ГЛАВА 4

Функции комплексного переменного

В двух предыдущих главах обсуждалась связь между некоторыми физическими явлениями и дифференциальными уравнениями с частными производными, изображающими эти явления. Несколько последующих глав будет посвящено выяснению общих математических свойств дифференциальных уравнений и их решений. Мы начали знакомиться с различными физическими интерпретациями величин, связанных с полями: тензоров, дивергенции, криволинейных интегралов и т. п. Теперь нам предстоит научиться распознавать различные типы уравнений и их решений. Мы познакомимся с приемами, которые позволяют выяснить, как именно заданная функция зависит от своего аргумента: где она стремится к нулю или к бесконечности, где ее можно интегрировать и дифференцировать и т. д. Мы должны научиться определять, какого рода функции служат решениями данных дифференциальных уравнений, каким образом «особенности» уравнения связаны с особенностями решений и т. п. В этой главе мы рассмотрим общие свойства функций; связь между уравнениями и их решениями является предметом следующей главы.

Точнее говоря, в этой главе мы рассмотрим функции комплексного переменного $z=x+iy$, где i означает квадратный корень из -1. Мы уже показали (см. стр. 77 и 78), что такая переменная может быть изображена двумерным вектором, имеющим компоненты x и y по осям соответственно абсцисс и ординат; было указано, что можно также рассматривать z как оператор, который поворачивает любой другой вектор, изображающий комплексное число, на угол $\operatorname{arctg}(y/x)$ и изменяет длину этого вектора в $\sqrt{x^2+y^2}$ раз. В этой главе мы постоянно будем пользоваться векторным представлением комплексных чисел и лишь время от времени будем прибегать к представлению их в виде операторов.

Можно задать вопрос, почему необходимо изучать комплексные числа, тогда как многие разделы физики нуждаются лишь в действительных решениях уравнений. Казалось бы, изучения действительных функций действительного переменного, изменяющегося от $-\infty$ до $+\infty$, достаточно для того, чтобы во многих случаях исследовать интересные с точки зрения физики решения. На этот вопрос можно ответить, что переход к комплексным значениям переменных имеет своей целью *законченность выводов* и *удобство формулировок*.

Множества действительных чисел недостаточно даже для представления корней алгебраических уравнений. С другой стороны, *все* корни *всех* алгебраических уравнений выражаются комплексными числами. Далее, зная поведение функции $f(z)$ при всех комплексных значениях z, мы имеем картину основных свойств f (даже тех, которые относятся к действительным z), более полную, нежели та, которую мы получаем, когда нам известно ее поведение лишь при действительных z. Так, расположение на комплексной z-плоскости нулей и полюсов функции f (т. е. кор-

ней уравнений $f=0$ и $1/f=0$) определяет многое в поведении f при всех значениях z. Часто вычисление интеграла функции $f(z)$ по множеству действительных значений z (вдоль действительной оси) можно значительно упростить, заменив искомый интеграл другим, взятым вдоль какого-нибудь простого пути в комплексной плоскости. Обычно оказывается полезным рассматривать решение некоторого уравнения в комплексной форме, обращаясь с этим решением как с комплексным числом и выделяя действительную или мнимую часть решения, соответствующую реальной физической задаче, лишь тогда, когда нужно сравнить окончательный ответ с данными измерений.

Однако наиболее важная причина, вызывающая необходимость изучения комплексных функций, состоит в том, что такое изучение раскрывает нам общие свойства функций. Так, например, различные типы особенностей функции поддаются классификации. Как правило, эти особенности связаны с некоторыми физическими особенностями, такими, как источники, точечные электрические заряды и т. д. Оказывается возможным, зная лишь особенности функции, полностью охарактеризовать всю функцию. В электростатике этому соответствует тот факт, что электрическое поле полностью определяется величиной и распределением зарядов. Вследствие тесной связи, существующей между электростатикой и комплексными переменными, неудивительно, что нам удастся, кроме того, получить метод решения уравнения Лапласа (иначе говоря, можно будет указать расположение эквипотенциальных линий). В гл. 1 мы видели, что эквипотенциальные линии и линии, им ортогональные, порождают некоторую ортогональную систему криволинейных координат. Таким образом, можно сказать, что мы получим метод построения новых координатных систем, наилучшим образом соответствующих геометрии рассматриваемой задачи.

