мальных координат в абстрактном векторном пространстве. Вид множителя, содержащего t, свидетельствует о том, что эти колебания — затухающие.

Сопряженным координатам, конечно, также соответствуют аффиноры импеданса и адмитанса, с помощью которых можно выразить зависимость между силами $F_m^* = \dot{p}_m + \partial H/\partial x_m$ и скоростями $\dot{x}_m^*$. Компоненты этих аффиноров отличаются от соответствующих компонент $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{Y}$ только тем, что они имеют отрицательные сопротивления вместо положительных. Иначе говоря, компоненты $-i\omega\mathfrak{Z}^*$ являются комплексно сопряженными по отношению к компонентам $-i\omega\mathfrak{Z}$, что отвечает указанному выше зеркальному соответствию.

3.3 Скалярные поля

В классической динамике задача оказывается решенной, когда получены выражения координат системы как функций времени; вариационный интеграл, служащий для отыскания решения, представляет собой интеграл по времени от функции Лагранжа, выраженной через координаты и их производные по времени. Материальные поля, рассмотренные в предыдущей главе (упругая деформация, диффундирующая плотность, потенциал скоростей жидкости), представляют собой «сглаженные» средние от величин, характеризующих поведение сложных систем, образованных множеством частиц. Для решения задач такого рода мы можем взять уравнения движения частиц и затем, усреднив эти уравнения, получить уравнения поля, как это делалось, по крайней мере в принципе, в гл. 2. Или же, прежде чем минимизировать интеграл, мы можем усреднить функцию Лагранжа для всей системы и получить вариационный интеграл для *поля*; так мы и будем поступать в этой главе.

Во многих случаях получается поле скалярной функции от времени и координат, которые и служат параметрами интеграции. Само поле варьируется для отыскания минимума интеграла от функции Лагранжа, и уравнения Эйлера (3.1.3) оказываются уравнениями в частных производных, выражающими зависимость поля от координат и времени.

Гибкая струна. Эти замечания мы проиллюстрируем на простом примере натянутой гибкой струны; этот пример послужит нам ориентиром при рассмотрении более сложных задач. Мы начнем с того, что составим функцию Лагранжа для каждого атома струны (следовало бы, конечно, начать с уравнения Шредингера, но здесь мы рассматриваем движения многих миллионов атомов, поэтому квантовыми эффектами можно пренебречь и воспользоваться законами классической динамики).

Полная кинетическая энергия равна

$$T = \sum_{s=1}^{N} \frac{1}{2} m_s v_s^2,$$

где N — число наличных атомов. Движение каждого атома в элементе струны между x и $x+dx$ можно рассматривать как векторную сумму среднего движения $(\partial\psi/\partial t)\,\mathbf{j}$ этого элемента [для простоты мы предполагаем, что такое движение происходит в плоскости, ортогональной струне; среднее смещение точки x струны от положения равновесия обозначено $\psi(x)$] и колебательных движений $\mathbf{w}_s$ отдельных атомов около этого среднего движения. Полная кинетическая энергия элемента струны равна

поэтому

$$T=\frac{1}{2}\sum_{dx} m_s(\dot{\psi}^2+2\dot{\psi}\mathbf{j}\cdot\mathbf{w}_s+w_s^2) \qquad \left(\dot{\psi}=\frac{\partial\psi}{\partial t}\right),$$

где члены $\mathbf{j}\cdot\mathbf{w}_s$ имеют среднее по времени значение, равное нулю. Суммирование произведено по всем частицам, содержащимся в элементе струны длины dx. Так как сейчас нас не интересуют колебания отдельных атомов, то мы не станем составлять индивидуальные лагранжевы уравнения для координат, соответствующих скоростям $\mathbf{w}_s$. Следовательно, мы выбросим последние слагаемые в скобках не потому, что они пренебрежимо малы (в действительности они соответствуют внутренней тепловой энергии струны и не малы в совокупности), а потому, что мы не хотим сейчас рассматривать эти движения молекул. Вторыми слагаемыми в скобках мы пренебрегаем потому, что их производные по $\dot{\psi}$ (входящие в уравнение Лагранжа для ψ) имеют средние по времени, равные нулю. Итак, интересующая нас полная кинетическая энергия выражается в виде

$$T=\frac{1}{2}\rho\int\dot{\psi}^2dx, \tag{3.3.1}$$

где ρdx равно сумме масс m_s всех частиц, содержащихся в участке струны между x и $x+dx$.

Потенциальная энергия струны представляет собой сложную функцию координат всех атомов системы. В ней также можно выделить слагаемое, выражающее среднее приращение потенциальной энергии струны, когда последняя смещается на $\psi(x)$ от положения равновесия, и слагаемое, соответствующее индивидуальным отклонениям частиц от их среднего положения; последнее мы отбросим, как и при выводе формулы (3.3.1). Первое же слагаемое мы найдем, подсчитав работу, которая затрачивается на растяжение струны, когда ее выводят из положения равновесия. Если натяжение струны равно T_0, то эта работа равна произведению T_0 на приращение длины струны при условии, что это последнее мало по сравнению с длиной. Таким образом, интересующая здесь нас часть потенциальной энергии выразится в виде

$$V=T_0\int_0^l\left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2}-1\right]dx\approx\frac{1}{2}T_0\int_0^l\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2dx, \tag{3.3.2}$$

если только $(\partial\psi/\partial x)^2\ll 1$ и струна натянута между точками $x=0$ и $x=l$.

Итак, для усредненного поперечного движения струны в заданной плоскости функция Лагранжа равна

$$\mathscr{L}=T-V=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2-T_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\rho\int_0^l\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2-c^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right]dx,\ c^2=\frac{T_0}{\rho}. \tag{3.3.3}$$

Она представляет собой взятый вдоль всей длины струны интеграл от *плотности функции Лагранжа*

$$L=\frac{1}{2}\rho[(\partial\psi/\partial t)^2-c^2(\partial\psi/\partial x)^2].$$

Как и раньше, мы стремимся к тому, чтобы минимизировать интеграл

функции $\mathscr{L}$ по времени. Эта задача приводит к уравнению Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial\psi/\partial t)}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial\psi/\partial x)}\right)-\frac{\partial L}{\partial\psi}=0$$

или

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0;$$

это — уравнение колебаний струны [см. (2.1.9)].

