
$$P_1 = (1/2m\omega)\,(p_1^2 + m^2\omega^2 q_1^2), \quad P_2 = (1/2m\omega)\,(p_2^2 + m^2\omega^2 q_2^2).$$

Величина $p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 - P_1\,dQ_1 - P_2\,dQ_2$, если ее выразить через p и q, имеет вид $\frac{1}{2}(p_1\,dq_1 + q_1\,dp_1 + p_2\,dq_2 + q_2\,dp_2)$ и является полным дифференциалом функции

$$S = \frac{1}{2}(p_1 q_1 + p_2 q_2) = \frac{1}{2} m\omega\,[q_1^2 \operatorname{ctg}(Q_1) + q_2^2 \operatorname{ctg}(Q_2)], \tag{3.2.14}$$

которая и определяет искомое преобразование. Значит, это — преобразование прикосновения. Выразив p, q через P, Q, мы получим

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{2/m\omega}\,\sqrt{P_1}\sin Q_1, & q_2 &= \sqrt{2/m\omega}\,\sqrt{P_2}\sin Q_2, \\ p_1 &= \sqrt{2m\omega}\,\sqrt{P_1}\cos Q_1, & p_2 &= \sqrt{2m\omega}\,\sqrt{P_2}\cos Q_2. \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Мы видим, что новой гамильтоновой функцией является

$$K = \omega\,(P_1 + P_2).$$

Так как мы осуществили преобразование прикосновения, то уравнения Гамильтона (3.2.7) по-прежнему выполняются, и в силу того, что $\dot{Q} = \partial K/\partial P$, мы получим

$$Q_1 = \omega t + \varphi_1, \qquad Q_2 = \omega t + \varphi_2.$$

Так как $\dot{P} = -\partial K/\partial Q = 0$, то P_1 и P_2 постоянны.

Решение получено, так как мы можем, подставив эти простые выражения в (3.2.15), получить формулы, выражающие координаты и импульсы через время и энергию движения K.

---

[1]) $\propto$ — знак пропорциональности. — *Прим. ред.*

Заметим, что P имеют размерность действия, а Q представляют собой углы. Действительно, если проинтегрировать $p\,dq$ по периоду колебаний и выразить результат через P и Q, то получится

$$\int p\,dq = 2P\int_0^{2\pi}\cos^2 Q\,dQ = 2\pi P$$

— величина, пропорциональная P. Эти канонически сопряженные переменные Q и P так и называются соответственно *угловой переменной и переменной действия*. Любая задача, связанная с колебательным процессом, имеющая синусоидальные решения, может быть упрощена и решена посредством должным образом подобранного преобразования прикосновения, вводящего эти переменные.

Возвращаясь к двумерному гармоническому осциллятору, мы можем также вместо прямоугольных координат q_1, q_2 выразить движение в полярных координатах r, φ. Соответствующее преобразование прикосновения запишется в виде

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{q_1^2+q_2^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(q_2/q_1),\\ p_r &= (1/r)(p_1q_1+p_2q_2), \quad p_\varphi = (p_2q_1-p_1q_2), \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

а гамильтонова функция получит выражение

$$K = (1/2m)[p_r^2 + p_\varphi^2/r^2 + m^2\omega^2r^2]. \tag{3.2.17}$$

Так как $\partial K/\partial\varphi = 0$, то величина p_φ — *момент количества движения* системы постоянна. Нетрудно видеть, что это, верно, независимо от того, каково выражение потенциальной энергии, коль скоро последняя зависит от r и не зависит от φ. Дальше, если нужно, можно воспользоваться решением в прямоугольных координатах.

Заряженная частица в электромагнитном поле. Бывают случаи, когда не очевидно, каков должен быть вид функции Лагранжа $L = T - V$, фигурирующей в вариационном интеграле (3.2.3). Так бывает, в частности, тогда, когда появляются силы, порожденные полем. Во многих таких случаях для получения правильного ответа приходится сопоставлять имеющиеся сведения о скалярных инвариантах системы с рассмотрением простейших предельных случаев.