4.1. Комплексные числа и комплексные переменные

Впервые, может быть, изучающий физику использует комплексные числа тогда, когда он обозначает символом $Ae^{i\omega t}$ вектор длины A, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω. Это представление полезно также при изучении простых гармонических колебаний, так как $A\cos\omega t$ является его действительной частью, а $A\sin\omega t$ — мнимой. Мы уже неоднократно пользовались этим фактом в предыдущих главах.

Связь между векторами и комплексными числами устанавливают, определяя должным образом символ i. *Мы рассматриваем i как оператор, который, воздействуя на произвольный вектор, поворачивает его на угол* 90° *против часовой стрелки.* Тогда оператор i^2, действие которого состоит в последовательном двукратном применении оператора i, будет поворачивать вектор на угол 180°. Такой поворот дает вектор, антипараллельный исходному, а поэтому

$$i^2=-1, \tag{4.1.1}$$

что согласуется с обычным определением символа i. Трехкратное применение оператора i сводится к повороту вектора на угол 270° или на $-90°$, так что $i^3=-i$. Аналогично $i^4=1$.

Опишем теперь различие между действительными и чисто мнимыми числами. Изобразим все действительные числа в виде векторов, параллельных оси x. Умножая действительное число на i, мы получаем вектор, параллельный оси y. Векторы, параллельные оси y, называются *чисто мнимыми* числами. Произвольный вектор[1]) f можно, конечно, выразить

[1]) Обычное обозначение полужирными буквами не будет применяться к векторам, изображающим комплексные числа.

через его компоненты u и v вдоль осей x и y и записать в виде

$$f = u + iv; \tag{4.1.2}$$

это равенство и выражает связь между комплексными числами и векторами. *Длина* или *амплитуда* вектора f, обозначаемая $|f|$, равна $\sqrt{u^2+v^2}$, т. е. абсолютной величине (модулю) комплексного числа $u+iv$, а угол φ, образуемый вектором f с осью x и определяющий направление вектора, равен фазе числа $u+iv$, т. е. $\operatorname{arctg}(v/u)$. Этот угол называется также *фазовым углом* или *аргументом* числа $u+iv$. Число

$$\bar{f} = u - iv,$$

сопряженное с $u+iv$, изображается вектором, получающимся из f посредством отражения относительно оси x.

Оператор вращения. Чтобы получить выражение оператора, осуществляющего поворот на угол θ, рассмотрим сначала оператор поворота на бесконечно малый угол $d\theta$. Такой поворот прибавляет к исходному вектору f вектор длины $|f\,d\theta|$, перпендикулярный f. Таким образом, f получает приращение

$$df = if\,d\theta,$$

а новый вектор имеет вид $f + if\,d\theta = (1 + id\theta)f$. Интегрируя это уравнение, получаем вектор f, повернутый на θ радиан. Пусть f_0 — начальное значение f (при $\theta = 0$). Тогда при произвольном θ вектор f будет равен

$$f_\theta = e^{i\theta} f_0. \tag{4.1.3}$$

Следовательно, оператор, поворачивающий векторы на угол θ радиан, имеет вид $e^{i\theta}$ (см. стр. 78).

Если этот оператор применить к единичному вектору, направленному по оси x, то получится вектор, образующий с осью x угол θ. Выразив этот новый вектор через составляющие и записав его в виде комплексного числа, приходим к *формуле Муавра* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, упомянутой на стр. 78. Последняя согласуется с исходным определением i как оператора поворота на угол 90°, в чем нетрудно убедиться, положив $\theta = \pi/2$. Единичный вектор, вращающийся против часовой стрелки с угловой скоростью ω, запишется в виде $e^{i\omega t}$, где, как обычно, опущена единица, на которую воздействует этот оператор. Любой вектор f может быть выражен через его модуль $|f|$ и оператор, нужный для поворота этого модуля от оси x до направления f,

$$f = |f|\,e^{i\varphi}, \qquad \bar{f} = |f|\,e^{-i\varphi},$$

где φ — фазовый угол (аргумент) числа f.