Волновое уравнение. Итак, одномерное волновое уравнение — уравнение колебаний струны — было выведено, исходя из требования, чтобы при соответствующем усреднении и при соблюдении начальных и краевых условий *разность между полной кинетической энергией струны и ее потенциальной энергией принимала наименьшее возможное значение*. Руководствуясь этим полезным замечанием, мы сумеем получить ряд других результатов.

Если, например, к струне приложена сила, действующая перпендикулярно оси x и распределенная так, что в точке x сила, приходящаяся на единицу длины струны, равна $F(x)$, то к потенциальной энергии нужно еще добавить $-F\psi$; если струна погружена в упругую среду (см. стр. 137), то нужно еще добавить слагаемое вида $\frac{1}{2}K\psi^2$. Окончательное выражение плотности функции Лагранжа будет иметь вид

$$L=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}K\psi^2+F\psi,$$

и мы получим такое уравнение движения

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-T_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=F-K\psi,$$

что согласуется с уравнением (2.1.27).

Импульсу в динамике точки здесь будет соответствовать производная $\mathscr{L}$ по $\dot\psi$; соответствующую плотность

$$p=\partial L/\partial\dot\psi=\rho\,(\partial\psi/\partial t) \tag{3.3.4}$$

называют *плотностью канонического импульса*. В случае струны, как мы видим, она равна импульсу единичного отрезка струны, движущегося со скоростью $\partial\psi(x)/\partial t$.

Плотность функции Гамильтона, согласно (3.2.6), есть

$$H=p\dot\psi-L=\frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2+c^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{1}{2}K\psi^2-F\psi=$$
$$=\frac{1}{2\rho}p^2+\frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}K\psi^2-F\psi \tag{3.3.5}$$

[ср. с (2.1.11)]. Интеграл от H, взятый вдоль струны, представляет собой полную энергию, но, в отличие от классической динамики, H зависит не только от p и ψ, но еще и от $\partial\psi/\partial x$. Естественно поэтому ожидать, что и уравнения, соответствующие гамильтоновым каноническим уравнениям (3.2.7), окажутся более сложными. С помощью принципа Гамиль-

тона, интегрируя в двух слагаемых по частям, мы получим

$$0=\delta\int dt\int dx\,[p\dot{\psi}-H(p,\ \psi,\ \psi')]=$$
$$=\int dt\int dx\,[\dot{\psi}\,\delta p+p\delta\dot{\psi}-(\partial H/\partial p)\,\delta p-(\partial H/\partial\psi)\,\delta\psi-(\partial H/\partial\psi')\,\delta\psi']=$$
$$=\int dt\int dx\,\{[\dot{\psi}-(\partial H/\partial p)]\,\delta p-[\dot{p}+(\partial H/\partial\psi)-(\partial/\partial x)\,(\partial H/\partial\psi')]\,\delta\psi\},$$

где

$$\dot{\psi}=\partial\psi/\partial t,\quad \dot{p}=\partial p/\partial t,\quad \psi'=\partial\psi/\partial x,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial\psi'}\right)-\frac{\partial H}{\partial\psi}. \tag{3.3.6}$$

Полученные уравнения отличаются от канонических присутствием члена $\partial H/\partial\psi'$. Комбинируя эти уравнения, мы придем к уравнению движения струны

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-K\psi+F.$$

Положение оказывается более сложным по сравнению с динамикой точки из-за того, что функция ψ, соответствующая координате q в динамике, зависит не только от параметра t, но и от параметра x. Это означает, что соотношения между импульсами, полем и градиентом поля сложнее соотношений, описываемых каноническими уравнениями (3.2.7).

Бóльшая сложность этих соотношений ясна также с точки зрения теории относительности. Мы видели на стр. 99, что энергия частицы есть временная компонента некоторого 4-вектора, пространственные компоненты которого пропорциональны импульсу. В то же время в рассматриваемом случае плотность энергии

$$H=\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}\dot{\psi}-L=\rho\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}-L$$

оказывается 4,4-компонентой некоторого тензора $\mathfrak{W}$; последний имеет компоненты

$$\begin{aligned}
&W_{11}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial\psi'}-L=-\frac{1}{2}\rho(\dot{\psi})^2-\frac{1}{2}T(\psi')^2+\frac{1}{2}K\psi^2-F\psi,\\
&W_{41}=\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial\psi'}=-T\dot{\psi}\psi',\quad W_{14}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}=\rho\dot{\psi}\psi',\\
&W_{44}=\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}-L=H.
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Эти компоненты удовлетворяют уравнениям дивергенции

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W_{11}}{\partial x}+\frac{\partial W_{14}}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\left[\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+K\psi-F\right]=0,\\
&\frac{\partial W_{41}}{\partial x}+\frac{\partial W_{44}}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial t}\left[\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+K\psi-F\right]=0,
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

имеющим интересное физическое истолкование. Взяв сначала второе из этих уравнений и проинтегрировав его по x от a до b, мы получим

$$-\int_a^b\left(\frac{\partial W_{44}}{\partial t}\right)dx=-\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b H\,dx=[W_{41}]_a^b.$$

Но в силу (2.1.2) W_{41} представляет собой поток энергии вдоль струны; он, очевидно, связан с изменением энергии H так, как описывается этим уравнением. Таким образом, второе уравнение (3.3.8) представляет собой уравнение неразрывности потока энергии вдоль струны.

Первое уравнение (3.3.8) связывает изменение во времени потока энергии с распределением натяжения вдоль струны, так как $W_{14} = -W_{41}/c^2$ имеет размерность плотности импульса, связанного с потоком энергии волнового движения. Интегрируя первое уравнение (3.3.8), мы получим

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b W_{14}dx = [W_{11}]_a^b;$$

отсюда видно, что если W_{14} есть плотность волнового импульса, то W_{11} — сила, которую можно назвать *волновым напряжением*. Это уравнение утверждает, таким образом, что скорость изменения волнового импульса на каком-либо участке струны равна разности значений волнового напряжения на концах участка.

Плотность волнового импульса $P = W_{14}$ теснее связана с самим волновым движением, нежели плотность канонического импульса $p = \rho(\partial\psi/\partial t)$, так как p есть *поперечный* импульс в различных участках струны, а P связано с потоком энергии *вдоль* струны, обусловленным волновым движением.

