это выражение *отлично* от того, которое соответствует уравнению Шредингера. Действительно, выражение (3.3.35) не обязательно сохраняет определенный знак (зависящий от знака e), а это не вполне удобно для волновой функции (если только мы не имеем в виду рассматривать заряды переменного знака!).

Между прочим, эти выражения для $\mathbf{J}$ и ρ могут быть получены и из самих уравнений Клейна—Гордона так же, как на стр. 246 были выведены $\mathbf{J}$ и ρ для уравнения Шрёдингера.

3.4. Векторные поля

Если поле, потребное для описания какого-либо физического явления, имеет несколько компонент, исследование усложняется, но общие принципы, изложенные выше, остаются в силе. Независимыми переменными, которые должны быть подобраны так, чтобы интеграл от плотности функции Лагранжа L принимал минимальное значение, служат компоненты $\psi_1, \ldots, \psi_n$, являющиеся функциями от параметров x, y, z, t (или любых других четырехмерных координат). L есть инвариантная функция от ψ_i и их производных $\psi_{ij} = \partial\psi_i/\partial\xi_j$ $(\xi_1 = x,\ \xi_2 = y,\ \xi_3 = z,\ \xi_4 = t)$, и мы должны минимизировать интеграл

$$\mathscr{L} = \iiiint L(\psi_i,\ \psi_{ij})\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3\, d\xi_4.$$

Уравнения Эйлера, то есть уравнения движения поля, имеют вид

$$\sum_{s=1}^{4} \frac{\partial}{\partial\xi_s}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{is}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\psi_i}, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

или (3.4.1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{i4}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\psi_i} - \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial}{\partial\xi_s}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{is}}\right).$$

Заметим, что интеграл Лагранжа $\mathscr{L}$ и соответствующие уравнения Лагранжа — Эйлера обладают своего рода «калибровочной инвариантностью» (см. стр. 205). Значение $\mathscr{L}$ не изменяется от прибавления к L 4-дивергенции какой-либо 4-векторной функции от ψ_i и их производных, обращающейся в нуль на границе поля. Действительно, такой четырехкратный интеграл от 4-дивергенции равен четырехмерному аналогу потока этой векторной функции сквозь границу поля, а такой поток равен нулю, так как сама функция равна нулю на границе. Так как $\mathscr{L}$ не изменяется при замене L на $L' = L + \nabla \cdot \mathbf{F}$, то новая плотность функции Лагранжа L' также удовлетворяет уравнениям Лагранжа — Эйлера (3.4.1). Таким образом, $\mathscr{L}$ и уравнения Лагранжа — Эйлера инвариантны относительно замены L на L'

Общие свойства поля. Величина $p_i = \partial L/\partial\psi_{i4}$ называется плотностью канонического импульса для i-й компоненты ψ_i, хотя, как мы уже видели, часто она имеет отдаленное отношение к тому, что обычно называют импульсом. Тем не менее величина $\partial p_i/\partial t$, участвующая в уравнениях Эйлера, аналогична произведению массы на ускорение в более простых системах. Следовательно, величина

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial\psi_i} - \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial}{\partial\xi_s}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{is}}\right),$$

равная скорости изменения p_i во времени, аналогична компоненте силы, соответствующей компоненте ψ_i поля. Первое слагаемое $\partial L/\partial\psi_i$ обычно бывает обусловлено наличием внешних сил, действующих на поле. Второй член часто представляет собой эффект воздействия самого поля на его i-ю компоненту в точке x, y, z, t.

Тензор $\mathfrak{W}$ с компонентами

$$W_{ij} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial\psi_r}{\partial\xi_i}\frac{\partial L}{\partial\psi_{rj}} - \delta_{ij}L \tag{3.4.2}$$

представляет собой тензор напряжения-энергии. Его временная компонента W_{44} есть плотность энергии H поля; интеграл от нее не зависит от времени.

Так же, как и раньше, можно показать, что H может быть выражено через ψ_r, канонические импульсы p_r и градиенты ψ_{rj}. Действуя так же, как на стр. 290, мы можем получить канонические уравнения Гамильтона посредством вариационного принципа. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial\psi_r}{\partial t} = \psi_{r4} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{\partial p_r}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial H}{\partial\psi_{rj}}\right) - \frac{\partial H}{\partial\psi_r}, \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$

Из них также можно вывести уравнения движения (3.4.1).

Тензор $\mathfrak{W}$ часто оказывается несимметричным, что может вызвать серьезные затруднения, поскольку мы привыкли к тому, что аффиноры напряжения симметричны. Если нам желательно пользоваться симметричными аффинорами, то этого можно добиться, воспользовавшись «калибровочной инвариантностью» функции $\mathscr{L}$ и уравнений Лагранжа. Мы прибавим к функции плотности L дивергенцию некоторой специальной векторной функции от ψ и от их производных и в то же время подберем масштаб по каждой из координат так, чтобы тензор $\mathfrak{W}$ стал симметричен, а W_{44} по-прежнему было плотностью энергии. То, что точный вид тензора напряжения-энергии оказывается неопределенным, аналогично неопределенности выражения плотности энергии струны (см. стр. 126). Впрочем, эта неопределенность лишь формальная, так как она не сказывается на физически измеримых величинах.

Как было показано на стр. 295, 4-вектор, получаемый дифференцированием, имеющий компоненты

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{\partial W_{ij}}{\partial\xi_j} = 0, \tag{3.4.3}$$

равен нулю.

Следует заметить, однако, что доказательство равенств (3.4.3) основывается на предположении, что L и $\mathfrak{W}$ зависят от параметров ξ_j *только через посредство функций* ψ_r. Если в L (а следовательно, и в $\mathfrak{W}$) входят еще и другие члены (такие, как потенциалы или плотности тока), зависящие явно от ξ, то левые части (3.4.3) будут равны некоторым выражениям, содержащим производные этих дополнительных членов по ξ. Явная зависимость L от координат имеет место только тогда, когда само поле порождается некоторой совокупностью частиц или материальной средой (такой, как электрический ток). Например, лоренцова сила, действующая на электрон, выражается через компоненты поля в определенной точке пространства, именно в той, где находится электрон. Взаимодействие же различных частей поля выражается интегралами, распро-

страненными по всему пространству, и поэтому зависимость от координат проявляется только через посредство ψ.

Во всяком случае тогда, когда L и $\mathfrak{W}$ зависят от ξ *только* через ψ, тождества (3.4.3) выполняются, и в этом случае 3-вектор

$$\mathbf{S}=\mathbf{i}W_{41}+\mathbf{j}W_{42}+\mathbf{k}W_{43}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial\psi_r}{\partial t}\left[\mathbf{i}\frac{\partial L}{\partial\psi_{r1}}+\mathbf{j}\frac{\partial L}{\partial\psi_{r2}}+\mathbf{k}\frac{\partial L}{\partial\psi_{r3}}\right] \tag{3.4.4}$$

удовлетворяет уравнению неразрывности $\operatorname{div}\mathbf{S}+(\partial H/\partial t)=0$. Следовательно, он должен представлять плотность потока энергии поля. Этот вектор можно назвать *интенсивностью поля*.

Дополнительный вектор

$$\mathbf{P}=\mathbf{i}W_{14}+\mathbf{j}W_{24}+\mathbf{k}W_{34}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\psi_{r4}}\operatorname{grad}\psi_r \tag{3.4.5}$$

имеет размерность импульса, отнесенного к единице объема, и может быть назван *плотностью импульса поля*. Если функция L видоизменена так, что тензор $\mathfrak{W}$ оказывается симметричным, то $\mathbf{P}=\mathbf{S}$; в любом случае вектор $\mathbf{P}$ тесно связан с вектором $\mathbf{S}$.