Векторы и комплексные числа. Установив взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и векторами, исследуем теперь соотношения между различными возможными комбинациями комплексных чисел и соответствующими комбинациями векторов. Два вектора складываются по правилу параллелограмма, т. е. так же, как два комплексных числа. Однако результат перемножения двух комплексных чисел, если его выразить в векторных обозначениях, будет зависеть как от скалярного произведения, так и от векторного. Если $f = u + iv$ и $g = s + it$, то

$$\bar{f}g = (us + vt) + i\,(ut - vs),$$

или в векторной записи

$$\bar{f}g = \mathbf{f}\cdot\mathbf{g} + i\,(\mathbf{f}\times\mathbf{g})_3\,^{1)}. \tag{4.1.4}$$

Таким образом, если векторы f и g ортогональны, то вещественная часть произведения $\bar{f}g$ равна нулю, если же они параллельны, то мнимая часть этого произведения равна нулю. Следует заметить, что соотношение (4.1.4) подобно соотношению (1.6.30), относящемуся к кватернионам. Это неудивительно, так как Гамильтон первоначально строил алгебру кватернионов, пытаясь распространить метод комплексных переменных на трехмерное пространство и трехмерные векторы.

Дифференциальные свойства векторного поля выражаются через оператор ∇. Ограничиваясь здесь двумерным случаем, т. е. плоскостью переменных x и y, можно записать ∇ в виде

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}. \tag{4.1.5}$$

Применив оператор $\bar{\nabla}$ к вектору g, в силу (4.1.4) получаем

$$\bar{\nabla}g = \operatorname{div} g + i\,(\operatorname{rot} g)_3, \tag{4.1.6}$$

так что $\bar{\nabla}$ сразу дает и дивергенцию и ротор вектора. Заметим, что воздействие оператора $\bar{\nabla}$ на действительную функцию (т. е. на переменный вектор g, направленный вдоль оси x), в силу (4.1.6) дает

$$\bar{\nabla}g = \frac{\partial g}{\partial x} - i\,\frac{\partial g}{\partial y},$$

т. е. именно нужное выражение. Мы видим, таким образом, что применение комплексных чисел для обозначения векторов имеет то достоинство, что оно позволяет «конденсировать» несколько векторных операций в одну.

Дальнейшей «конденсации» можно добиться, введя вместо x и y новые переменные

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = -\frac{1}{2}i\,(z - \bar{z}), \tag{4.1.7}$$

где z — радиус-вектор точки (x, y).

В этом месте у читателя обычно возникают сомнения относительно возможности рассматривать z и $\bar{z}$ как независимые переменные (такие сомнения не возникают при рассмотрении переменных $x-y$, $x+y$), так как часто говорится, что если известно z, то известно и $\bar{z}$. Это, однако, *неверно*. Если вектор z задан как отрезок, проведенный из начала в некоторую точку, то $\bar{z}$ еще не определено, так как должно быть еще задано направление оси x. Обратно, если даны векторы z и $\bar{z}$, то ось x может быть получена как биссектриса угла, образуемого этими векторами, после чего могут быть найдены x и y [2]). С помощью (4.1.5) нетрудно получить выражения

$$2\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 2\,\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}\,\frac{\partial}{\partial x} + 2\,\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\,\frac{\partial}{\partial y} = \nabla, \quad \bar{\nabla} = 2\,\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4.1.8}$$

---

[1]) Индекс 3 обозначает проекцию на третью ось координат (ось z), перпендикулярную осям x и y и составляющую с ними правую тройку. — *Прим. ред.*

[2]) Переменные z и $\bar{z}$ становятся независимыми только тогда, когда для x и y допускаются комплексные значения. — *Прим. ред.*

Двумерное электростатическое поле. Предположим, что мы имеем электростатическое поле, порожденное линейными зарядами, перпендикулярными плоскости xy. Вектор напряженности поля $\mathbf{E}$ будет, конечно, лежать в плоскости xy, и мы будем иметь двумерное поле. Поэтому вектор $\mathbf{E}$ может быть представлен комплексным числом, скажем $u-iv$ (зачем берется знак минус, выяснится вскоре), где u и v представляют собой функции от x и y, определяемые распределением линейных зарядов. Рассмотрим сначала участки плоскости xy, свободные от зарядов. На этих участках, согласно уравнениям Максвелла (2.5.11),