Кстати, уравнения (3.3.6) можно использовать для доказательства того, что интеграл от плотности функции Гамильтона есть константа движения, не зависящая от времени; в самом деле

$$\frac{d}{dt}\int_0^l H(p, \psi, \psi')\,dx = \int_0^l \left[\frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial \psi}\dot{\psi} + \frac{\partial H}{\partial \psi'}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}\right]dx =$$

$$= \int_0^l \left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial\psi'} + \frac{\partial H}{\partial\psi'}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}\right]dx = \left[\dot{\psi}\frac{\partial H}{\partial\psi'}\right]_0^l = 0,$$

так как $\dot{\psi}$ или $\partial H/\partial\psi'$ обращаются в нуль на концах струны.

Уравнение Гельмгольца. Когда струна совершает простые гармонические колебания, ее отклонения от оси x выражаются функцией $\psi(x,t) = Y(x)e^{-i\omega t}$, где функция Y удовлетворяет *уравнению Гельмгольца*

$$(d^2Y/dx^2) + k^2Y = 0, \quad k = \omega/c,$$

в котором значение k определяется краевыми условиями. Это уравнение можно получить также, исходя из вариационного принципа.

В качестве плотности функции Лагранжа можно взять член $-T(dY/dx)^2$, отвечающий потенциальной энергии. Получение ненулевого решения можно гарантировать, добавив к вариационному уравнению

$$\delta\int_0^l \left(\frac{dY}{dx}\right)^2 dx = 0$$

дополнительное требование, чтобы средняя квадратичная амплитуда Y была отлична от нуля, например, чтобы

$$\int_0^l Y^2(x)\,dx = 1.$$

Согласно сказанному на стр. 267, такая вариационная задача может быть решена методом множителей Лагранжа. Мы включаем дополнительное требование (уравнение связи) тем, что будем минимизировать интеграл

$$\int_0 \left[\lambda Y^2 - \left(\frac{dY}{dx}\right)^2\right] dx,$$

где λ — множитель, который заодно должен быть найден. Уравнение Эйлера такой задачи совпадает с уравнением Гельмгольца

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \lambda Y = 0,$$

и искомые значения λ окажутся равными требуемым значениям k^2.

Потенциал скоростей. Переходя к трехмерному случаю, рассмотрим движение жидкости (см. § 2. 3). Если это движение безвихревое, то скорость жидкости может быть представлена как градиент потенциала скоростей ψ. Плотность кинетической энергии выразится при этом в виде

$$T = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{3.3.9}$$

Если жидкость несжимаема, то потенциальная энергия постоянна и плотность функции Лагранжа L совпадает с T. Уравнение Эйлера (3. 1. 3) в этом случае сводится к уравнению Лапласа

$$\nabla^2\psi = 0.$$

Таким образом, уравнение Лапласа, описывающее установившееся безвихревое движение несжимаемой жидкости, выражает требование, чтобы при выполнении заданных начальных и краевых условий *полная кинетическая энергия жидкости имела наименьшее возможное значение.*

Если жидкость сжимаема, но вязкость ее пренебрежимо мала, то появится плотность потенциальной энергии, которая выражается через потенциал скоростей ψ. Эта энергия равна работе pdV, которая должна быть затрачена на то, чтобы единицу объема жидкости перевести из стандартных условий (относящихся к плотности и т. д.) в условия, поставленные в задаче. Допустим, что такой переход сопровождается относительно малыми изменениями соответствующих величин по сравнению с их значениями в стандартных условиях; если в стандартных условиях плотность равна ρ, то мы считаем, что в условиях задачи она равна $\rho(1+s)$, где s — весьма мало по сравнению с единицей. Элемент жидкости, имеющий объем 1 *см*^{3} в стандартных условиях, при плотности, равной $\rho(1+s)$, будет занимать объем $(1-s)$ *см*^{3} (с точностью до величин первого порядка относительно малой величины s).

Для отыскания потенциальной энергии нужно знать, как при изменении состояния жидкости связаны между собой давление и плотность.

Так, например, в случае газа отношение давления к плотности выражается формулой (2.3.21) (см. стр. 161). В рассматриваемом случае давление в стандартных условиях мы обозначим p_0, а давление в условиях задачи $p_0 + p$. Такие обозначения общеприняты в акустике (заметим, что в этом пункте p означает давление, а не канонический импульс). Уравнение (2.3.21) в этих обозначениях примет вид

$$1 + (p/p_0) = (1+s)^\gamma \approx 1 + \gamma s,$$

то есть

$$p \approx \rho c^2 s, \tag{3.3.10}$$

где в случае газа $c^2=\gamma p_0/\rho$. Для других жидкостей избыточное давление также пропорционально относительному приращению плотности [так что формула (3.3.10) остается справедливой], но постоянная c^2 определяется различными свойствами рассматриваемой жидкости. Как мы вскоре увидим, c в некоторых случаях равна скорости звука в жидкости.

Когда жидкость при переходе от стандартных условий к реальным подвергается сжатию, элемент жидкости, занимавший объем dV, получит новый объем $dV(1-s)=dV[1-(p/\rho c^2)]$. Работа, затраченная на такое сжатие

$$\int_0^s pdVds=\frac{dV}{\rho c^2}\int_0^p pdp=\left(\frac{1}{2\rho c^2}\right)p^2dV,$$

и есть потенциальная энергия сжатия элемента объема dV. Следовательно, плотность потенциальной энергии равна $p^2/2\rho c^2$.

Но мы еще отсюда не можем составить вариационное уравнение, так как нам надо связать p с потенциалом скоростей ψ, хотя вполне можно было бы составить вариационные уравнения для скаляра p, а не ψ. Требуемую связь проще всего найти из уравнения (2.3.14). Если коэффициентами вязкости η и λ можно пренебречь и внешняя сила F равна нулю, то $\rho(\partial\mathbf{v}/\partial t)=-\operatorname{grad}p$. Если потенциал скоростей существует, то $\mathbf{v}=\operatorname{grad}\psi$ и, приравняв градиенты, мы получим уравнение

$$p=-\rho(\partial\psi/\partial t)+C_0, \tag{3.3.11}$$

где постоянная интегрирования C_0 обычно приравнивается нулю. Таким образом, давление представляет собой временну́ю компоненту 4-вектора, пространственные компоненты которого равны компонентам скорости жидкости.

Волны сжатия. Теперь мы можем составить выражение плотности функции Лагранжа для малых колебаний невязкой сжимаемой жидкости

$$L=T-V=\frac{1}{2}\rho\left\{|\operatorname{grad}\psi|^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right\}. \tag{3.3.12}$$

Это — инвариантная плотность, интеграл которой (по времени и пространству) должен быть минимизирован. Особенность ее в том, что скорость выражена производными по координатам, а сила — производной по времени; объясняется это тем, что скорость представляет собой вектор (градиент), а сила (давление) — скаляр.