Например, когда рассматривается заряженная частица в электромагнитном поле, следует ли энергию взаимодействия между магнитным полем и движением частицы считать частью кинетической энергии T (поскольку она зависит от скорости частицы) или отнести ее к потенциальной энергии V (раз она обусловлена воздействием поля)? Мы начнем с того, что перечислим все скалярные инварианты (в трехмерном пространстве) частицы и поля. Инвариантом должна быть сама функция Лагранжа $L = T - V$, так как принцип Гамильтона действует при любом выборе системы координат в пространстве. Кинетическая энергия $\frac{1}{2}mv^2$ частицы, взятой сама по себе, будучи пропорциональна скалярному квадрату вектора $\mathbf{v}$, также является инвариантом. Инвариантен и электрический потенциал φ (в трехмерном пространстве). Инвариантны также квадраты напряженностей E^2 и H^2 электрического и магнитного полей и квадрат A^2 векторного потенциала. Оба поля получаются из потенциалов посредством дифференцирования, а силы, действующие на частицу, получаются дифференцированием функции Лагранжа [см. формулы (3.2.2) и (3.2.4)], поэтому естественно ожидать, что в функцию Лагранжа частицы

войдут только потенциалы $\mathbf{A}$ и φ. Другим инвариантом, который может появиться, является скалярное произведение $\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$.

На частицу действуют силы $e\mathbf{E} = -e\,\mathrm{grad}\,\varphi - (e/c)(\partial\mathbf{A}/\partial t)$ [в силу (2.5.13)] и $(e/c)\,\mathbf{v}\times\mathbf{B} = (e/c)\,\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ [см. (2.5.5)], и их выражение должно получаться, согласно уравнениям Лагранжа (3.2.4), дифференцированием функции L. Так как при этом должна появиться производная от $\mathbf{A}$ по времени, то в выражение L войдет произведение $\mathbf{v}$ и $\mathbf{A}$, предположительно $\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$. При рассмотрении уравнения для самой частицы (уравнения, описывающие поля, мы пока не рассматриваем) в него не войдут члены второй степени относительно $\mathbf{A}$. Итак, L для частицы должна быть комбинацией членов, содержащих v^2, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$ и φ.

Первым из них, очевидно, является $\frac{1}{2}mv^2$, кинетическая энергия частицы. Член, содержащий φ, представляет собой потенциальную энергию; последняя, если частица несет заряд e, равна $-e\varphi$. Третий член должен дать $-(e/c)(\partial\mathbf{A}/\partial t)$, т. е. второе слагаемое в выражении $e\mathbf{E}$ и, кроме того, $(e/c)\,\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$. Так как $\mathrm{grad}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A} + \mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{A})$ (см. стр. 116), то третий член, видимо, должен иметь вид $(e/c)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$. Поэтому функция Лагранжа для заряженной частицы в электромагнитном поле должна иметь выражение

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + (e/c)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} - e\varphi. \tag{3.2.18}$$

Заметив, что аргументами $\mathbf{A}$ и φ служат координаты x, y, z частицы в момент t, мы сможем записать три уравнения (3.2.4) (для трех координат) в виде одного векторного уравнения. Так как

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_x + \frac{e}{c}A_x = p_x,$$

то таким векторным уравнением будет

$$\frac{d}{dt}\left(m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) = \mathrm{grad}\,L = -e\,\mathrm{grad}\,\varphi + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{A}).$$

Слагаемое, входящее в выражение $\mathbf{E}$ [см. (2.5.13)], содержит частную производную по времени $\partial\mathbf{A}/\partial t$, характеризующую изменение $\mathbf{A}$ *в фиксированной точке пространства.* В то же время левая часть последнего уравнения есть полная производная $\mathbf{A}$ по времени, т. е. скорость изменения $\mathbf{A}$ для движущейся частицы. В силу (2.3.2) для точки, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{A}).$$

Поэтому векторное уравнение движения частицы сводится к виду

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = -e\,\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}, \tag{3.2.19}$$

который соответствует выражению (2.5.12) для эффективной силы, действующей на заряженную частицу.

Теперь мы можем составить для рассматриваемой частицы функцию Гамильтона. Импульсом частицы является вектор, компонента которого, скажем, по оси x, есть $\partial L/\partial v_x$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + (e/c)\,\mathbf{A}.$$

В рассматриваемом случае скорость частицы должна непрерывно изменяться под действием поля, поэтому величина $m\mathbf{v}$ не может «сохраняться». Если мы все-таки хотим иметь закон сохранения импульса,

то мы не должны $\mathbf{p}$ приравнивать $m\mathbf{v}$. Согласно (3.2.6) функция Гамильтона есть

$$H=\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}-L=\left(m\mathbf{v}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{v}-\frac{1}{2}mv^2-\frac{e}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}+e\varphi=$$
$$=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+e\varphi. \qquad (3.2.20)$$

Это выражение встречалось на стр. 245 и 246.