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}=0. \tag{4.1.9}$$

В силу (4.1.6) и (4.1.8) оба эти условия могут быть записаны (только в двумерном случае) в чрезвычайно простой форме

$$\frac{\partial E}{\partial z}=0.$$

Это условие означает, что вектор E *зависит только от* $\bar{z}=x-iy$ *и не зависит от* $z=x+iy$. Напротив, сопряженный вектор $\bar{E}=u+iv$ *зависит только от* z *и не зависит от* $\bar{z}$. Обычно мы будем иметь дело с функциями от z, поэтому и здесь удобнее рассматривать вектор $\bar{E}$, зная который, мы легко найдем вектор поля $\bar{E}$. Итак, мы показали, что $\bar{E}$ является функцией переменного z, но не зависит от $\bar{z}$.

Выписав для $\bar{\mathbf{E}}$ уравнения, аналогичные (4.1.9), или выразив $2(\partial\bar{E}/\partial\bar{z})=$ $=\nabla(u+iv)=0$ через производные по x и по y и отделив действительную и мнимую части, получаем пару интересных соотношений между u и v:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4.1.10}$$

Это — так называемые *условия Коши — Римана*. Они получены для вектора напряженности (двумерного) электростатического поля в области, свободной от зарядов и токов, но сам вывод этих условий показывает, что им удовлетворяет любая комплексная функция $f=u+iv$, зависящая только от z (и не зависящая от $\bar{z}$). Всякая такая функция, действительная и мнимая части которой удовлетворяют уравнениям (4.1.10), называется *аналитической функцией* комплексного переменного $z=x+iy$.

Всякая аналитическая функция переменного z может изображать двумерное электростатическое поле. Такую функцию можно получить, взяв любую достаточно хорошую функцию действительного переменного и введя в нее комплексный аргумент $z=x+iy$ [например, $\sin(x+iy)$, $1/[(x+iy)^2+a^2]$, $\ln(x+iy)$ представляют собой аналитические функции для всех значений z, при которых они не обращаются в бесконечность].

В области, свободной от зарядов и токов, существует потенциал V поля E, т. е. такая функция V от x и y, для которой $E=\nabla V=\partial V/\partial x+i\partial V/\partial y$. Обобщая, допустим, что V может принимать комплексные значения, причем потенциалом в обычном смысле является только ее действительная или мнимая часть. Тогда $E=2\partial V/\partial\bar{z}$, и так как $\partial E/\partial z=0$, то

$$4\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\bar{z}}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0, \tag{4.1.11}$$

т. е. V удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа. Разумеется, действительная и мнимая части функции V в отдельности также являются решениями уравнения Лапласа; с помощью уравнений (4.1.10) легко получить, что действительная и мнимая части *любой* аналитической функции

являются решениями двумерного уравнения Лапласа. Таким образом, или аналитическая функция может непосредственно определять электростатическое поле, или ее действительная и мнимая части могут служить потенциалами полей.

Контурные интегралы. Интегрирование комплексных функций представляет собой естественное обобщение интегрирования действительных функций. Пусть требуется интегрировать аналитическую функцию $f(z)$; переменным интеграции служит, разумеется, z. Так как z может перемещаться по комплексной плоскости, а не только вдоль действительной оси, то нужно еще задать определенную линию, вдоль которой должно производиться интегрирование. Последняя называется *контуром*, и если контур замкнут, то сам интеграл называется *контурным интегралом* и обозначается $\oint f(z)\,dz$ или $\oint f e^{i\varphi}\,ds$, где ds — модуль вектора dz, а φ — его аргумент.

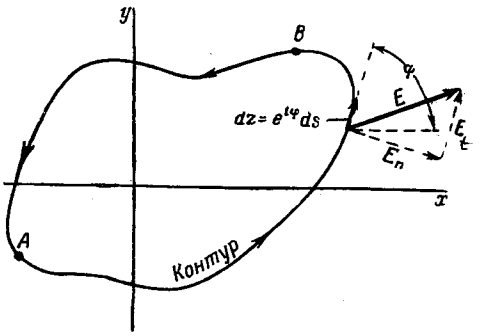

Рис. 4.1. Контурное интегрирование в комплексной плоскости.