Уравнением Эйлера (3.1.3) для такой плотности функции Лагранжа служит волновое уравнение в трехмерном пространстве

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},$$

где c — скорость распространения волн.

Интересно отметить, что по сравнению с уравнением колебаний струны, производные пространственные и производные по времени меняются ролями. Здесь производные ψ по координатам соответствуют кинетической энергии, а производная по времени — энергии потенциальной. Здесь так называемая «плотность канонического импульса» $\partial L/\partial\dot{\psi}$ [см. (3.3.4)] пропорциональна давлению, а совсем не скорости жидкости. Поэтому простые методы, связанные с использованием канонически сопряженных переменных q и p, применимые в динамике точки, должны быть заменены более сложными. При этом оказывается полезен 4-аффинор $\mathfrak{W}$ с

компонентами

$$W_{ij} = L\delta_{ij} - \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial(\partial\psi/\partial x_j)}, \tag{3.3.13}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \quad x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict.$$

Компонента W_{44} есть плотность энергии

$$W_{44} = \frac{1}{2}\rho\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + |\operatorname{grad}\psi|^2\right] = \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2\rho c^2}p^2 = H, \tag{3.3.14}$$

интеграл от которой не зависит от времени (это можно показать так же, как это было сделано на стр. 292 для случая струны).

Пространственно-временные компоненты аффинора $\mathfrak{W}$ пропорциональны некоторому 3-вектору S

$$W_{k4} = W_{4k} = \frac{i\rho}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} = \frac{1}{ic}\rho v_k = \frac{1}{ic}S_k, \quad k = 1, 2, 3. \tag{3.3.15}$$

S задает направление и величину потока энергии, обусловленного волновым движением. Вектор $\mathbf{P} = \mathrm{S}/c^2$, имеющий размерность плотности импульса, называется *плотностью импульса поля*. С другой стороны, вектор $\rho\mathrm{S}/p = \rho\mathbf{v}$ представляет собой плотность импульса движущейся жидкости.

Заметим также, что 4-дивергенции векторов, образованных из $\mathfrak{W}$, все равны нулю. Это можно показать, взяв

$$\sum_j \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_j\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial L}{\partial\psi_j} + \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_j}\right)\right],$$

где $\psi_j = \partial\psi/\partial x_j$. Если L зависит от x_i *только* через посредство функции ψ и ее производных, то,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial\psi_j}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i},$$

и с помощью уравнений Эйлера (3.1.3) мы приходим к равенствам

$$\sum_j \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\left[\frac{\partial L}{\partial\psi} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_j}\right)\right] = 0,$$

доказывающим наше утверждение относительно дивергенций в том случае, когда L не зависит от x явно. Отсюда мы можем получить уравнение неразрывности для S и H

$$\operatorname{div}\mathrm{S} + (\partial H/\partial t) = 0,$$

которое показывает, что если H — плотность энергии, то S — вектор плотности потока энергии (это было отмечено раньше). Хотя интеграл от H по всему пространству постоянен, значение H в любой точке может изменяться с течением времени, так как энергия может перераспределяться в объеме, занятом жидкостью.

Волновой импеданс. Возвращаясь к уравнению Лагранжа-Эйлера для ψ, мы видим, что если к ψ приложена «плотность сил» f, то f будет связано с приращением ψ уравнением

$$f = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}\right) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial\psi/\partial x_i)}\right) - \frac{\partial L}{\partial\psi} = -\left(\frac{\rho}{c^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) + \rho\operatorname{div}(\operatorname{grad}\psi).$$

В классической динамике мы можем обычно приложить силу к одной из координат системы и найти соотношение между приложенной силой

и перемещением или скоростью системы (см. стр. 272). Но в случае поля сила, сконцентрированная в точке, как правило, вызывает бесконечное смещение этой точки; для того же, чтобы вызвать физически реализуемый эффект, сила должна действовать на некоторый объем или на площадь. Обычно бывает так, что внешняя сила оказывается приложенной к некоторому участку поверхности, ограничивающей поле. Так, например, вибрирующая мембрана громкоговорителя служит источником звуковых волн в жидкости, а эти волны в свою очередь воздействуют на мембрану. Мерой этого воздействия (реакции) служит *акустический импеданс* жидкости перед мембраной, характеризующий тип возбуждаемых волн.

Если сила приложена к поверхности, служащей границей поля, то для отыскания полной реакции следует интегрировать уравнение Лагранжа-Эйлера по всему объему, заключенному в этой поверхности. При этом мы получим

$$-\frac{\rho}{c^2}\iiint\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}dv+\rho\iint\operatorname{grad}\psi\cdot d\mathbf{A},$$

где второе слагаемое преобразовано в поверхностный интеграл по формуле Гаусса [см. (1.4.7)]. Любая сила, действующая на ψ по граничной поверхности, уравновешивается этим слагаемым, поэтому если $\mathbf{F}$ — «сила», действующая на ψ, рассчитанная на единицу площади, то $\mathbf{F}=\rho\operatorname{grad}\psi$. Если $\mathbf{F}$ изменяется гармонически $\mathbf{F}=\mathbf{F}_0e^{-i\omega t}$, то соответствующая скорость изменения ψ (соответствующая скорости) равна $-i\omega\psi$, так что отношение поверхностной плотности силы к скорости изменения ψ равно

$$-\mathbf{F}/i\omega\psi=-(\rho/i\omega\psi)\operatorname{grad}\psi.$$

В силу того, что в рассматриваемом случае по сравнению с задачами динамики градиент и производная по времени меняются ролями, то величина $i\omega\psi$ пропорциональна давлению, а $\operatorname{grad}\psi$ пропорционален скорости жидкости. В акустике обычно аналогом внешней силы мы считаем не $\mathbf{F}$ (которое представляет собой «силу», вызывающую изменение ψ), а давление, поэтому приведенное выше отношение соответствует скорее адмитансу, чем импедансу.

Обычно *акустический адмитанс* определяется равенством

$$\mathbf{Y}=\mathbf{v}/p=\frac{1}{i\omega\rho\psi}\operatorname{grad}\psi; \tag{3.3.16}$$

здесь p означает давление в какой-либо точке граничной поверхности, где приложена внешняя сила, а $\mathbf{v}$ — скорость жидкости в этой же точке. Чтобы вычислить $\mathbf{Y}$, надо сначала решить волновое уравнение для отыскания поля, порожденного вибрацией данного участка границы, после чего можно будет вычислить $(1/i\omega\rho\psi)\operatorname{grad}\psi$ для различных таких участков; если нужно, интегрируя, мы найдем акустический адмитанс всей поверхности, воздействующей на поле.