Этот пример дает нам некоторое представление о том, каким образом аппарат классической динамики охватывает поля и взаимодействие с полями. Импульсы перестают быть просто пропорциональны скоростям, менее ясным становится, что есть кинетическая энергия, или H, или L, и для получения правильных выводов приходится в большей мере полагаться на формальные уравнения, такие, как (3.2.4), (3.2.6) и (3.2.7), чем на «интуицию».

В качестве частного примера рассмотрим частицу с массой m, несущую заряд e, в постоянном магнитном поле с напряженностью $B=mc\omega/e$, направленной вдоль оси z. Скалярный потенциал $\varphi=0$, а векторный потенциал

$$\mathbf{A}=\frac{mc\omega}{2e}(-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}).$$

Функцией Лагранжа служит

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}m\omega(-\dot{x}y+\dot{y}x),$$

где $\dot{x}=dx/dt$, $\dot{y}=dy/dt$; импульсы выражаются в виде

$$p_x=m\left(\dot{x}-\frac{1}{2}\omega y\right), \quad p_y=m\left(\dot{y}+\frac{1}{2}\omega x\right).$$

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\omega\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\omega\frac{dx}{dt}$$

имеют решения

$$x=R\sin(\omega t+\alpha)+x_0, \quad y=R\cos(\omega t+\alpha)+y_0,$$

изображающие вращательное движение по окружности радиуса R с центром в (x_0, y_0). Функция Гамильтона равна, разумеется,

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_x+\frac{1}{2}m\omega y\right)^2+\frac{1}{2m}\left(p_y-\frac{1}{2}m\omega x\right)^2=\frac{1}{2}m\omega^2R^2=\frac{1}{2}mv^2.$$

Заметим, что радиус орбиты равен v/ω, где ω равно произведению напряженности B магнитного поля на e/mc.

Упрощение функции Гамильтона достигается преобразованием прикосновения

$$x=\sqrt{1/m\omega}\left[\sqrt{2P_1}\sin Q_1+P_2\right], \quad p_x=\frac{1}{2}\sqrt{m\omega}\left[\sqrt{2P_1}\cos Q_1-Q_2\right],$$
$$y=\sqrt{1/m\omega}\left[\sqrt{2P_1}\cos Q_1+Q_2\right], \quad p_y=\frac{1}{2}\sqrt{m\omega}\left[-\sqrt{2P_1}\sin Q_1+P_2\right].$$

В том, что это — преобразование прикосновения, можно убедиться с помощью равенств (2.6.4), содержащих скобки Пуассона, взяв в этих последних P и Q в качестве независимых переменных. Эти преобразова-

ния, после подстановки в H, дают новую функцию Гамильтона

$$K = \omega P_1.$$

В силу (3.2.7) P_1, P_2 и Q_2 оказываются постоянны, а Q_1 зависит от времени линейно с коэффициентом пропорциональности, равным ω — угловой скорости частицы при движении по окружностям.

Релятивистская частица. Другой пример применения уравнений классической динамики, который понадобится нам в дальнейшем в этой главе, относится к описанию поведения частицы, движущейся со столь большой скоростью, при которой нельзя пренебрегать отношением v^2 к c^2. Выше было отмечено, что L не является лоренц-инвариантом. Действительно, вариационный интеграл $\int L\,dt$, взятый вдоль мировой линии частицы, должен быть таким инвариантом. Если частица движется со скоростью u относительно наблюдателя, то дифференциал dt времени наблюдателя связан с дифференциалом собственного времени $d\tau$ частицы соотношением $d\tau = \sqrt{1-(u/c)^2}\,dt$. Из инвариантности $\int L\,dt = \int \left(L/\sqrt{1-(u/c)^2}\right) d\tau$ и $d\tau$ следует инвариантность подинтегральной функции $L/\sqrt{1-(u/c)^2}$. Таким образом, L выражается в виде некоторого лоренцова инварианта, умноженного на $\sqrt{1-(u/c)^2}$.