При таком обобщении понятия интеграла мы не можем ограничиться указанием нижнего и верхнего пределов интегрирования, а должны описать весь контур или начертить его, как это сделано на рис. 4.1. Выражение самого интеграла сходно с интегралами, выражающими циркуляцию векторного поля вдоль контура или поток сквозь контур в двумерном случае (см. § 1.2). В действительности комплексный контурный интеграл есть некоторая комбинация того и другого, в чем можно убедиться, взяв интеграл от вектора электростатического поля и воспользовавшись формулой (4.1.4):

$$\oint \bar{E}\,dz = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} + i\oint (\mathbf{E}\times d\mathbf{s})_3 = \oint E_t\,ds + i\oint E_n\,ds. \qquad (4.1.12)$$

Здесь E_t — компонента вектора $\mathbf{E}$ вдоль $d\mathbf{s}$, E_n — компонента, нормальная к $d\mathbf{s}$. Таким образом, действительная часть контурного интеграла от $\bar{E}$ есть циркуляция вектора $\mathbf{E}$ вдоль контура интегрирования, а мнимая часть — поток вектора $\mathbf{E}$ сквозь цилиндр с высотой 1, образующие которого пересекают контур и перпендикулярны плоскости xy. (В рассматриваемом случае, так как поле параллельно плоскости xy, поток вектора $\mathbf{E}$ сквозь цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости xy, равен интегралу $\oint E_n\,ds$, умноженному на высоту цилиндра.)

В случае области, свободной от зарядов, и поток и циркуляция равны нулю, поэтому для любого контура, расположенного в такой области,

$$\oint \bar{E}\,dz = 0. \qquad (4.1.13)$$

Это равенство выражает *теорему Коши*, согласно которой, если $f(z)$ — аналитическая функция переменного z на некотором замкнутом контуре и внутри его, интеграл $\oint f(z)\,dz$ вдоль этого контура равен нулю. Наоборот, если интеграл вдоль любого замкнутого контура равен нулю, то $f(z)$ — аналитическая функция, а следовательно, вектор плоского электро-

статического поля может быть представлен посредством аналитической функции во всех точках, где отсутствуют заряды и токи.

Применив формулу (1.2.9) к цилиндрической поверхности, построенной на контуре, приходим к выводу, что если поле E порождается совокупностью линейных зарядов, распределенных равномерно вдоль прямых, перпендикулярных плоскости xy, причем линейная плотность зарядов на r-й прямой равна q_r, то в силу (4.1.12)

$$\oint \overline{E}dz = 4\pi i \sum_r{}' q_r, \tag{4.1.14}$$

где суммирование распространяется на те линии, которые пересекают плоскость xy *внутри рассматриваемого контура*.

Рассмотрим случай, когда лишь одна прямая, несущая заряды с линейной плотностью q_1, пересекает плоскость xy в некоторой точке $z_1 = x_1 + iy_1$, лежащей внутри выбранного контура. Тогда поле $\overline{E}$ может быть представлено в виде суммы поля $\overline{E}_s$, порождаемого источником q_1 внутри контура, и поля $\overline{E}_0$, порождаемого внешними источниками. Элементарное интегрирование уравнений электростатики дает выражение $\mathbf{E}_s = (2q_1/r)\,\mathbf{a}_r$, где $r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = |z-z_1|^2$ — квадрат расстояния в плоскости xy от источника в точке z_1 и $\mathbf{a}_r$ — единичный вектор, направленный от источника к точке (x, y). В комплексных обозначениях

$$E_s = \frac{2q_1}{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{2q_1}{r}e^{i\varphi},$$

где φ — угол, образуемый вектором $\mathbf{a}_r$ с осью x. Так как $re^{i\varphi} = z - z_1$, то

$$\overline{E}_s = \frac{2q_1}{r}e^{-i\varphi} = \frac{2q_1}{re^{i\varphi}} = \frac{2q_1}{z-z_1}. \tag{4.1.15}$$

Прибавив $\overline{E}_0$ к $\overline{E}_s$, получим

$$\overline{E} = \frac{f(z)}{z-z_1}, \tag{4.1.16}$$

где $f(z) = \overline{E}_0(z-z_1) + 2q_1$ — аналитическая функция внутри контура и на нем. Итак, *для любой аналитической функции* $f(z)$ мы имеем формулу

$$\oint \frac{f(z)dz}{z-z_1} = 2\pi i f(z_1), \tag{4.1.17}$$

которая представляет собой более общую форму теоремы Коши.