Адмитанс $\mathbf{Y}$ представляет собой вектор, так как $\mathbf{v}$ — вектор, а p — скаляр. Обычно бывает достаточно вычислить *нормальный акустический адмитанс* — нормальную (к границе поля) составляющую Y_n вектора $\mathbf{Y}$, равную

$$Y_n=(1/i\omega\rho\psi)\,(\partial\psi/\partial n).$$

Обратная величина

$$Z_n=1/Y_n=i\omega\rho\psi\,(\partial\psi/\partial n)^{-1}$$

называется *нормальным акустическим импедансом*. Она равна отношению давления в граничной точке, где действует внешняя сила, к нормальной

составляющей скорости жидкости в той же точке. Так как эта скорость равна скорости движения самой поверхности, то нормальный импеданс является наиболее важной частью импеданса.

Плоская волна. В качестве примера тех разнообразных величин, о которых мы так бойко здесь говорили, рассмотрим особенно простой вид волнового движения, *плоскую волну*. Такая волна изображается формулой

$$\psi = Ce^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t},$$

где $C = |C|e^{i\varphi}$ — постоянная, определяющая амплитуду и фазу φ потенциала скоростей, а $\mathbf{k}$ — постоянный вектор длины ω/c, указывающий направление движения волны. Соответствующие волновые поверхности представляют собой плоскости, перпендикулярные вектору $\mathbf{k}$, движущиеся по направлению $\mathbf{k}$ со скоростью c.

Выражения давления и скорости жидкости в случае плоской волны можно получить, зная потенциал скоростей, с помощью ранее полученных соотношений. Они соответственно равны действительным частям выражений

$$p = -\rho\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\omega\rho Ce^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t},$$

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\psi = i\mathbf{k}Ce^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}.$$

Иначе говоря, значение давления в точке x, y, z в момент t равно $-\omega\rho|C|\sin[(\omega/c)(\alpha x+\beta y+\gamma z-ct)+\varphi]$, где α, β, γ — направляющие косинусы вектора $\mathbf{k}$ и $|\mathbf{k}| = \omega/c$. Жидкость движется по направлению вектора $\mathbf{k}$, т. е. перпендикулярно фронту волны, а скорость в случае плоской волны совпадает по фазе с давлением.

Для вычисления тензора напряжения-энергии надо взять действительные части обеих величин, так как его компоненты представляют собой многочлены второй степени, содержащие ψ. Обозначив

$$\Omega = (\omega/c)(\alpha x+\beta y+\gamma z-ct)+\varphi = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi,$$

будем иметь

$$\psi = |C|\cos\Omega,\quad p = -\omega\rho|C|\sin\Omega,\quad \mathbf{v} = -\mathbf{k}|C|\sin\Omega,$$

$$W_{44} = H = \frac{1}{2}\rho v^2+\frac{p^2}{2\rho c^2} = \frac{\rho\omega^2}{c^2}|C|^2\sin^2\Omega,$$

$$\mathbf{S} = p\mathbf{v} = \rho\omega\mathbf{k}|C|^2\sin^2\Omega = \mathbf{P}c^2,$$

$$W_{11} = -\frac{\rho\omega^2}{c^2}\alpha^2|C|^2\sin^2\Omega,$$

$$W_{12} = -\frac{\rho\omega^2}{c^2}\alpha\beta|C|^2\sin^2\Omega,$$

где α, β, γ — направляющие косинусы *вектора распространения* (волнового вектора) $\mathbf{k}$. Следовательно, тензор напряжения-энергии для плоской волны может быть представлен матрицей

$$\mathfrak{W} = -\frac{\rho\omega^2}{c^2}|C|^2\sin^2\Omega\begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma & -i\alpha\\ \beta\alpha & \beta^2 & \beta\gamma & -i\beta\\ \gamma\alpha & \gamma\beta & \gamma^2 & -i\gamma\\ i\alpha & i\beta & i\gamma & -1\end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в справедливости для $\mathfrak{W}$ уравнений дивергенции

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{\partial W_{mn}}{\partial x_n} = 0$$

и в том, что пространственные компоненты $\mathfrak{W}$ преобразуются, как аффинор.

Одна из главных осей пространственной части $\mathfrak{W}$ направлена вдоль $\mathbf{k}$; двумя другими служат любые два взаимно-перпендикулярных направления, ортогональных $\mathbf{k}$. Если ξ_1, ξ_2, ξ_3 — координаты, соответствующие этим осям, то относительно них $\mathfrak{W}$ принимает вид

$$\mathfrak{W} = \frac{\rho\omega^2}{c^2} |C|^2 \sin^2 \left[\frac{\omega}{c} (\xi_1 - ct) \right] \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Все компоненты оказываются пропорциональными квадрату частоты и квадрату амплитуды волны.

Можно представить себе, что плоская волна вызвана колебаниями плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{k}$, совершающимися в направлении $\mathbf{k}$, причем скорость колебаний равна $\operatorname{grad} \psi = i\mathbf{k} C e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}$. Акустический адмитанс, являющийся мерой реакции волны на колеблющуюся плоскость, равен в этом случае

$$\mathbf{Y} = \mathbf{v}/p = \mathbf{k}/\rho\omega = \frac{1}{\rho c} \mathbf{a}_k,$$

где $\mathbf{a}_k$, — единичный вектор, совпадающий по направлению с $\mathbf{k}$. Следовательно, акустический импеданс, нормальный к фронту плоской волны, равен ρc, т. е. имеет действительное значение. Другими словами, плоская волна порождает резистивный импеданс[1]), действующий на колеблющуюся плоскость, не зависящий от частоты. Импедансы волн другой формы будут еще рассмотрены в этой книге.

Уравнение диффузии. Переходя к уравнениям, описывающим диссипативные процессы, такие, как течение вязкой жидкости или диффузия, мы воспользуемся формальным приемом, описанным на стр. 285. Например, в случае уравнения диффузии плотность функции Лагранжа равна

$$L = -(\operatorname{grad} \psi)\cdot(\operatorname{grad} \psi^*) - \frac{1}{2} a^2 \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right), \qquad (3.3.17)$$

где ψ — концентрация диффундирующего вещества, a^2 — постоянная диффузии; ψ^* относится к зеркально отраженной системе, в которой происходит процесс, обратный диффузии. Плотности канонических импульсов выразятся в виде

$$p = \partial L/\partial \dot{\psi} = -\frac{1}{2} a^2 \psi^*, \quad p^* = +\frac{1}{2} a^2 \psi;$$

они, впрочем, имеют мало общего с физическими импульсами.