Например, для свободно движущейся частицы релятивистская функция Лагранжа есть

$$L = -m_0c^2\sqrt{1-(u/c)^2} \approx -m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0u^2, \quad u \ll c. \tag{3.2.21}$$

Написанное выражение представляет собой кинетическую энергию минус энергия покоя m_0c^2; из него следовало еще вычесть потенциальную энергию, если бы она имелась. Дифференцируя L по компонентам u, мы получим импульс

$$p = \frac{m_0u}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

[см. (1.7.5)].

Функцией Гамильтона будет служить

$$H = pu - L = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} =$$

$$= m_0c^2\sqrt{1+(p/m_0c)^2} \approx m_0c^2 + \left(\frac{1}{2m_0}\right)p^2 + \ldots, \quad p \ll m_0c. \tag{3.2.22}$$

Этим выражением мы пользовались на стр. 246 и 252 в связи с уравнением Дирака для электрона. Это выражение, разумеется, представляет собой временную компоненту некоторого 4-вектора, пространственными компонентами которого служат компоненты вектора cp. Слагаемое, соответствующее потенциальной энергии, если оно фигурирует, также должно быть временной компонентой некоторого 4-вектора.

Диссипативные системы. Наконец, прежде чем обратиться к применениям принципа Гамильтона к теории полей, мы введем аппарат, позволяющий исследовать диссипативные системы (т. е. такие системы, в которых нельзя пренебрегать трением) так, как будто они были консервативны (т. е. с пренебрежимо малым трением). Уловка будет состоять в том, что одновременно с заданной системой, имеющей обычное трение, рассматривается ее «зеркальное отражение», обладающее *отрицательным* трением

и поглощающее ту энергию, которая теряется заданной системой. При этом полная энергия остается постоянной, и мы можем получить инвариантную функцию Лагранжа ценой утраты «реального смысла» некоторых побочных результатов.

Рассмотрим в качестве примера одномерный осциллятор с трением, движение которого описывается уравнением

$$m\ddot{x}+R\dot{x}+Kx=0. \tag{3.2.23}$$

Мы хотим получить это уравнение с помощью некоторой функции Лагранжа, применив обычный вариационный метод. Для этого мы чисто формально составим выражение

$$L=m(\dot{x}\dot{x}^*)-\frac{1}{2}R(x^*\dot{x}-x\dot{x}^*)-Kxx^* \tag{3.2.24}$$

и будем рассматривать его как функцию Лагранжа, в которую входят две координаты x и x^*. Координата x^* изображает «зеркально отраженный» осциллятор с отрицательным трением. Применив обычные выкладки, мы получим импульсы

$$p=m\dot{x}^*-\frac{1}{2}Rx^*,\quad p^*=m\dot{x}+\frac{1}{2}Rx,$$

имеющие, впрочем, мало общего с действительным количеством движения осциллятора. Однако наш аппарат, продолжая действовать формально, даст нам уравнения Лагранжа для той и другой системы

$$m\ddot{x}^*-R\dot{x}^*+Kx^*=0,\quad m\ddot{x}+R\dot{x}+Kx=0.$$

Уравнение, содержащее x, совпадает с исходным уравнением (3.2.23). Уравнение с x^*, как уже говорилось выше, содержит $-R\dot{x}^*$, что соответствует отрицательному трению.

Функцией Гамильтона является

$$H=p\dot{x}+p^*\dot{x}^*-L=m\dot{x}\dot{x}^*+Kxx^*=$$
$$=(1/m)\left(p+\frac{1}{2}Rx^*\right)\left(p^*-\frac{1}{2}Rx\right)+Kxx^*. \tag{3.2.25}$$

H остается постоянной в связи с тем, что амплитуда координаты x^* растет так же быстро, как убывает амплитуда x. В постоянстве H легко убедиться, умножив первое из уравнений Лагранжа на x, второе — на x^* и сложив их.

Этот прием позволяет нам оперировать с диссипативными системами так, как если бы они были консервативными. Хотя он не может конкурировать с другими способами решения тогда, когда таковые известны, но совершенно необходим при изучении диссипативных полей, например, в случае уравнения диффузии. Заметим, что, хотя ранее мы считали L квадратичной функцией от $\dot{q}$, здесь L содержала член $\dot{x}^*\dot{x}$; это указывает на то, что подобные случаи далеко не типичны.