Пространственная часть тензора $\mathfrak{W}$ есть 3-аффинор

$$\mathfrak{U}=\mathbf{i}\mathbf{W}_1+\mathbf{j}\mathbf{W}_2+\mathbf{k}\mathbf{W}_3,$$

где

$$\mathbf{W}_1=W_{11}\mathbf{i}+W_{12}\mathbf{j}+W_{13}\mathbf{k}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial\psi_r}{\partial x_1}\left[\mathbf{i}\frac{\partial L}{\partial\psi_{r1}}+\mathbf{j}\frac{\partial L}{\partial\psi_{r2}}+\mathbf{k}\frac{\partial L}{\partial\psi_{r3}}\right]-L\mathbf{i} \tag{3.4.6}$$

и т. д. Три других уравнения типа (3.4.3), содержащих дивергенции, задаются векторным уравнением

$$\mathfrak{U}\cdot\nabla=\mathbf{i}\operatorname{div}\mathbf{W}_1+\mathbf{j}\operatorname{div}\mathbf{W}_2+\mathbf{k}\operatorname{div}\mathbf{W}_3=-\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t};$$

последнее указывает на то, что если $\mathbf{P}$ — импульс, то производная от $\mathfrak{U}$ есть тензор силы, так что $\mathfrak{U}$ связано с потенциальной энергией, порожденной полем.

Тензор напряжения-энергии имеет матрицу

$$\mathfrak{W}=\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & P_1\\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & P_2\\ W_{31} & W_{32} & W_{33} & P_3\\ S_1 & S_2 & S_3 & H\end{pmatrix},$$

где W_{ij} заданы равенствами (3.4.2) и $W_{n4}=P_n$, $W_{4n}=S_n$.

Вектор плотности момента количества движения можно (если это необходимо) получить, взяв векторное произведение радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки (x, y, z) относительно некоторого начала на вектор $\mathbf{P}$ в точке (x, y, z)

$$\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{P}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\psi_{r4}}[\mathbf{r}\times\operatorname{grad}\psi_r].$$

В квантовой механике эта характеристика поля волновой функции оказывается связанной с вероятным моментом количества движения частиц, ассоциированных с рассматриваемой волновой функцией. В случае,

например, невязкой сжимаемой жидкости плотность момента количества движения, согласно (3.3.10) и (3.3.15), равна

$$\mathbf{M} = (p/c^2)(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \rho s(\mathbf{r}\times\mathbf{v}).$$

Это — момент количества движения избытка плотности, вызванного движением жидкости.

Таким образом, изменение во времени плотности энергии H требует наличия вектора плотности потока энергии $\mathbf{S}$, а изменение во времени плотности импульса $\mathbf{P}$ — аффинора «внутренних напряжений» $\mathfrak{U}$. По этой причине тензор $\mathfrak{W}$ и называется «*тензором напряжения-энергии*», хотя было бы более точно называть его тензором напряжения-энергии-импульса.

Изотропные упругие среды. Теперь мы можем приложить эти общие формулы к нескольким интересным случаям для того, чтобы посмотреть, какой физический смысл приобретает этот аппарат. В качестве первого примера рассмотрим движение упругого тела (ранее мы занимались этим в §§ 1.6 и 2.2). Согласно § 2.2 [см. формулы (2.2.17) и (2.2.18)], плотностью функции Лагранжа для изотропной упругой среды является

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}\rho(\partial\mathbf{s}/\partial t)^2 - \frac{1}{2}|\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{S}| = \\ &= \frac{1}{2}\left\{\rho\left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial t}\right)^2\right] - \lambda\left[\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z}\right]^2 - \right. \\ &\quad - 2\mu\left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial z}\right)^2\right] - \\ &\quad \left. - \mu\left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y}\right)^2\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

где вектор $\mathbf{s}$ представляет собой смещение точки (x, y, z) при деформации, ρ — плотность среды, λ и μ — постоянные упругости, $\mathfrak{S} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{s} + \mathbf{s}\nabla)$ — аффинор деформации, а $\mathfrak{T}$ — аффинор напряжений

$$\mathfrak{T} = \lambda\mathfrak{J}|\mathfrak{S}| + 2\mu\mathfrak{S} = \lambda(\operatorname{div}\mathbf{s})\mathfrak{J} + \mu(\nabla\mathbf{s} + \mathbf{s}\nabla).$$

Переменными ψ_n поля могут служить компоненты s_x, s_y, s_z вектора смещения; они должны быть такими, чтобы интеграл $\mathscr{L} = \iiiint L\,dx\,dy\,dz\,dt$ (полная функция Лагранжа) принимал минимальное значение. Уравнение Лагранжа — Эйлера (3.4.1) для s_x имеет вид

$$\rho\frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \lambda\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\mathbf{s}) + \mu\nabla^2 s_x + \mu\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\mathbf{s}),$$

то есть представляет собой первую компоненту векторного уравнения

$$\rho(\partial^2\mathbf{s}/\partial t^2) = (\lambda + \mu)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{s}) + \mu\nabla^2\mathbf{s},$$

а это и есть уравнение движения (2.2.1).

Временная часть тензора $\mathfrak{W}$, определенного равенствами (3.4.2), есть плотность энергии

$$W_{44} = \frac{1}{2}\rho(\partial\mathbf{s}/\partial t)^2 + \frac{1}{2}|\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{S}| = H,$$

а вектор интенсивности поля, определенный равенством (3.4.4), равен

$$\mathbf{S} = -(\partial\mathbf{s}/\partial t)\cdot\mathfrak{T},$$

т. е. вектору плотности потока энергии [см. (2.2.20)]. Он удовлетворяет уравнению неразрывности энергии $\operatorname{div} \mathbf{S} + (\partial H/\partial t) = 0$ [см. уравнение (3.4.3), как было показано на стр. 295], так как в рассматриваемом случае L зависит от координат *только* через посредство переменных поля s.

Тензор $\mathfrak{W}$ не симметричен. Его пространственная часть, которая соответствует аффинору сил, определенному равенствами (3.4.6), есть

$$\mathfrak{U} = -(\nabla \mathbf{s}) \cdot \mathfrak{T} - L\mathfrak{J}.$$

Плотность импульса поля, определенная равенством (3.4.5), равна

$$\mathbf{P} = \rho (\nabla \mathbf{s}) \cdot (\partial \mathbf{s}/\partial t).$$

Эти две величины удовлетворяют уравнению дивергенции $\mathfrak{U} \cdot \nabla + (\partial \mathbf{P}/\partial t) = 0$. Если $\mathbf{P}$ — плотность импульса, то аффинор $\mathfrak{U}$ связан с плотностью напряжений, что вытекает из выражения $\mathfrak{U}$ через тензор напряжений $\mathfrak{T}$.

Для того чтобы показать, насколько удобны и компактны векторные и аффинорные обозначения, выпишем полностью первые две компоненты тензора напряжения-энергии $\mathfrak{W}$:

$$W_{11} = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\left[-\left(\frac{\partial s_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial t}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial s_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial t}\right)^2\right] + \lambda\left(\frac{\partial s_y}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial s_z}{\partial z}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial s_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial s_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y}\right)^2\right],$$
$$W_{12} = -\frac{\partial s_x}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x}\right)\right] - \frac{\partial s_y}{\partial x}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial s_y}{\partial y} + \lambda\frac{\partial s_x}{\partial x} + \lambda\frac{\partial s_z}{\partial z}\right].$$

Здесь уместно сделать еще несколько замечаний. Несомненно, вариационный принцип позволил нам собрать и представить в сжатом виде большую часть уравнений и формул, выведенных нами с таким трудом в гл. 2. Независимо от того, можем мы или не можем выжать из этого синтеза дальнейшее физическое содержание или использовать побочные продукты, такие, как импульс поля или аффинор сил, мы во всяком случае владеем прямым и плодотворным методом вывода уравнений движения с помощью плотности функции Лагранжа и получения таких важных величин, как интенсивность и плотность энергии.