Уравнения Эйлера для этой плотности функции Лагранжа имеют вид

$$\nabla^2 \psi = a^2 (\partial\psi/\partial t), \quad \nabla^2 \psi^* = -a^2 (\partial\psi^*/\partial t). \qquad (3.3.18)$$

---

[1] См. стр. 287.—*Прим. ред.*

Уравнение относительно ψ — обычное уравнение диффузии; второе уравнение относится к зеркально отраженной системе, поглощающей столько же энергии, сколько теряет исходная система.

Плотность функции Гамильтона равна $\operatorname{grad}\psi\cdot\operatorname{grad}\psi^*$; интеграл ее по объему не зависит от времени. Она представляет собой 4,4-компоненту тензора $\mathfrak{W}$, определяемого равенствами

$$W_{ij}=L\delta_{ij}-\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial\psi_j}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial\psi_j^*}, \tag{3.3.19}$$

где $\psi_j=\partial\psi/\partial x_j$. Компоненты W_{k4} содержат компоненты вектора $\operatorname{grad}\psi$, определяющего направление и величину потока диффузии.

Метод введения «зеркально отраженного» поля ψ^* с целью образовать функцию Лагранжа, из которой получается уравнение диффузии, может быть, слишком уж искусственен для того, чтобы ожидать от него существенных физических выводов. Он рассмотрен здесь затем, чтобы показать возможность применения вариационного метода к диссипативным системам; кроме того, введение подобных полей ψ^* оказывается необходимым в некоторых задачах квантовой физики, и задача о диффузии может служить полезной подготовкой к этим более сложным задачам.

Аналогичный прием может быть использован для построения функции Лагранжа в том случае, когда при рассмотрении потока жидкости учитывается вязкость.

Уравнение Шредингера. Нечто похожее может быть использовано для вывода уравнения Шредингера (2.6.38), хотя оно и не диссипативно. Волновая функция ψ принимает комплексные значения, поэтому ее действительную и мнимую части можно рассматривать как самостоятельные (независимые) переменные или, что то же самое, можно рассматривать отдельно (как независимые полевые переменные) скалярное поле ψ и скалярное поле комплексно-сопряженной функции ψ^*. При этом произведение $\psi\psi^*$ будет действительным и при оптимальном выборе обеих переменных будет равно плотности вероятности для наличия частицы, т. е. для конфигурации системы, описываемой координатами x.

В качестве примера рассмотрим отдельную частицу с массой m, находящуюся под действием потенциального поля $V(x, y, z)$. Плотность функции Лагранжа оказывается равной

$$L=-\frac{\hbar^2}{2m}(\operatorname{grad}\psi^*)\cdot(\operatorname{grad}\psi)-\frac{\hbar}{2i}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right)-\psi^*V\psi; \tag{3.3.20}$$

искомые ψ и ψ^* должны сообщать наименьшее значение интегралу $\mathscr{L}=\iiint\iint L\,dv\,dt$.

Уравнения Лагранжа — Эйлера получаются при этом

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^*-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=-V\psi^*,\qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-V\psi,$$

или

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},\qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^*+V\psi^*=-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}. \tag{3.3.21}$$

Легко видеть, что эти уравнения соответствуют уравнению (2.6.38). Если взять классическую функцию Гамильтона $H(p, q)=(1/2m)(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+V$ для частицы и заменить в ней $p_x, \ldots$ символами $(\hbar/i)(\partial/\partial x), \ldots$, действующими на ψ, то (2.6.38) превратится в первое из уравнений (3.3.21). Уравнение, содержащее комплексно-сопряженную функцию ψ^*, получится изменением знака при i в слагаемом, содержащем производную по времени.

Два канонических импульса выражаются в виде

$$p = \partial L/\partial\dot{\psi} = -(\hbar\psi^*/2i), \quad p^* = \hbar\psi/2i. \tag{3.3.22}$$

Они бывают нужны при «вторичном квантовании», которое часто применяется в современной квантовой физике, но не рассматривается нами в этой книге. Тензор напряжения-энергии $\mathfrak{W}$ имеет компоненты, определяемые равенствами

$$W_{mn} = \psi_m^* \frac{\partial L}{\partial\psi_n^*} + \psi_m \frac{\partial L}{\partial\psi_n} - \delta_{mn} L, \tag{3.3.23}$$

где

$$\psi_m = \frac{\partial\psi}{\partial x_m}, \quad x_m = x,\ y,\ z,\ t, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Плотностью энергии служит 4,4-компонента $\mathfrak{W}$

$$H = W_{44} = \frac{\hbar^2}{2m} \operatorname{grad}\psi^* \cdot \operatorname{grad}\psi + \psi^* V \psi.$$

Следует отметить, что в рассматриваемом случае, как и в уравнении диффузии, производные по времени (которые соответствуют величинам $\dot{q}$) входят в L *линейно*, в отличие от классической динамики, где q входят в L в виде квадратичной формы $\sum a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s$. А когда $\dot{q}$ входят в L линейно, канонические импульсы $\partial L/\partial\dot{q}$ не зависят от $\dot{q}$, а лишь от q, поэтому p и q не являются независимыми переменными. В таком случае гамильтонова функция $H = \sum p\dot{q} - L$ зависит только от q и не зависит от p и от $\dot{q}$, а канонические уравнения не будут, конечно, иметь вид (3.3.6). Как в уравнении диффузии, так и в уравнении Шредингера, p представляет собой функцию от ψ^*, а p^* — функцию от ψ, поэтому нам не удастся получить одно каноническое уравнение для p, другое для q, а придется получить одно уравнение для ψ и другое — для ψ^*. Как всегда,

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} = 0 = \delta \int dt \int dv\, [p\dot{\psi} + \dot{\psi}^* p^* - H(\psi,\ \psi^*,\ \psi_n,\ \psi_n^*)] = \\ = \int dt \int dv\, [\delta p\, \dot{\psi} + p\, \delta\dot{\psi} + \dot{\psi}^* \delta p^* + \delta\dot{\psi}^* p^* - \\ - \left(\frac{\partial H}{\partial\psi}\right)\delta\psi - \left(\frac{\partial H}{\partial\psi^*}\right)\psi^* - \sum_n \left(\frac{\partial H}{\partial\psi_n}\right)\delta\psi_n - \sum_n \left(\frac{\partial H}{\partial\psi_n^*}\right)\delta\psi_n^*\Big],\end{aligned}$$