Импеданс и полная проводимость для диссипативных систем. Сейчас целесообразно вернуться к рассмотрению механического импеданса (см. стр. 271—274) и выяснить, что получится при наличии сил сопротивления. Как мы видели, если система обладает динамическим или статическим равновесием, то можно ввести такие координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые равны нулю в точке равновесия. При достаточно малых отклонениях от положения равновесия потенциальная энергия может быть пред-

ставлена в виде

$$V=\frac{1}{2}\sum_{m,r} b_{mr}x_m x_r+V_0=\frac{1}{2}\mathbf{x}\cdot\mathfrak{B}\cdot\mathbf{x}+V_0,$$

где $\mathfrak{B}$ — аффинор с элементами b_{mr}, а $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор с компонентами x_r. Кинетическая энергия, как всегда, задается формулой

$$T=\frac{1}{2}\sum_{m,r} a_{mr}\dot{x}_m\dot{x}_r=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathfrak{A}\cdot\dot{\mathbf{x}},$$

где $\mathfrak{A}$ — аффинор с элементами a_{mr}.

При наличии трения m-й координате соответствует сила сопротивления, которую можно представить в виде

$$\sum_r r_{mr}\dot{x}_r=(\mathfrak{R}\cdot\dot{\mathbf{x}})_m,$$

где $\mathfrak{R}$ — аффинор сопротивления, компонентами которого служат r_{mr}. Недиагональные элементы $\mathfrak{R}$, как и в случае кинетической и потенциальной энергий, соответствуют связям различных смещений x_m.

Следуя образцу (3.2.24), запишем функцию Лагранжа в виде

$$L=\sum_{m,r}\left[a_{mr}\dot{x}_m^*\dot{x}_r-\frac{1}{2}r_{mr}(x_m^*\dot{x}_r-\dot{x}_m^*x_r)-b_{mr}x_m^*x_r\right]=$$

$$=\dot{\mathbf{x}}^*\cdot\mathfrak{A}\cdot\dot{\mathbf{x}}-\frac{1}{2}\mathbf{x}^*\cdot\mathfrak{R}\cdot\dot{\mathbf{x}}+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^*\cdot\mathfrak{R}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\cdot\mathfrak{B}\cdot\mathbf{x}, \qquad (3.2.26)$$

где $\mathbf{x}^*$ — вектор, сопряженный с $\mathbf{x}$. Вектор импульса и сопряженный с ним вектор имеют вид

$$\mathbf{p}=\dot{\mathbf{x}}^*\cdot\mathfrak{A}-\frac{1}{2}\mathbf{x}^*\cdot\mathfrak{R},\quad \mathbf{p}^*=\mathfrak{A}\cdot\dot{\mathbf{x}}+\frac{1}{2}\mathfrak{R}\cdot\mathbf{x},$$

а функция Гамильтона

$$H=\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{x}}+\dot{\mathbf{x}}^*\cdot\mathbf{p}^*-L=\dot{\mathbf{x}}^*\cdot\mathfrak{A}\cdot\dot{\mathbf{x}}+\mathbf{x}^*\cdot\mathfrak{B}\cdot\mathbf{x}=$$

$$=\left(\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{x}^*\cdot\mathfrak{R}\right)\cdot(\mathfrak{A}^{-1})\cdot\left(\mathbf{p}^*-\frac{1}{2}\mathfrak{R}\cdot\mathbf{x}\right)+\mathbf{x}^*\cdot\mathfrak{B}\cdot\mathbf{x}, \qquad (3.2.27)$$

где $\mathfrak{A}^{-1}$ — аффинор, обратный по отношению к $\mathfrak{A}$, т. е. такой, что $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}^{-1}=\mathfrak{A}^{-1}\cdot\mathfrak{A}=\mathfrak{J}$.