Решения типа плоской волны. Для того чтобы сделать более конкретными выведенные здесь формулы, применим их к плоской волне, то есть к гармоническому решению уравнения движения (2.2.1). Согласно (2.2.2), одним из решений является функция

$$\mathbf{s} = \operatorname{grad} \psi,$$

где

$$\psi = Ce^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}, \quad k = \omega/c_c, \quad c_c^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho.$$

Смещения можно определить, вычислив градиент функции ψ,

$$\mathbf{s}_c = i\mathbf{k}\, Ce^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} = \mathbf{a}_k A e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}, \quad A = ikC = |A|\, e^{i\varphi},$$
$$\mathbf{k} = k\mathbf{a}_k, \quad \mathbf{a}_k = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}\ ^{1)},$$

[1]) Конечно, в последней формуле $\mathbf{k}$ — единичный вектор координатной оси. — *Прим. ред.*

где α, β; γ — направляющие косинусы волнового вектора $\mathbf{k}$, определяющего направление распространения волны. Таким образом, смещения в такой волне сжатия, как уже было сказано, направлены вдоль $\mathbf{k}$ и амплитуда их равна $|A|$. Тензор деформаций и тензор напряжений выражаются в виде

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s}\nabla) = -\mathbf{kk}\, Ce^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} = i\mathbf{k}\mathbf{a}_k\, Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t},$$

$$\mathfrak{T} = -\left(\lambda \frac{\omega^2}{c_c^2}\mathfrak{J} + 2\mu\mathbf{kk}\right) Ce^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t},$$

где $\mathbf{kk}$ — симметричный аффинор и его коэффициент расширения $|\mathbf{kk}| = (\omega/c_c)^2$.

Для того чтобы вычислить тензор напряжения-энергии, нужно взять действительные части этих выражений. Так, например, плотность энергии выразится в виде

$$W_{44} = \rho\omega^2 |A|^2 \sin^2 \Omega,$$

где $\Omega = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \varphi = (\omega/c_c)(\alpha x + \beta y + \gamma z - c_c t) + \varphi$. Вектор потока энергии равен

$$\mathrm{S} = \mathbf{a}_k \rho c_c \omega^2 |A|^2 \sin^2 \Omega,$$

а вектор импульса волны $\mathbf{P} = \mathrm{S}/c_c^2$. Пространственная часть аффинора оказывается равной

$$\mathfrak{U} = \mathbf{a}_k\mathbf{a}_k\, \rho\omega^2 |A|^2 \sin^2 \Omega.$$

Все это, конечно, напоминает соответствующие выводы в случае волн сжатия в жидкости (см. стр. 298).

В случае поперечных волн или волн сдвига

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}_p Be^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}, \quad k = \omega/c_s, \quad c_s^2 = \mu/\rho, \quad B = |B|\, e^{i\varphi},$$

где $\mathbf{a}_p$ — единичный вектор, ортогональный вектору $\mathbf{k}$. Аффиноры деформации и напряжений задаются равенствами

$$\mathfrak{T} = 2\mu\mathfrak{S} = i\rho c_s \omega B\, (\mathbf{a}_k\mathbf{a}_p + \mathbf{a}_p\mathbf{a}_k)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}.$$

Аффинор $(\mathbf{a}_k\mathbf{a}_p + \mathbf{a}_p\mathbf{a}_k)$ симметричен, но $|\mathbf{a}_k\mathbf{a}_p + \mathbf{a}_p\mathbf{a}_k| = 0$, так что $|\mathfrak{T}|$ и $|\mathfrak{S}|$ равны нулю.

Различные части тензора напряжения-энергии равны

$$W_{44} = \rho\omega^2 |B|^2 \sin^2 \Omega,$$

$$\mathrm{S} = \mathbf{a}_k \rho c_s \omega^2 |B|^2 \sin^2 \Omega, \quad \mathbf{P} = \mathrm{S}/c_s^2,$$

$$\mathfrak{U} = \mathbf{a}_k\mathbf{a}_k \rho\omega^2 |B|^2 \sin^2 \Omega,$$

$$\text{где } \Omega = (\omega/c_s)(\alpha x + \beta y + \gamma z - c_s t) + \varphi,$$

то есть они имеют тот же вид, как и в случае плоских волн сжатия. Другими словами, векторы потока энергии и импульса волны направлены вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$, хотя смещения среды ортогональны $\mathbf{k}$.

Импеданс. В случае неизотропной среды плотность функции Лагранжа [см. (1.6.29)] выражается в виде

$$L = \frac{1}{2}\rho\, |\partial \mathbf{s}/\partial t|^2 - \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{s}) : \gimel : (\nabla \mathbf{s}),$$

где $\gimel$ («гимель») есть тетрадик[1]) с компонентами g_{mnrs}, определяемыми

[1]) См. стр. 76.

природой рассматриваемой среды. В силу симметрии аффиноров $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ всегда выполняются равенства $g_{mnrs} = g_{rsmn} = g_{nmsr}$. В случае изотропной среды элементы $\mathfrak{J}$ равны

$$g_{mnrs} = [\lambda\delta_{mn}\delta_{rs} + \mu\delta_{mr}\delta_{ns} + \mu\delta_{ms}\delta_{nr}]$$

или

$$\mathfrak{J} = \lambda\mathfrak{Y} + \mu\mathfrak{I} + \mu\mathfrak{I}^*, \quad \mathfrak{Y} : \mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|\mathfrak{J},$$
$$\mathfrak{I} : \mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{I}^* : \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*.$$

В неизотропном случае уравнение движения записывается в виде

$$\rho\,(\partial^2\mathbf{s}/\partial t^2) = \nabla\cdot\mathfrak{J} : (\nabla\mathbf{s}).$$

Это — сложное дифференциальное уравнение второго порядка с частными производными относительно компонент $\mathbf{s}$. В этом случае не всегда удается отделить волны чистого сжатия от чисто поперечных волн; кроме того, волны в различных направлениях распространяются с различными скоростями.

Элементами тензора напряжения-энергии являются

$$W_{44} = \frac{1}{2}\rho\,(\partial\mathbf{s}/\partial t)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{s}) : \mathfrak{J} : (\nabla\mathbf{s}),$$
$$\mathbf{S} = -(\partial\mathbf{s}/\partial t)\cdot\mathfrak{J} : (\nabla\mathbf{s}), \quad \mathbf{P} = \rho\,(\nabla\mathbf{s})\cdot(\partial\mathbf{s}/\partial t),$$
$$\mathfrak{U} = -(\nabla\mathbf{s})\cdot[\mathfrak{J} : (\nabla\mathbf{s})] - L\mathfrak{J}.$$

Эти же обозначения могут быть использованы для изучения импеданса волн в упругой среде. Как было сказано на стр. 296, внешние силы обычно бывают приложены к поверхности, ограничивающей среду, и выражаются в виде объемного интеграла от инерционной реакции $\rho\,(\partial\mathbf{s}/\partial t)$. Но эта реакция равна выражению $\nabla\cdot\mathfrak{J} : (\nabla\mathbf{s})$, подобному дивергенции, поэтому объемный интеграл равен интегралу по поверхности от

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{J} : (\nabla\mathbf{s})$$

— аффинора поверхностной плотности сил. Это выражение представляет собой аффинор (как и любое напряжение в упругой среде), так как сила, действующая на поверхность, есть вектор, зависящий от направления нормали к поверхности. Плотность силы на элементе поверхности, внутренняя нормаль которой направлена вдоль единичного вектора $\mathbf{a}_n$, равна $\mathbf{a}_n\cdot\mathfrak{J} : (\nabla\mathbf{s})$, т. е. представляет собой вектор.