где $\psi_2 = \partial\psi/\partial y$, $\psi_3^* = \partial\psi^*/\partial z$ и т. д. Но теперь $\delta p = (dp/d\psi^*)\,\delta\psi^*$, и, интегрируя по частям, мы получим $\int dt\, p\delta\dot{\psi} = -\int dt\, \dot{p}\,\delta\psi = -\int dt\dot{\psi}^*\,(dp/d\psi^*)\,\delta\psi$ и т. д. Как и раньше, мы будем также иметь

$$-\int dv \sum_n \left(\frac{\partial H}{\partial\psi_n}\right)\delta\psi_n = \int dv \sum_n \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial H}{\partial\psi_n}\right)\delta\psi \text{ и т. д.}$$

Подставив все эти выражения в интеграл, выражающий $\delta\mathscr{L}$, мы найдем, что $\delta\mathscr{L}$ окажется равным интегралу от некоторого выражения, умноженного на $\delta\psi$, плюс некоторое другое выражение, умноженное на $\delta\psi^*$. Так как $\delta\mathscr{L}$ должно обращаться в нуль при произвольных $\delta\psi$ и $\delta\psi^*$, то оба множителя при $\delta\psi$ и $\delta\psi^*$ должны быть равны нулю, и мы придем к таким

двум уравнениям:

$$\psi\left[\frac{dp}{d\psi^*}-\frac{dp^*}{d\psi}\right]=\frac{\partial H}{\partial\psi^*}-\sum_n\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial H}{\partial\psi_n^*}\right),$$
$$\psi^*\left[\frac{dp^*}{d\psi}-\frac{dp}{d\psi^*}\right]=\frac{\partial H}{\partial\psi}-\sum_n\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial H}{\partial\psi_n}\right). \qquad (3.3.24)$$

Это — новые канонические уравнения; если применить их к гамильтоновой функции для уравнения диффузии или для уравнения Шредингера, то мы снова получим уравнения движения (3.3.18) или (3.3.21). Не ясно, впрочем, насколько полезными окажутся уравнения (3.3.24), так как не видно, чтобы они давали больше, чем уравнения Лагранжа — Эйлера.

Вектор плотности потока энергии в шредингеровском случае равен

$$\mathbf{S}=\mathbf{i}W_{41}+\mathbf{j}W_{42}+\mathbf{k}W_{43}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^*\operatorname{grad}\psi+\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\operatorname{grad}\psi^*\right]. \qquad (3.3.25)$$

$\mathbf{S}$ совместно с плотностью энергии W_{44} удовлетворяет уравнению неразрывности $\operatorname{div}\mathbf{S}+\partial H/\partial t=0$.

Плотность импульса поля представляется вектором

$$\mathbf{P}=\mathbf{i}W_{14}+\mathbf{j}W_{24}+\mathbf{k}W_{34}=-(\hbar/2i)\,[\psi^*\operatorname{grad}\psi-\psi\operatorname{grad}\psi^*]. \qquad (3.3.26)$$

Обращаясь к стр. 246, мы замечаем, что (когда магнитное поле равно нулю) плотность тока, соответствующая функции ψ, равна $\mathbf{J}=-(e/m)\,\mathbf{P}$, так что $\mathbf{P}$ оказывается связанным с плотностью потока вероятности частицы, описываемой волновой функцией ψ.

Уравнение Клейна—Гордона. Подобным же образом можно рассмотреть уравнение Клейна — Гордона (2.6.51), могущее служить волновым уравнением для релятивистской частицы (хотя для электрона или протона оно неверно). Здесь мы снова используем два независимых поля ψ и ψ^*. Величины $(\hbar/i)\,(\partial\psi/\partial x,\ \partial\psi/\partial y,\ \partial\psi/\partial z,\ \partial\psi/\partial(ict))$ служат компонентами некоторого 4-вектора, так же как соответствующие производные от ψ^*. Скомбинировав их с 4-вектором $(A_x,\ A_y,\ A_z,\ i\varphi)$ электромагнитного потенциала так, как это следует из уравнения (2.6.49), мы получим плотность функции Лагранжа для «частицы» с зарядом e и массой m в электромагнитном поле

$$L=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\operatorname{grad}\psi^*+\frac{ie}{\hbar c}\mathbf{A}\psi^*\right)\cdot\left(\operatorname{grad}\psi-\frac{ie}{\hbar c}\mathbf{A}\psi\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{c}\right)^2\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}-\frac{ie}{\hbar}\varphi\psi^*\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{ie}{\hbar}\varphi\psi\right)+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi^*\psi\right]. \qquad (3.3.27)$$

Отсюда можно получить уравнение Лагранжа — Эйлера для ψ

$$\sum_{n=1}^{4}\frac{\partial}{\partial\zeta_n}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_n^*}\right)-\frac{\partial L}{\partial\psi^*}=0,$$

где $\zeta_1=x$, $\zeta_2=y$, $\zeta_3=z$, $\zeta_4=t$, $\psi_n^*=\partial\psi^*/\partial\zeta_n$, приводящее к уравнению Клейна — Гордона при наличии электромагнитного поля

$$\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_n}-\frac{ie}{\hbar c}A_n\right)^2\psi-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{ie}{\hbar}\varphi\right)^2\psi=\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi. \qquad (3.3.28)$$

Такой же вид имеет уравнение для ψ^*. При выводе мы несколько раз должны воспользоваться соотношением $\operatorname{div}\mathbf{A}+(1/c)\,(\partial\varphi/\partial t)=0$. Когда

A и φ равны нулю, уравнение (3.3.28) упрощается и принимает вид (2.6.51).