Изменения p^* вызываются обобщенной силой, соответствующей смещению x_m, а не зеркально отраженному смещению. Каноническое уравнение Гамильтона, соответствующее m-й координате, имеет вид

$$F_m=\dot{p}_m^*+(\partial H/\partial x_m^*);$$

в абстрактном векторном пространстве эти уравнения могут быть записаны так:

$$\mathbf{F}=\dot{\mathbf{p}}^*+\sum_{m=1}^{n}(\partial H/\partial x_m^*)\mathbf{e}_m=\dot{\mathbf{p}}^*+\frac{1}{2}\mathfrak{R}\cdot(\mathfrak{A}^{-1})\cdot\left(\mathbf{p}^*-\frac{1}{2}\mathfrak{R}\cdot\mathbf{x}\right)+\mathfrak{B}\cdot\mathbf{x}=$$

$$=\mathfrak{A}\cdot\ddot{\mathbf{x}}+\mathfrak{R}\cdot\dot{\mathbf{x}}+\mathfrak{B}\cdot\mathbf{x}. \qquad (3.2.28)$$

Если движущие силы имеют колебательный характер, $\mathbf{F}=\mathbf{F}^\circ e^{i\omega t}$, то все отклонения (при установившемся движении) будут представлять собой колебания с той же частотой $\mathbf{x}=\mathbf{A}e^{i\omega t}$ (компонентами вектора $\mathbf{A}$ будут служить A_m — амплитуды колебаний по m-й координате); скорость выра-

зится в виде $\mathbf{x}=\mathbf{U}e^{i\omega t}$ (где $\mathbf{U}$ имеет компоненты U_m). $\mathbf{F}^\circ$ связано с $\mathbf{A}$ и с $\mathbf{U}$ соотношениями

$$\mathbf{F}=\mathfrak{Z}\cdot\mathbf{U}=i\omega\mathfrak{Z}\cdot\mathbf{A},\quad Z_{mr}=i\omega a_{mr}+r_{mr}+(1/i\omega)\,b_{mr}. \tag{3.2.29}$$

Аффинор импеданса теперь комплексный, а не чисто мнимый. Действительная часть каждого из его элементов называется активным *сопротивлением* (*резистансом*), мнимая часть — реактивным сопротивлением (*реактансом*). Обратный аффинор $\mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}^{-1}$ легко вычислить, зная определитель $\Delta_Z=|Z_{mr}|$

$$Y_{mr}=Z'_{mr}/\Delta_Z;\quad Z'_{mr}=\partial\Delta_Z/\partial Z_{mr}. \tag{3.2.30}$$

Здесь Z'_{rm} — алгебраическое дополнение элемента Z_{rm} в определителе Δ_Z. $\mathfrak{Y}$ называется *аффинором полной проводимости* (*адмитанса*); действительная часть каждой из его компонент называется активной *проводимостью* (*кондуктансом*), мнимая часть — *реактивной проводимостью* (*сусептансом*).

Так как $\mathfrak{Z}$ — симметричный аффинор, для него можно найти главные оси. Будучи приведен к главным осям (иначе говоря, записан в *нормальных координатах*) аффинор $\mathfrak{Z}$ принимает диагональную форму; при этом диагональные элементы Z_r носят название *главных значений импеданса*. Определитель Δ_Z оказывается равным произведению этих главных значений, так что

$$(-i\omega)^n\Delta_z=|\omega^2a_{mr}-i\omega r_{mr}-b_{mr}|=(-i\omega Z_1)(-i\omega Z_2)\ldots(-i\omega Z_n). \tag{3.2.31}$$

Так как все диагональные элементы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{B}$ положительны, то такой определитель может быть разложен на n множителей вида $M\omega^2-iR\omega-K$, где коэффициенты M, R и K положительны. Расположим эти множители в порядке возрастания действительных частей их корней $i(R/2M)\pm\pm(1/2M)\sqrt{4KM-R^2}$. Множитель $i\omega Z_1$ имеет наименьшее значение $\sqrt{(K_1/M_1)-(R_1/2M_1)^2}$, остальные значения выражаются аналогично (кроме тех множителей, которые, в силу неравенства $R^2>4KM$, имеют чисто мнимые корни; такие множители мы расположим в порядке *убывания* абсолютных величин корней). Таким образом, r-е главное значение импеданса равно

$$\begin{aligned}Z_r&=\frac{i}{\omega}[M_r\omega^2-iR_r\omega-K_r]=\frac{iM_r}{\omega}[\omega^2-2ik_r\omega-\omega_r^2-k_r^2]=\\&=\frac{iM_r}{\omega}(\omega-ik_r-\omega_r)(\omega-ik_r+\omega_r),\end{aligned} \tag{3.2.32}$$

где $k_r=(R_r/2M_r)$, $\omega_r=\sqrt{(K_r/M_r)-k_r^2}$, коль скоро $K_r/M_r>k_r^2$. Постоянные M_r, R_r, K_r, k_r и ω_r все определяются значениями a_{mr}, r_{mr} и b_{mr}.