Когда движущая сила — гармоническая, вектор установившегося смещения также содержит множитель $e^{i\omega t}$ (или же $e^{-i\omega t}$, тогда импеданс, а также адмитанс получат комплексно-сопряженные значения). Плотность силы на участке граничной поверхности, колеблющемся со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{V}e^{i\omega t} = i\omega\mathbf{s}$, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}_n\cdot\mathfrak{J} : (\nabla\mathbf{s}) = \mathfrak{Z}\cdot\mathbf{v} = i\omega\mathfrak{Z}\cdot\mathbf{s},$$

где $\mathbf{a}_n$ — единичный вектор, нормальный к поверхности, в точке, где измеряется $\mathbf{F}$. Аффинор $\mathfrak{Z}$, который можно выразить через компоненты g и свойства решения $\mathbf{s}$, есть *аффинор импеданса*, измеряющий реакцию среды на действие приложенной силы.

Например, в изотропном случае, когда $\mathfrak{J} = \lambda\mathfrak{Y} + \mu\mathfrak{I} + \mu\mathfrak{I}^*$, мы имеем

$$\mathbf{a}_n\cdot\mathfrak{J} : (\nabla\mathbf{s}) = (\lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{s})\,\mathbf{a}_n + \mu\mathbf{a}_n\cdot(\nabla\mathbf{s} + \mathbf{s}\nabla).$$

Если рассматривать плоскую волну сжатия, когда волновые поверхности ортогональны вектору $\mathbf{k}$, по направлению которого распространяется

волна (т. е. когда $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_k$), то $\nabla\mathbf{s} = i\mathbf{a}_k\mathbf{k}Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} = \mathbf{s}\nabla$,

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathfrak{I} : (\nabla\mathbf{s}) = \mathbf{a}_k i\omega\rho c_c Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}, \quad \rho c_c^2 = \lambda + 2\mu.$$

В этом случае движущая сила действует в направлении скорости $\mathbf{a}_k i\omega Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}$ движения среды, поэтому аффинор импеданса будет равен характеристическому импедансу сжатия ρc_c среды, умноженному на идемфактор.

В случае плоской волны сдвига скорость движения поверхности $i\omega\mathbf{a}_p Ae^{-i\omega t}$ перпендикулярна вектору $\mathbf{k}$, и с помощью формул стр. 308 мы получим

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathfrak{I} : (\nabla\mathbf{s}) = \mathbf{a}_p i\omega\rho c_s Be^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}, \quad \rho c_s^2 = \mu.$$

И в этом случае действующая сила параллельна скорости и аффинор импеданса равен характеристическому импедансу сдвига ρc_s, умноженному на идемфактор, хотя сила и скорости ортогональны направлению распространения волны.

Электромагнитное поле. Рассмотрим теперь поле, выражающееся через 4-векторы, именно то, для которого предназначались преобразования Лоренца, — поле электромагнитное. Согласно § 2.5, основными величинами поля ψ_i должны быть компоненты 4-вектор-потенциала (см. стр. 203)

$$V_1 = A_x, \quad V_2 = A_y, \quad V_3 = A_z, \quad V_4 = i\varphi,$$

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, а φ — скалярный потенциал. В этом случае мы откажемся от координат ξ в пользу лоренцовых координат $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$, так же, как в § 2.5. Такой выбор координат обеспечит лоренц-инвариантность, но потребует в некоторых местах добавления множителя ic для сохранения размерности. Производные потенциалов запишутся в виде

$$V_{12} = \frac{\partial A_x}{\partial y} \text{ и т. д.}, \qquad V_{41} = i\frac{\partial\varphi}{\partial x} \text{ и т. д.},$$

$$V_{14} = \frac{1}{ic}\frac{\partial A_x}{\partial t}, \qquad V_{44} = \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

В этих обозначениях векторы поля будут иметь вид

$$E_x = i(V_{41} - V_{14}) = if_{14}, \quad E_y = i(V_{42} - V_{24}) = if_{24},$$
$$H_x = (V_{32} - V_{23}) = f_{23}, \quad H_y = (V_{13} - V_{31}) = f_{31}, \tag{3.4.8}$$

если мы предположим, что μ и ε равны единице.

По сравнению с упругой средой мы имеем здесь некоторое осложнение, состоящее в том, что компоненты потенциала связаны между собой *дополнительным условием, накладываемым на дивергенцию*

$$\sum_{n=1}^{4} V_{nn} = \operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \tag{3.4.9}$$

что эквивалентно уравнению (2.5.14), связывающему между собой $\mathbf{A}$ и φ. Эту равную нулю дивергенцию можно, таким образом, прибавлять к различным выражениям или вычитать из них с целью их упрощения.

Теперь мы должны найти плотность функции Лагранжа, с помощью которой можно было бы вывести уравнения движения [см. (2.5.20)]

$$\sum_n \frac{\partial}{\partial x_n} f_{mn} = \sum_n \frac{\partial}{\partial x_n}(V_{nm} - V_{mn}) = \frac{\partial}{\partial x_m}\sum_n V_{nn} - \sum_n \frac{\partial^2 V_m}{\partial x_n^2} = \frac{4\pi}{c} I_m, \tag{3.4.10}$$

эквивалентные уравнениям Максвелла или волновым уравнениям (2.5.15), и получить в качестве 4,4-компоненты тензора напряжения-энергии плотность энергии [см. (2.5.28)]

$$W_{44}=\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)=\frac{1}{8\pi}[f_{12}^2+f_{23}^2+f_{31}^2-f_{14}^2-f_{24}^2-f_{34}^2],$$

если 4-вектор **I** равен нулю. Вектор **I** был определен на стр. 202 как четырехмерный вектор плотности заряда-тока

$$I_1=J_x,\quad I_2=J_y,\quad I_3=J_z,\quad I_4=ic\rho.$$

Здесь было бы довольно трудно воспользоваться определением L как разности между плотностью кинетической энергии и плотностью потенциальной энергии, так как не ясно, что отнести к кинетической, а что к потенциальной энергии. Рассмотрение возможных инвариантов подскажет нам, что в L должно входить $(1/8\pi)(E^2-H^2)$; L должно предположительно еще содержать скалярное произведение векторов **I** и **V**. Составив для такого L уравнения Лагранжа — Эйлера и сравнив их с уравнениями (3.4.10), мы придем к заключению, что точное выражение плотности функции Лагранжа должно быть таково:

$$\begin{aligned}L=&-\frac{1}{8\pi}\{(V_{41}-V_{14})^2+(V_{42}-V_{24})^2+(V_{43}-V_{34})^2+\\&+(V_{12}-V_{21})^2+(V_{23}-V_{32})^2+(V_{31}-V_{13})^2\}+\\&+\frac{1}{c}\{I_1V_1+I_2V_2+I_3V_3+I_4V_4\}=\\=&-\frac{1}{16\pi}\sum_{n,m}f_{nm}^2+\frac{1}{c}\sum_n I_nV_n=\frac{1}{8\pi}(E^2-H^2)+\frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}-\rho\varphi.\end{aligned}\qquad(3.4.11)$$

Таким образом, уравнения Максвелла в случае свободного пространства ($\mathbf{J}=0$ и $\rho=0$) соответствуют требованию, чтобы E^2 было настолько близко к H^2, насколько это совместимо с краевыми условиями.