Для простоты дальнейшие рассуждения проведем в предположении, что **A** и φ равны нулю. При этом функция Лагранжа примет вид

$$L = -\frac{\hbar^2}{2m}(\operatorname{grad}\psi^*)\cdot(\operatorname{grad}\psi) + \frac{\hbar^2}{2mc^2}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}mc^2\psi^*\psi, \quad (3.3.29)$$

а канонические импульсы получат выражения

$$p = (\partial L/\partial\dot{\psi}) = (\hbar^2/2mc^2)(\partial\psi^*/\partial t), \qquad p^* = (\hbar^2/2mc^2)(\partial\psi/\partial t); \quad (3.3.30)$$

4,4-компонента тензора напряжения-энергии

$$W_{mn} = \psi_m^*\frac{\partial L}{\partial\psi_n^*} + \psi_m\frac{\partial L}{\partial\psi_n} - \delta_{mn}L \quad (3.3.31)$$

является, конечно, плотностью энергии H. Ее можно выразить через канонические импульсы p, p^*, функции ψ, ψ^* и их градиенты

$$W_{44} = \frac{\hbar^2}{2m}(\operatorname{grad}\psi^*)\cdot(\operatorname{grad}\psi) + \frac{\hbar^2}{2mc^2}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}mc^2\psi^*\psi =$$
$$= \frac{2mc^2}{\hbar^2}(p^*p) + \frac{\hbar^2}{2m}(\operatorname{grad}\psi^*)\cdot(\operatorname{grad}\psi) + \frac{1}{2}mc^2\psi^*\psi = H. \quad (3.3.32)$$

Отсюда с помощью канонических уравнений (3.3.6) мы получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{2mc^2}{\hbar^2}p^*,$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2mc^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\zeta_n}\left(\frac{\partial H}{\partial\psi_n^*}\right) - \frac{\partial H}{\partial\psi^*} = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - \frac{1}{2}mc^2\psi$$

и еще два уравнения для $\partial\psi^*/\partial t$ и $\partial p/\partial t$. Эти уравнения снова дают уравнения Клейна — Гордона для ψ и ψ^*.

Вектор плотности импульса поля равен

$$\mathbf{P} = \mathbf{i}W_{14} + \mathbf{j}W_{24} + \mathbf{k}W_{34} = \frac{\hbar^2}{2mc^2}\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\operatorname{grad}\psi + \frac{\partial\psi}{\partial t}\operatorname{grad}\psi^*\right], \quad (3.3.33)$$

а вектор **S** плотности потока энергии есть $-c^2\mathbf{P}$.

Выражения плотности тока и заряда для этого уравнения можно вывести разными способами. Можно, например, — этот прием окажется полезен в дальнейшем, — забегая вперед, обратиться к уравнению (3.4.11) и заметить, что то слагаемое в выражении функции Лагранжа, которое включает взаимодействие между электромагнитными потенциалами и током, выражается в виде $(1/c)\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{J} - \varphi\rho$. Поэтому такой же вид должно иметь то слагаемое в (3.3.27), в которое входят ψ и потенциалы, т. е.

$$\frac{\hbar e}{2imc}\mathbf{A}\cdot[\psi^*\operatorname{grad}\psi - \psi\operatorname{grad}\psi^*] + \frac{\hbar e}{2imc^2}\varphi\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right).$$

Отсюда мы заключаем, что вектор плотности тока должен выражаться в виде

$$\mathbf{J} = (e\hbar/2im)[\psi^*\operatorname{grad}\psi - \psi\operatorname{grad}\psi^*], \quad (3.3.34)$$

т. е. должен совпадать с выражением (2.6.47) для уравнения Шредингера при **A** и φ, равных нулю. Соответствующее выражение плотности зарядов при $A = 0$ и $\varphi = 0$ есть

$$\rho = -\frac{e\hbar}{2imc^2}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right]; \quad (3.3.35)$$

это выражение *отлично* от того, которое соответствует уравнению Шредингера. Действительно, выражение (3.3.35) не обязательно сохраняет определенный знак (зависящий от знака e), а это не вполне удобно для волновой функции (если только мы не имеем в виду рассматривать заряды переменного знака!).

Между прочим, эти выражения для $\mathbf{J}$ и ρ могут быть получены и из самих уравнений Клейна—Гордона так же, как на стр. 246 были выведены $\mathbf{J}$ и ρ для уравнения Шрёдингера.

3.4. Векторные поля

Если поле, потребное для описания какого-либо физического явления, имеет несколько компонент, исследование усложняется, но общие принципы, изложенные выше, остаются в силе. Независимыми переменными, которые должны быть подобраны так, чтобы интеграл от плотности функции Лагранжа L принимал минимальное значение, служат компоненты $\psi_1, \ldots, \psi_n$, являющиеся функциями от параметров x, y, z, t (или любых других четырехмерных координат). L есть инвариантная функция от ψ_i и их производных $\psi_{ij} = \partial\psi_i/\partial\xi_j$ $(\xi_1 = x,\ \xi_2 = y,\ \xi_3 = z,\ \xi_4 = t)$, и мы должны минимизировать интеграл

$$\mathscr{L} = \iiiint L(\psi_i,\ \psi_{ij})\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3\, d\xi_4.$$

Уравнения Эйлера, то есть уравнения движения поля, имеют вид

$$\sum_{s=1}^{4} \frac{\partial}{\partial\xi_s}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{is}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\psi_i}, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

или (3.4.1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{i4}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\psi_i} - \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial}{\partial\xi_s}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{is}}\right).$$

Заметим, что интеграл Лагранжа $\mathscr{L}$ и соответствующие уравнения Лагранжа — Эйлера обладают своего рода «калибровочной инвариантностью» (см. стр. 205). Значение $\mathscr{L}$ не изменяется от прибавления к L 4-дивергенции какой-либо 4-векторной функции от ψ_i и их производных, обращающейся в нуль на границе поля. Действительно, такой четырехкратный интеграл от 4-дивергенции равен четырехмерному аналогу потока этой векторной функции сквозь границу поля, а такой поток равен нулю, так как сама функция равна нулю на границе. Так как $\mathscr{L}$ не изменяется при замене L на $L' = L + \nabla \cdot \mathbf{F}$, то новая плотность функции Лагранжа L' также удовлетворяет уравнениям Лагранжа — Эйлера (3.4.1). Таким образом, $\mathscr{L}$ и уравнения Лагранжа — Эйлера инвариантны относительно замены L на L'

Общие свойства поля. Величина $p_i = \partial L/\partial\psi_{i4}$ называется плотностью канонического импульса для i-й компоненты ψ_i, хотя, как мы уже видели, часто она имеет отдаленное отношение к тому, что обычно называют импульсом. Тем не менее величина $\partial p_i/\partial t$, участвующая в уравнениях Эйлера, аналогична произведению массы на ускорение в более простых системах. Следовательно, величина

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial\psi_i} - \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial}{\partial\xi_s}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{is}}\right),$$