Аффинор $\mathfrak{Y}$ становится бесконечным при $2n$ различных комплексных значениях ω, из которых n вида ω_r+ik_r имеют положительные действительную и мнимую части и расположены так, что $\omega_{m-1}\leqslant\omega_m$, а остальные n имеют вид $-\omega_r+ik_r$, то есть при соответственно тех же мнимых частях имеют действительные части противоположного знака. Иначе говоря, если нанести эти корни на комплексной плоскости, то все они окажутся над действительной осью, причем те, у которых $\omega<0$, окажутся симметричны относительно мнимой оси корням с $\omega>0$ (если среди k_r^2 есть большие K_r/M_r, то соответствующие корни окажутся на самой мнимой оси над действительной осью). Найденные корни соответствуют свободным колебаниям системы; зависимость r-го нормального колебания от времени определяется множителем $e^{-k_rt+i\omega_rt}$, а компоненты смещения будут пропорциональны компонентам единичного вектора вдоль r-й оси системы нор-

мальных координат в абстрактном векторном пространстве. Вид множителя, содержащего t, свидетельствует о том, что эти колебания — затухающие.

Сопряженным координатам, конечно, также соответствуют аффиноры импеданса и адмитанса, с помощью которых можно выразить зависимость между силами $F_m^* = \dot{p}_m + \partial H/\partial x_m$ и скоростями $\dot{x}_m^*$. Компоненты этих аффиноров отличаются от соответствующих компонент $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{Y}$ только тем, что они имеют отрицательные сопротивления вместо положительных. Иначе говоря, компоненты $-i\omega\mathfrak{Z}^*$ являются комплексно сопряженными по отношению к компонентам $-i\omega\mathfrak{Z}$, что отвечает указанному выше зеркальному соответствию.

3.3 Скалярные поля

В классической динамике задача оказывается решенной, когда получены выражения координат системы как функций времени; вариационный интеграл, служащий для отыскания решения, представляет собой интеграл по времени от функции Лагранжа, выраженной через координаты и их производные по времени. Материальные поля, рассмотренные в предыдущей главе (упругая деформация, диффундирующая плотность, потенциал скоростей жидкости), представляют собой «сглаженные» средние от величин, характеризующих поведение сложных систем, образованных множеством частиц. Для решения задач такого рода мы можем взять уравнения движения частиц и затем, усреднив эти уравнения, получить уравнения поля, как это делалось, по крайней мере в принципе, в гл. 2. Или же, прежде чем минимизировать интеграл, мы можем усреднить функцию Лагранжа для всей системы и получить вариационный интеграл для *поля*; так мы и будем поступать в этой главе.

Во многих случаях получается поле скалярной функции от времени и координат, которые и служат параметрами интеграции. Само поле варьируется для отыскания минимума интеграла от функции Лагранжа, и уравнения Эйлера (3.1.3) оказываются уравнениями в частных производных, выражающими зависимость поля от координат и времени.

Гибкая струна. Эти замечания мы проиллюстрируем на простом примере натянутой гибкой струны; этот пример послужит нам ориентиром при рассмотрении более сложных задач. Мы начнем с того, что составим функцию Лагранжа для каждого атома струны (следовало бы, конечно, начать с уравнения Шредингера, но здесь мы рассматриваем движения многих миллионов атомов, поэтому квантовыми эффектами можно пренебречь и воспользоваться законами классической динамики).

Полная кинетическая энергия равна

$$T = \sum_{s=1}^{N} \frac{1}{2} m_s v_s^2,$$

где N — число наличных атомов. Движение каждого атома в элементе струны между x и $x+dx$ можно рассматривать как векторную сумму среднего движения $(\partial\psi/\partial t)\,\mathbf{j}$ этого элемента [для простоты мы предполагаем, что такое движение происходит в плоскости, ортогональной струне; среднее смещение точки x струны от положения равновесия обозначено $\psi(x)$] и колебательных движений $\mathbf{w}_s$ отдельных атомов около этого среднего движения. Полная кинетическая энергия элемента струны равна