Уравнения Лагранжа — Эйлера (3.4.1) как раз совпадают с уравнениями Максвелла (3.4.10). Вектор плотности канонического импульса **p** с компонентами $p_n=(1/ic)(\partial L/\partial V_{n4})$ $(n=1, 2, 3)$, которые оказываются равными $(1/4\pi ic)(V_{4n}-V_{n4})$, совпадает с вектором $-(1/4\pi c)\mathbf{E}$. «Вектор силы», соответствующий скорости изменения этого импульса во времени, будет равен $(\mathbf{J}/c)-(1/4\pi)\operatorname{rot}\mathbf{H}$. Временна́я компонента плотности канонического импульса $\partial L/\partial V_{44}$ равна нулю, а уравнение $\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho$, «временная компонента» уравнений Лагранжа — Эйлера (3.4.10), представляет собой своего рода уравнение неразрывности для вектора плотности канонического импульса $\mathbf{p}=-(1/4\pi c)\mathbf{E}$.

Тензор напряжения-энергии. Временна́я компонента тензора энергии-импульса $\mathfrak{W}$ должна быть плотностью функции Гамильтона

$$\begin{aligned}W_{44}=&\sum_{i=1}^{4}V_{i4}\frac{\partial L}{\partial\psi_{i4}}-L=-\frac{1}{8\pi}\sum_{m=1}^{3}(V_{4m}-V_{m4})^2+\\&+\frac{1}{4\pi}\sum_{m=1}^{3}V_{4m}(V_{4m}-V_{m4})+\frac{1}{8\pi}[(V_{12}-V_{21})^2+\\&+(V_{23}-V_{32})^2+(V_{31}-V_{13})^2]-\frac{1}{c}\sum_{m=1}^{4}I_nV_n=\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\sum_r f_{4r}^2 + \frac{1}{16\pi}\sum_{s,r} f_{sr}^2 - \frac{1}{c}\sum_n I_n V_n + \frac{1}{4\pi}\sum_m V_{4m} f_{4m} =$$

$$= \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) - \frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{A} + \rho\varphi + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\operatorname{grad}\varphi. \qquad (3.4.12)$$

Это выражение отличается от того, которое вытекает из (2.5.28), присутствием слагаемых $\rho\varphi + (1/4\pi)\,\mathbf{E}\cdot\operatorname{grad}\varphi$. Но $\mathbf{E}\cdot\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{div}(\varphi\mathbf{E}) - \varphi\operatorname{div}\mathbf{E}$, и, так как $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$, мы видим, что эти дополнительные слагаемые в сумме дают $(1/4\pi)\operatorname{div}(\varphi\mathbf{E})$. Интеграл от дивергенции по всему пространству равен потоку поля на бесконечности, а этот последний равен нулю, поэтому *среднее* значение W_{44} равно *среднему* значению плотности функции Гамильтона

$$U = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) - \frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{A} = T_{44} - \frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}, \qquad (3.4.13)$$

где тензор $\mathfrak{T}$ определен формулой (2.5.30). Это — проявление свойств калибровочной инвариантности поля, упомянутых на стр. 204, а также отмеченного на стр. 126 обстоятельства, что плотность энергии и плотность потока энергии определяются неоднозначно, хотя и имеют однозначно определенные интегралы по всему пространству.

С другой стороны, для того чтобы правильно составить гамильтоновы канонические уравнения (см. стр. 304), нужно воспользоваться полным выражением W_{44}, введя в него канонический импульс $\mathbf{p}$ вместо $-(1/4\pi c)\,\mathbf{E}$. Тогда функция Гамильтона примет вид

$$\mathscr{H} = 2\pi c^2 p^2 + \frac{1}{8\pi}H^2 - c\mathbf{p}\cdot\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{A} + \rho\varphi =$$

$$= \sum_{n=1}^{3}(2\pi c^2 p_n^2 + icV_{4n}p_n) - \frac{1}{c}\sum_{m=1}^{4} V_m I_m +$$

$$+ \frac{1}{8\pi}[(V_{12} - V_{21})^2 + (V_{13} - V_{31})^2 + (V_{23} - V_{32})^2].$$

Уравнение $\partial\psi_n/\partial t = icV_{n4} = \partial H/\partial p_n$ запишется в виде

$$ic(V_{n4} - V_{4n}) = 4\pi c^2 p_n,$$

откуда мы получим

$$p_n = \frac{1}{4\pi ic}(V_{4n} - V_{n4})$$

в согласии с первоначальным определением p_n. Уравнения

$$\frac{\partial p_n}{\partial t} = \sum_{r=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial H}{\partial V_{nr}}\right) - \frac{\partial H}{\partial V_r}$$

превращаются в уравнения Максвелла

$$-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{1}{c}\mathbf{J}, \quad p_4 = 0, \quad -\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathbf{E} + \rho = 0.$$

Таким образом, для получения функции Гамильтона можно пользоваться компонентой W_{44}, но, вычисляя принятое нами выражение для плотности энергии, нужно пользоваться величиной U.

Подобную же коррективу приходится вводить для получения известных выражений вектора интенсивности и импульса поля из недиагональных

элементов тензора напряжения-энергии. Мы имеем

$$W_{mn}=\sum_{r=1}^{4} V_{rm}\left(\frac{\partial L}{\partial V_{rn}}\right)=-\frac{1}{4\pi}\sum_{r} V_{rm}(V_{rn}-V_{nr})=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\sum_{r}(V_{rm}-V_{mr})(V_{rn}-V_{nr})-\frac{1}{4\pi}\sum_{r}(V_{mr}V_{rn}-V_{mr}V_{nr}). \qquad (3.4.14)$$

Вторую сумму в последнем выражении можно преобразовать, воспользовавшись вспомогательным условием (3.4.9) и волновым уравнением для потенциалов [см. (2.5.15)] $\sum_r (\partial V_{nr}/\partial x_r) = -(4\pi I_n/c)$

$$-\frac{1}{4\pi}\sum_{r}(V_{mr}V_{rn}-V_{mr}V_{nr})=-\frac{1}{4\pi}\sum_{r}\frac{\partial}{\partial x_r}[V_m(V_{rn}-V_{nr})]+$$

$$+\frac{V_m}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x_n}\sum_{r}V_{rr}-\sum_{r}\frac{\partial}{\partial x_r}V_{nr}\right].$$

Первая сумма представляет собой 4-дивергенцию, и ее среднее значение равно нулю. Вторая сумма равна нулю в силу (3.4.9), третья же равна $V_m I_n/c$.

Следовательно, среднее значение W_{mn} (при $m \neq n$) равно среднему от

$$T_{mn}+\left(\frac{V_m I_n}{c}\right)=-\frac{1}{4\pi}\sum_{r=1}^{4} f_{mr}f_{nr}+\left(\frac{V_m I_n}{c}\right). \qquad (3.4.15)$$

В самом деле, среднее значение любой компоненты W_{mn} тензора $\mathfrak{W}$ равно среднему значению тензора, имеющего компоненты

$$T_{mn}+\frac{1}{c}V_m I_n-\frac{1}{c}\delta_{mn}\sum_{r}V_r I_r,$$

где

$$T_{mn}=\frac{1}{4\pi}\left(\sum_{r} f_{mr}f_{rn}+\frac{1}{4}\delta_{mn}\sum_{r,s} f_{rs}^2\right). \qquad (3.4.16)$$

Тензор $\mathfrak{T}$ мы рассматривали ранее, на стр. 210.