Таким образом теорема Коши является перефразировкой, в терминах аналитических функций, теоремы Гаусса из электростатики.

Подобным же образом магнитное поле, порожденное линейными токами, перпендикулярными плоскости xy, можно изобразить посредством функции $\overline{H}$ переменного z. Ток I вдоль прямой, пересекающей плоскость xy в точке z_0, внутри контура, порождает поле $H = 2(\mathbf{I}\times\mathbf{a}_r)/r$, которое изображается функцией $\overline{H} = 2I/i\,(z-z_0)$. В случае нескольких токов I_r имеем в силу формулы (1.2.11)

$$\oint \overline{H}\,dz = 4\pi \sum_r{}' I_r, \tag{4.1.18}$$

где суммирование распространяется на те токи, которые проходят внутри контура интегрирования. Здесь контурный интеграл действительный, но если мы подставим выражение функции $\overline{H}$ через $z - z_0$, то снова получим теорему Коши.

Обратимся снова к рис. 4.1; мы видим, что интеграл вдоль (незамкнутого) пути, соединяющего точки A и B, может быть записан в виде

$$\int_A^B \bar{E}\,dz = \int_A^B E_t\,ds + i\int_A^B E_n\,ds = W = V + iU. \qquad (4.1.19)$$

Действительная часть V этого интеграла представляет собой разность электростатических потенциалов в точках A и B. Мнимая часть U измеряет число силовых линий, пересекающих путь интегрирования от точки A до точки B.

Заметим, что семейство кривых $U = \text{const}$ ортогонально семейству $V = \text{const}$, так что V и U могут служить ортогональными криволинейными координатами в плоскости. Если в поле помещен проводник, имеющий форму цилиндра с образующими, перпендикулярными плоскости xy, то его поверхность должна пересекать эту плоскость по некоторой эквипотенциальной кривой $V = \text{const}$. Силовые линии будут при этом образовывать ортогональное семейство линий $V = \text{const}$, и поверхностный заряд цилиндра на единицу его высоты на участке поверхности, ограниченном точками A и B, будет равен $U(B) - U(A)$. В гл. 2 (см. стр. 153) функция U была названа *функцией тока*.

В этом параграфе мы сопоставили комплексные переменные и электростатические величины и в качестве примера дали электростатическую интерпретацию некоторым известным теоремам теории функций. В дальнейшем в этой главе мы разовьем более строгую теорию, но будем обращаться к электростатической интерпретации, чтобы сделать ощутимым смысл излагаемых теорем, как это было сделано здесь в применении к теореме Коши и интегралу Коши.

4.2. Аналитические функции

Электростатическая аналогия позволила нам вывести эвристическим путем некоторые основные теоремы теории функций. В частности, мы заметили, что аналитические функции образуют узкий класс, к которому *не* принадлежат многие функции. В этом параграфе мы постараемся выяснить сущность требований, определяющих аналитическую функцию, с точки зрения геометра и аналитика. При этом получатся более строгие выводы упомянутых теорем. (Строгость в этих вопросах действительно полезна!)

Аналитическая функция была нами определена грубо как функция, зависящая только от z, а не от z и $\bar{z}$ вместе. Поэтому изучение аналитической функции комплексного переменного $f(z) = u + iv$, где u и v — *действительные* функции переменных x и y, обладает меньшей степенью общности, нежели изучение произвольных функций двух переменных, так как в случае аналитической функции u и v оказываются связанными условиями Коши — Римана (4.1.10). Более точное определение аналитической функции можно получить, рассматривая поведение производной функции $f(z)$ по z в точке a. Само понятие производной достаточно ясно. Функция $f(z)$ изображается вектором. Спрашивается, как изменяется этот вектор по величине и по направлению, когда z смещается из a в направлении, определяемом вектором dz. Если $f(z)$ зависит только от z (как, например, z^2), то мы вправе ожидать, что производная ($2z$ в нашем примере) определяется только точкой, в которой она вычисляется. *Однозначная функция является аналитической в точке a, если ее производная в точке a определяется единственным образом*, т. е. не зависит от направления dz, по которому она вычисляется. Независимо от того, куда мы