В тех участках поля, где 4-вектор заряда-тока равен нулю, тензор $\mathfrak{T}$ совпадает с тензором напряжения-энергии. Компоненты его выражаются через компоненты поля следующим образом:

$$\begin{aligned}
T_{11}&=\frac{1}{8\pi}[E_x^2-E_y^2-E_z^2+H_x^2-H_y^2-H_z^2] \text{ и т. д.},\\
T_{44}&=\frac{1}{8\pi}[E_x^2+E_y^2+E_z^2+H_x^2+H_y^2+H_z^2]=U,\\
T_{12}&=\frac{1}{4\pi}[E_xE_y+H_xH_y]=T_{21} \text{ и т. д.},\\
T_{14}&=\frac{1}{4\pi i}[E_yH_z-E_zH_y]=\frac{1}{4\pi i}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_x=T_{41} \text{ и т. д.}
\end{aligned} \qquad (3.4.17)$$

Импульс поля. То, что мы пренебрегли тензором $\mathfrak{W}$ в пользу $\mathfrak{T}$, не должно нас тревожить, так как $\mathfrak{W}$ не удовлетворяет условиям дивергенции (3.4.3), кроме случая, когда $\mathbf{J}$ и ρ равны нулю, и слишком много пользы от $\mathfrak{W}$

ожидать нельзя. Соотношение дивергенции для $\mathfrak{T}$ не просты из-за выделения 4-дивергенционных членов. Мы имеем

$$\sum_r \frac{\partial T_{mr}}{\partial x_r} = \frac{1}{4\pi} \sum_{r,s} f_{mr} \frac{\partial f_{rs}}{\partial x_s} = \frac{1}{c} \sum_r f_{mr} I_r = k_m, \tag{3.4.18}$$

где k_m — m-я компонента вектора плотности силы, определенного равенством (2.5.27). Пространственная часть выражения

$$\rho \mathbf{E} + (1/c)\, \mathbf{J} \times \mathbf{H}$$

определяет величину и направление силы, действующей на распределение зарядов и токов. Она должна равняться скорости изменения импульса зарядов, которая в сумме со скоростью изменения импульса поля равна силе, действующей на поле плюс заряды. Взяв интеграл, например, от k_1 по некоторой области в пространстве и обозначив через Π_1 компоненту по оси x импульса тока в этой области, мы получим

$$\frac{d\Pi_1}{dt} = \iiint k_1 dv = \iiint \frac{\partial T_{14}}{\partial x_4} dv + \iiint \operatorname{div} \mathbf{F}_1 dv =$$
$$= -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \iiint (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_x dv + \iint \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{A},$$

где $\mathbf{F}_1 = T_{11}\mathbf{i} + T_{12}\mathbf{j} + T_{13}\mathbf{k}$ — сила, действующая на x-компоненты импульсов поля и зарядов; последний интеграл берется по поверхности, ограничивающей выбранную область. Если теперь

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{i}{c} [T_{14}\mathbf{i} + T_{24}\mathbf{j} + T_{34}\mathbf{k}] \tag{3.4.19}$$

назвать импульсом поля (см. стр. 305), то предыдущее равенство означает, что напряжение $\mathbf{T}$, действующее на поверхность части пространства, равно скорости изменения импульса $\mathbf{\Pi}$ тока внутри поверхности *плюс* скорость изменения импульса поля $\mathbf{P}$ внутри этой же поверхности.

Временна́я компонента k_4 [см. (3.4.18)] есть скорость изменения во времени кинетической энергии T тока. Соответствующее равенство (3.4.18) также имеет физический смысл, который станет более отчетлив, если ввести вектор

$$\mathbf{S} = ic\, [T_{41}\mathbf{i} + T_{42}\mathbf{j} + T_{43}\mathbf{k}] = (c/4\pi)\, (\mathbf{E} \times \mathbf{H}), \tag{3.4.20}$$

характеризующий плотность потока энергии, так называемый *вектор Пойнтинга*. Компонента T_{44} представляет собой, конечно, плотность энергии U поля. При $m = 4$ уравнение (3.4.18) принимает, таким образом, вид

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial T}{\partial t},$$

так что уравнение неразрывности для потока энергии означает, что поток вектора $\mathbf{S}$ сквозь замкнутую поверхность равен сумме с обратным знаком скоростей изменения энергии тока T и поля U внутри поверхности. Итак, все компоненты тензора $\mathfrak{T}$ имеют физический смысл.

Плотность момента количества движения поля при отсутствии зарядов и токов равна

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{4\pi c} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H})\, \mathbf{E} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})\, \mathbf{H}].$$

Полный момент количества движения поля относительно начала координат получится интегрированием $\mathbf{M}$ по всему объему, занятому полем.

Если электромагнитное поле, отделенное от токов, заключено в конечном объеме (волновой пакет) и движется с течением времени, можно показать, что интеграл от

$$(P_x, P_y, P_z, U) = (iT_{14}/c,\ iT_{24}/c,\ iT_{34}/c,\ T_{44}),$$

взятый по этому объему (точнее говоря, по соответствующей области трехмерного подпространства, ортогонального оси времени, в любой заданный момент), ведет себя по отношению к преобразованиям Лоренца как истинный 4-вектор. В самом деле, в этом случае $\sum_r (\partial T_{mr}/\partial x_r) = 0$, так что если C_m — компоненты какого-либо постоянного 4-вектора, то 4-вектор **B** с компонентами $B_r = \sum_m C_m T_{mr}$ имеет 4-дивергенцию $\sum_r (\partial B_r/\partial x_r)$, равную нулю; следовательно, интеграл по любой замкнутой поверхности в четырехмерном пространстве от нормальной составляющей вектора **B** равен нулю. Возьмем в качестве такой поверхности поверхность «четырехмерной призмы» с образующими, расположенными вдоль оси времени параллельно движению волнового пакета, и с основаниями, перпендикулярными этим образующим и настолько большими, чтобы призма содержала рассматриваемый волновой пакет. Интеграл по пространственной части (по боковым граням призмы) будет равен нулю, так как поле равно нулю вне пакета, поэтому интеграл временнóй компоненты $\sum_m C_m T_{m4}$ вектора **B** по одному основанию четырехмерной призмы равен интегралу по другому основанию, соответствующему более раннему моменту времени. Таким образом, в данном случае интеграл от $\sum C_m T_{m4}$ по объему, занятому пакетом, есть лоренц-инвариант, а соответствующие интегралы от T_{m4} по пакету (по объемам, перпендикулярным оси времени) представляют собой компоненты некоторого истинного 4-вектора, а это мы и хотели доказать.

Из этого вывода следует, что если мы имеем волновой пакет электромагнитного поля, то вектор, компонентами которого служат интегралы импульса поля **P** и энергии поля U, представляет собой истинный вектор энергии-импульса, который ведет себя так, как если бы пакет был материальной частицей. Момент количества движения пакета мы получим, взяв интеграл от **M**, как указано выше.

Вариационными методами можно получить много других интересных свойств электромагнитного поля.

Изменение калибровки потенциалов. Многие трудности, которые нами встретились при переходе от плотности функции Лагранжа к плотности энергии, можно было обойти, изменив должным образом калибровку потенциалов поля. Если вместо того, чтобы исходить из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{A} + (1/c)(\partial\varphi/\partial t) = 0$, задать новую калибровку потенциалов условием $\varphi = 0$, то уравнения Максвелла запишутся в виде

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{E} = -(1/c)(\partial\mathbf{A}/\partial t) = \mathbf{D}/\varepsilon,\\ \operatorname{div}(\partial\mathbf{A}/\partial t) = -(4\pi\rho c/\varepsilon),\\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{A}) + (\varepsilon\mu/c^2)(\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2) = (4\pi\mu/c)\,\mathbf{J}.\end{gathered} \tag{3.4.21}$$

Другими словами, мы пользуемся как продольной, так и поперечной частью вектора **A**, причем продольная часть определяется плотностью зарядов, а поперечная часть — в значительной степени плотностью тока. Такая калибровка особенно удобна тогда, когда отсутствуют свободные заряды ρ, но она бывает полезна и в других случаях.

Плотность функции Лагранжа при этой калибровке имеет вид

$$L=\frac{\varepsilon}{8\pi c^2}\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2-\frac{1}{8\pi\mu}|\operatorname{rot}\mathbf{A}|^2+\frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}-\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})+\frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}. \quad (3.4.22)$$

Следовательно, плотность канонического импульса равна $\mathbf{p}=\varepsilon\dot{\mathbf{A}}/4\pi c^2=-(\mathbf{D}/4\pi c)$. Уравнения Лагранжа—Эйлера приводят к последнему из уравнений (3.4.21). Первые два связывают поля с потенциалом, третье — определяет калибровку.

При этом плотность функции Гамильтона имеет вид

$$W_{44}=\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{A}}-L=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})-\frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}=$$

$$=\frac{2\pi c^2}{\varepsilon}p^2+\frac{1}{8\pi\mu}|\operatorname{rot}\mathbf{A}|^2-\frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}=\mathscr{H}_\varepsilon \quad (3.4.23)$$

Второе из видоизмененных канонических уравнений снова соответствует последнему уравнению (3.4.21).

Для отыскания остальных компонент тензора напряжения-энергии $\mathfrak{W}$ при выбранной калибровке заметим, что аффинор второго ранга, (x, y)-компонента которого равна $\partial L/\partial(\partial A_x/\partial y)$, есть $(\mathbf{H}\times\mathfrak{J}/4\pi)=-(\mathfrak{J}\times\mathbf{H}/4\pi)$. Воспользовавшись этим выражением, мы найдем, что вектор потока энергии (при $\mu=\varepsilon=1$) равен

$$\mathbf{S}=-\dot{\mathbf{A}}\cdot(\mathfrak{J}\times\mathbf{H}/4\pi)=(c/4\pi)(\mathbf{E}\times\mathbf{H}),$$

то есть его выражение совпадает с (3.4.20). Таким образом, наша специальная калибровка приводит к стандартному виду плотность энергии и вектор Пойнтинга и избавляет от возни с дивергенциями, которые неизбежны при обычной калибровке, как мы это видели на предыдущих страницах. С другой стороны, вектор импульса поля имеет иной вид

$$\mathbf{P}=-\frac{1}{4\pi}(\nabla\mathbf{A})\cdot\dot{\mathbf{A}}=\frac{c}{4\pi}[(\mathbf{D}\times\mathbf{B})+\mathbf{D}\cdot(\nabla\mathbf{A})].$$

Соответственно видоизменяются и пространственные составляющие тензора напряжения-энергии

$$\mathfrak{U}=\frac{1}{4\pi}(\nabla\mathbf{A})\times\mathbf{H}-\mathfrak{J}L.$$

Эти величины нам не столь привычны, как плотность энергии и вектор Пойнтинга, поэтому мы, вероятно, можем примириться с их видоизмененными выражениями (можно, впрочем, придать им более знакомую форму, опираясь на калибровочную инвариантность).

Аффинор импеданса. Для определения импеданса электромагнитного поля наиболее удобно принять ту калибровку, которая была введена в предыдущем пункте и привела к «правильному» виду плотности энергии и плотности потока энергии. Вернемся к уравнениям Лагранжа—Эйлера (или к каноническим уравнениям)

$$\dot{\mathbf{p}}=-\frac{1}{4\pi}\nabla\times(\mathfrak{J}\times\mathbf{H})+\frac{1}{c}\mathbf{J}.$$

Выражение справа представляет собой «силу», вызывающую определенную скорость изменения импульса $\mathbf{p}=\varepsilon\dot{\mathbf{A}}/4\pi c^2=-\mathbf{D}/4\pi c$. Той ее частью, которая прилагается к поверхности, ограничивающей поле, является, согласно сказанному на стр. 296, аффинор $(-1/4\pi)(\mathfrak{J}\times\mathbf{H})$, дивергенция которого входит в приведенное здесь выражение плотности силы. Если

электромагнитная волна возникла на каком-либо участке граничной поверхности, то «реакция» волны на элемент поверхности $\mathbf{dA}$[1]) равна

$$\frac{1}{4\pi}\mathbf{dA}\cdot(\mathfrak{J}\times\mathbf{H})=\frac{1}{4\pi}(\mathbf{dA}\times\mathbf{H}),$$

то есть представляет собой вектор, ортогональный к $\mathbf{H}$ и к $\mathbf{dA}$ (то есть этот вектор лежит в касательной плоскости к поверхности). Сопоставив этот вывод с правилом циркуляции $\oint \mathbf{H}\cdot\mathbf{ds}=4\pi\mathbf{I}$ (см. стр. 214), мы увидим, что если волна «вызвана» поверхностным током на граничной поверхности поля, то вектор $-(c/4\pi)(\mathbf{dA}\times\mathbf{H})$ как раз равен, по величине и направлению, току, несомому элементом $\mathbf{dA}$. Интеграл от этого вектора по всему участку поверхности, несущему ток, дает полный токовой лист[2]).

$\dot{\mathbf{A}}=-c\mathbf{E}$ есть вектор «скорости», поэтому величина, соответствующая импедансу для потенциала $\mathbf{A}$, в направлении, определяемом единичным вектором $\mathbf{a}$, есть аффинор, преобразующий вектор $-c\mathbf{E}$ в вектор $(\mathbf{a}/4\pi)\times\mathbf{H}$. Впрочем, роли «силы» и «скорости» определены нами так, что обычное определение импеданса как отношения Z напряжения к силе тока (H пропорционально силе тока, а E — напряжению) заменено на противоположное.

Итак, мы определим *аффинор импеданса* $\mathfrak{Z}$ электромагнитного поля как «отношение» электрического поля к магнитному, умноженному на $c/4\pi$, а *аффинор адмитанса* $\mathfrak{Y}$ — как обратный аффинор, то есть

$$4\pi\mathbf{E}=-c\mathfrak{Z}\cdot\mathbf{H},\quad c\mathbf{H}=-4\pi\mathfrak{Y}\cdot\mathbf{E},\quad \mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}^{-1}. \tag{3.4.24}$$

Умножив единичный вектор $\mathbf{a}$ векторно на обе части второго из этих равенств, мы найдем, что адмитанс поля в направлении вектора $\mathbf{a}$ равен $\mathbf{a}\times\mathfrak{Y}$.

Между прочим, мы замечаем, что если $\mathbf{E}$ и $(c/4\pi)\,\mathbf{a}\times\mathbf{H}$ соответственно аналогичны напряжению и силе тока и, следовательно, импеданс есть «отношение» одного к другому, то «произведение» $(c/4\pi)\,\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ есть коэффициент расхода энергии, то есть плотность потока энергии [как и должно быть в соответствии с (3.4.20)]. Таким образом, аналогия оказывается полной.

Плоская волна. Если отсутствуют токи и $\varepsilon=\mu=1$, то простым решением уравнений (3.4.21) будет

$$\mathbf{A}=\mathbf{a}_p Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t},\quad \mathbf{k}=(\omega/c)\,\mathbf{a}_k,\quad A=|A|\,e^{i\varphi},$$

где $\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{a}_p$ — взаимно-ортогональные единичные векторы; соответствующие поля —

$$\mathbf{E}=\frac{i\omega}{c}\,\mathbf{a}_p Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t},$$

$$\mathbf{H}=\frac{i\omega}{c}\,(\mathbf{a}_k\times\mathbf{a}_p)\,Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}=\mathbf{a}_k\times\mathbf{E};$$

$\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ образуют правую тройку взаимно-ортогональных векторов. Как обычно для плоских волн, соответствующее значение функции Лагранжа равно нулю. Плотность энергии и вектор Пойнтинга выра-

---

[1]) Здесь случайное совпадение обозначений: $\mathbf{A}$ и $\mathbf{dA}$. — *Прим. ред.*

[2]) «The total current sheet». — *Прим. ред.*

жаются в виде

$$U = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{\omega^2 |A|^2}{4\pi c^2} \sin^2 \Omega, \quad \mathbf{S} = \frac{\omega^2 |A|^2}{4\pi c} \mathbf{a}_k \sin^2 \Omega$$
$$(\Omega = k(\alpha x + \beta y + \gamma z - ct + \varphi)),$$

где α, β, γ — направляющие косинусы вектора $\mathbf{k}$ по отношению к осям x, y, z. При этом аффинор $\nabla \mathbf{A} = i(\omega/c)\mathbf{a}_k \mathbf{a}_p A e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}$, так что плотность импульса поля имеет выражение

$$\mathbf{P} = \frac{\omega^2 |A|^2}{4\pi c} \mathbf{a}_k \sin^2 \Omega = \mathbf{S}$$

и пространственная часть тензора напряжения-энергии представляет собой симметричный аффинор

$$\mathfrak{U} = \frac{\omega^2 |A|^2}{4\pi c^2} \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k \sin^2 \Omega.$$

Сам тензор напряжения-энергии может быть записан в такой симметричной матричной форме:

$$\mathfrak{W} = \frac{\omega^2 |A|^2}{4\pi c^2} \sin^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \varphi) \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma & c\alpha \\ \beta\alpha & \beta^2 & \beta\gamma & c\beta \\ \gamma\alpha & \gamma\beta & \gamma^2 & c\gamma \\ c\alpha & c\beta & c\gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, для случая плоской волны импеданс — отношение вектора $\mathbf{E}$ к вектору $-(c/4\pi)\mathbf{H}$ — есть аффинор

$$\mathfrak{Z} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{J} \times \mathbf{a}_k,$$

а адмитанс

$$\mathfrak{Y} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{J} \times \mathbf{a}_k.$$

Импеданс волны в направлении распространения равен, таким образом,

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{a}_k \times \mathfrak{J} \times \mathbf{a}_k = -\frac{4\pi}{c}(\mathfrak{J} - \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k).$$

Мы видим, что в гауссовых единицах, которыми мы здесь пользуемся, «величина» импеданса плоской электромагнитной волны в вакууме равна $4\pi/c$.

Остаются еще лишь несколько полей, заслуживающих быть упомянутыми в этой главе.

Уравнение Дирака. Нам следует, например, составить плотность функции Лагранжа, относящуюся к уравнению Дирака для *электрона* [см. уравнение (2.6.57)]. Здесь мы имеем восемь независимых переменных поля, компоненты ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 [см. (2.6.56)] волновой функции ψ вдоль четырех направлений спинового пространства и соответствующие компоненты ψ^*. С помощью небольших преобразований мы придем к такому выражению плотности функции Лагранжа:

$$L = \frac{\hbar c}{2i}[(\operatorname{grad}\psi^*)\cdot\boldsymbol{\alpha}\psi - \psi^*\boldsymbol{\alpha}\cdot(\operatorname{grad}\psi)] + \frac{\hbar}{2i}\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] -$$
$$- e\psi^*\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{A}\psi + ec\psi^*\varphi\psi - mc^2\psi^*\alpha_0\psi, \qquad (3.4.25)$$

где $\mathbf{A}$ и ψ — электромагнитные потенциалы в точке, где находится электрон, m и e — масса и заряд электрона, ψ и ψ^* представляют все четыре

компоненты каждого из векторов, а операторы $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_x \mathbf{i} + \alpha_y \mathbf{j} + \alpha_z \mathbf{k}$ и α_0 определены в (2.6.55).

Уравнения Лагранжа—Эйлера можно получить обычным способом, выразив предварительно ψ и ψ^* через ψ_1^*, ψ_2^*, ψ_3^*, ψ_4^*, ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 в уравнении (3.4.25) и выполнив необходимые действия, требуемые операторами α. Так, например, уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{1x}^*}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{1y}^*}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{1z}^*}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{1t}^*}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi_1^*} = 0$$

перейдет в

$$c\left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi_4}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x\psi_4\right) + i\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi_4}{\partial y} + \frac{e}{c}A_y\psi_4\right) + \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi_3}{\partial z} + \frac{e}{c}A_z\psi_3\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\hbar}{ic}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} - e\varphi\psi_1\right) + mc\psi_1\right] = 0, \quad (3.4.26)$$

то есть в одно из уравнений Дирака (2.6.57). Однако тот же результат можно получить проще, рассматривая только *две* переменных ψ и ψ^* и вычисляя формально частные производные так, как если бы это были обыкновенные функции, а не векторы в спиновом пространстве. Например, при этом уравнение Лагранжа—Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_x^*}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_y^*}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_z^*}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_t^*}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi^*} = 0$$

будет соответствовать всему уравнению (2.6.57)

$$c\left[\alpha_0 mc\psi + \boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\operatorname{grad}\psi + \frac{e}{c}\mathbf{A}\psi\right) + \left(\frac{\hbar}{ic}\frac{\partial\psi}{\partial t} - e\varphi\psi\right)\right] = 0, \quad (3.4.27)$$

одной из компонент которого является уравнение (3.4.26). Соответствующим уравнением для спинового вектора ψ^* явится

$$c\left[\psi^* mc\alpha_0 + \left(-\frac{\hbar}{i}\operatorname{grad}\psi^* + \frac{e}{c}\mathbf{A}\psi^*\right)\cdot\boldsymbol{\alpha} + \left(-\frac{\hbar}{ic}\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - e\varphi\psi^*\right)\right] = 0.$$

И в рассматриваемом случае энергия равна 4,4-компоненте тензора $\mathfrak{W}$

$$W_{44} = \psi_t^*\frac{\partial L}{\partial \psi_t^*} + \psi_t\frac{\partial L}{\partial \psi_t} - L = H$$
$$= mc^2(\psi^*\alpha_0\psi) + e\mathbf{A}\cdot(\psi^*\boldsymbol{\alpha}\psi) - ec(\psi^*\varphi\psi) +$$
$$+ \frac{\hbar c}{2i}[\psi^*\boldsymbol{\alpha}\cdot\operatorname{grad}\psi - \operatorname{grad}\psi^*\cdot\boldsymbol{\alpha}\psi]. \quad (3.4.28)$$

Вектор «интенсивности поля» $\mathbf{S}$ и вектор «импульса поля» $\mathbf{P}$ получают соответственно выражения

$$\mathbf{S} = \mathbf{i}W_{41} + \mathbf{j}W_{42} + \mathbf{k}W_{43} = \frac{\hbar c}{2i}\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\boldsymbol{\alpha}\psi - \psi^*\boldsymbol{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right], \quad (3.4.29)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{i}W_{14} + \mathbf{j}W_{24} + \mathbf{k}W_{34} = \frac{\hbar}{2i}[(\operatorname{grad}\psi^*)\psi - \psi^*(\operatorname{grad}\psi)]. \quad (3.4.30)$$

Ни один из этих векторов не пропорционален вектору плотности тока

$$\mathbf{J} = ce\psi^*\boldsymbol{\alpha}\psi$$

[см. (2.6.59)]. Так как L только линейно зависит от производных переменных поля по времени, то канонические импульсы пропорциональны самим переменным поля и весь аппарат гамильтоновых канонических уравнений должен быть преобразован так, как описано на стр. 309. Впрочем, более важно выражение интеграла, подлежащего минимизации, а также выражения плотностей энергии и импульса.